O concurso apresentado aos participantes no ProfMat 2013 consistiu na resolução do problema «As compras da Catarina»:

A Catarina foi ao supermercado às compras. Colocou os seis produtos de que precisava no cesto e reparou que os seus preços eram todos diferentes.

Enquanto esperava na fila, pegou na calculadora e, distraída, multiplicou os preços em vez de os somar. Fez depois o cálculo já com a operação certa e reparou, admirada, que o resultado era o mesmo.

A Catarina ter-se-á enganado?

Se tal for possível, explica como obtiveste os seis preços de uma possível solução.

Se for impossível, demonstra-o.

Os critérios de classificação eram resposta correta e bem justificada, ausência de erros, simplicidade e clareza.

Foram-nos entregues catorze resoluções. Três delas foram eliminadas porque os preços indicados, em euros, tinham mais de duas casas decimais. Noutra, da Gisela, cuja resposta vinha em verso, a solução só funcionaria se o cálculo do produto fosse feito numa máquina que arredondasse os resultados à centésima.

O problema tem muitas soluções, mas não uma infinidade como dois concorrentes se atreveram a dizer. Privilegiámos as resoluções que indicassem corretamente um método para descobrir tantas soluções quantas quiséssemos.

Várias pessoas começaram, seguindo uma das indicações do Polya, por resolver o problema para dois preços. Viram que era possível e foram aumentando o número de produtos comprados até chegar aos seis. A vantagem desta via é que, a partir das três compras, se percebe a lógica do que é preciso fazer e rapidamente se avança.

Outros atacaram logo o problema considerando seis itens.

Sejam a, b, c, d, e, f os seis preços. Terá de ser:

$$a \times b \times c \times d \times e \times f = a + b + c + d + e + f$$

Resolvendo em ordem a f, vem:

$$f = \frac{a + b + c + d + e}{abcde - 1}$$

Representemos a soma e o produto dos cinco primeiros preços respetivamente por S e por P, dando um aspeto mais *simpático* à equação.

$$f = \frac{S}{P - 1}$$

Demos a palavra à Graça:

Os preços são números com duas casas decimais, no máximo. Pensei no meu 10.º ano: quando é que uma fração representa um dízima finita? Se o denominador for um produto de uma potência de 2 por uma potência de 5. Então, $P - 1$ tem de ser o produto de uma potência de 2 por uma potência de 5, ou seja, P tem de ser igual à soma de 1 com um produto de uma potência de 2 por uma potência de 5.

Mas, havia ainda a considerar que o quociente não poderia ter mais de duas casas decimais.

Logo, convém que o denominador da fração que define f seja um destes valores: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 ou 100, a que correspondem os seguintes valores de P: 2, 3, 5, 6, 11, 21, 26, 51 e 101.

Agora, para se obter uma solução, escolhe-se um destes valores para P. É mais fácil se optarmos por um número não primo. Arranjam-se depois cinco números, no máximo com duas casas decimais, cujo produto seja P.

Por exemplo, seja $P = 6$ (foi o valor mais popular entre os participantes). Há várias possibilidades para os cinco preços. Eis algumas.

1,00 – 2,00 – 0,50 – 1,50 – 4,00, pelo que $f = 1{,}80$. A soma e o produto dos seis preços é 10,80.

1,00 – 2,00 – 3,00 – 0,25 – 4,00, pelo que $f = 2{,}05$. A soma e o produto dos seis preços é 12,30.

6,00 – 2,00 – 0,50 – 0,25 – 4,00, pelo que $f = 2{,}55$. A soma e o produto dos seis preços é 15,30.

Mais alguns exemplos:

Com $P = 11$: 11,00 – 2,00 – 0,50 – 0,10 – 10,00, pelo que $f = 2{,}63$. A soma e o produto dos seis preços é 28,93.

Com $P = 51$: 17,00 – 1,00 – 2,00 – 3,00 – 0,50, pelo que $f = 0{,}47$. A soma e o produto dos seis preços é 23,97 e o grupo Adelina, Anabela, Pilar & Teresa apresentou até a lista dos seis produtos que se poderiam comprar.

O mesmo fez o Mário, usando $P = 2$ (sendo a soma e o produto dos seis igual a 19,00):

1 saco de plástico para as compras: 0,20€
1 chupa-chupa para o filhote: 0,80€
1 pacote de arroz: 1,00€
1 garrafa de tinto do Douro: 2,50€
1 cachecol do FCP: 5,00€
1 livro «Uma Vida Sem Problemas II»: 9,50€

NOTA FINAL

Existem outros valores de $P-1$, denominador da fração para calcular o sexto preço f, para além dos indicados pelos concorrentes (1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 e 100). Basta pensar que, se o denominador for k vezes um dos números anteriores e o numerador for múltiplo de k, a fração se simplifica. Por exemplo, se o numerador for múltiplo de 3, o denominador pode ser 3×4 ou 3×5 ou 3×10 ou 3×20 ou... Vejamos um caso, para $P = 76$ e $S = 21$:

9,50 – 1,00 – 0,50 – 8,00 – 2,00, pelo que $f = 0{,}28$. A soma e o produto dos seis preços é 21,28.

Lista de Participantes

Individuais: Augusto Manuel Barreto, Catarina Isabel Ferreira, Cláudia Domingues, Gisela Araújo, Graça Braga da Cruz, Graciosa Veloso, Hugo Miguel Sá, José Santos Silva, Mª Manuela Nogueira da Silva, Mário Roque, Paula Cristina Gomes, Paulo Correia.
Em equipa: Adelina Precatado, Anabela Teixeira, Pilar Mansos & Teresa Moreira; Daniel Castanho & Sandra Neves;

Premiados e Prémios

1º (*Unidade TI-Nspire Cx, oferta Texas Instruments*)
— Catarina Ferreira

2ºs (*três jogos diversos*)
— Graça Braga da Cruz
— Hugo Miguel Sá
— Mário Roque
— Adelina, Anabela, Pilar & Teresa

Os prémios devem ser levantados até 31 de Dezembro de 2014. Por favor, contactar a sede da APM em Lisboa (socio@apm.pt ou 217163690).

ENCONTROS

Decorrerá em Setúbal, de 22 a 23 de novembro de 2014, o *EIEM 2014 — Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Promovido pela Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, este será um encontro que terá por tema as tarefas matemáticas. A divulgação do encontro será feita no site da SPIEM: http://www.spiem.pt/.

De 14 a 16 de Novembro de 2014 decorrerá no Instituto de Educação, em Lisboa, o *III Congresso Internacional TIC e Educação — ticEduca 2014*. Sob o tema da aprendizagem *online*, o encontro organiza-se em torno de cinco subtemas: ambientes de aprendizagem formais e informais e tecnologias; comunicação mediada por computador, relações e expressão das emoções *online*; tecnologias digitais e desenvolvimento profissional; *e-learning* no ensino superior e na formação profissional; e tecnologias e necessidades (educativas) especiais. Mais informações disponíveis em http://ticeduca2014.ie.ulisboa.pt.

De 4 a 8 de fevereiro de 2015 realizar-se-á em Praga, na República Checa, o *CERME 9 — Congress of European Research in Mahtematics Education*. Este é um encontro que se organizará em torno de vinte grupos temáticos diferentes e que deliberadamente se afasta das apresentações individuais para valorizar o trabalho colaborativo em torno de cada um dos temas. Para mais informações consulte http://www.cerme9.org/.

Decorrerá em Vila Real, de 11 a 13 de setembro de 2014, o *XII Congresso da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação* sob o tema «As ciências da educação: espaços de investigação, reflexão e ação interdisciplinar». Centrado em torno de dezoito eixos temáticos, este é um encontro abrangente que foca desde as questões da administração educacional e da política educativa, passando pelo currículo e pelas metodologias de ensino, pela formação de professores, incluindo ainda questões ao nível da cidadania e dos direitos humanos, entre vários outros temas. Mais informações podem ser acedidas em http://xiicongressospce2014.utad.pt/.

Helena Rocha
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Universidade Nova de Lisboa