Número racional como quociente da divisão de inteiros

Graciosa Veloso

Não basta conhecer os fenómenos; importa compreender os fenómenos, determinar as razões da sua produção, descortinar as ligações de uns com outros.

(Caraça, 2002, p. 62)

Os estudos desenvolvidos no âmbito da Educação, especificamente em Educação Matemática e a experiência profissional mostram que ao professor cabem complexas funções, especificamente a observação, a interpretação e a orientação dos alunos no processo de aprendizagem. Esta competência requer o desenvolvimento articulado do conhecimento didático, relativo a aspetos do processo de aprendizagem e do ensino específicos dos diversos tópicos, com a compreensão em profundidade da matemática que ensina. Em 2009, Ma apresenta e discute quatro componentes fundamentais — *ideias básicas, perspetivas múltiplas, conectividade* e *coerência longitudinal* (Ma, 2009, p. 211) — do conhecimento matemático que um professor deve dominar de modo a que compreenda e oriente os seus alunos: a compreensão das ideias matemáticas básicas, a conexão entre estas, seja relativamente a conceitos ou a procedimentos, as representações múltiplas para um mesmo conceito ou processo e a coerência longitudinal. É com a preocupação de contribuir para a explicitação de conexões da divisão de números inteiros com o sentido de número racional que proponho este artigo. Tem como objetivo apresentar o número fracionário como solução para o problema da impossibilidade da divisão no universo dos números inteiros. Enquadrados em contextos simples, analiso os aspetos da divisão, no conjunto dos números inteiros, que conduziram ao aparecimento de um outro número, o número fracionário.

Divisão de números inteiros

Cada uma das quatro operações aritméticas fundamentais transforma, com processos próprios, um par (ordenado) de números num número do mesmo conjunto. Neste artigo considero como universo de trabalho o conjunto dos números inteiros não negativos, $\mathbb{N}_0$ (ou $\mathbb{Z}_0^+$). Este conjunto pode ser expresso pela reunião do conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, com o conjunto singular que contém o número zero[1] formalmente representado por $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Caraça (2002) discute, neste universo, a possibilidade de cada uma das quatro *operações fundamentais* da Aritmética. Considera possíveis a adição e multiplicação, pois a soma e o produto de dois números inteiros são números também inteiros. Quanto à subtração e à divisão explicita as condições de possibilidade. Na subtração exige que o aditivo seja maior ou igual ao subtrativo. Na divisão impõe que o dividendo seja múltiplo do divisor. É das condições de possibilidade da divisão que me vou ocupar seguidamente.

A divisão como operação inversa da multiplicação

Considerem-se as duas situações A e B, que envolvem, propositadamente com significados diferentes, os mesmos números:

Formação de grupos

A. Os 24 alunos da turma A estão organizados em 8 grupos de trabalho de igual dimensão. Quantos elementos tem cada grupo?	**B.** Todos os 24 alunos da turma B estão organizados em grupos de 8 alunos. Quantos grupos existem nesta turma?

Estas situações podem ser interpretadas matematicamente como mostra a Tabela 1.

Em cada situação, a relação entre o número de alunos da turma com o número de grupos e o número de alunos por grupo, pode ser representada pela equação $24 = 8 \times n$, em que n representa o número que se desconhece. Na situação A, a variável n representa o número de alunos por grupo; na situação B, a variável n representa o número de grupos. O valor de n pode ser obtido determinando o quociente de 24 por 8, concluindo que na situação **A** cada grupo tem 3 (24:8) alunos e na situação **B** existem 3 (24:8) grupos. Em ambas as situações são conhecidos o produto e um dos fatores e o outro fator é desconhecido. Este foi determinado como o quociente da divisão entre os dois termos conhecidos. Neste processo a divisão apareceu como operação inversa da multiplicação. Conforme afirma Caraça (2002), a divisão é a operação inversa da multiplicação porque resolve o problema de sendo conhecido o produto e um dos fatores permitir determinar o outro fator. Pode representar-se esta relação entre a multiplicação e a divisão como sua operação inversa do seguinte modo usando simbologia matemática:

$$D : d = q, \text{ porque } d \times q = D$$

em que D representa o produto (conhecido),

$d \neq 0$ o fator conhecido[4]

e q representa o fator desconhecido, obtido através da divisão. A terminologia específica da divisão é:

D — dividendo; d — divisor e q — quociente.

Segue-se uma análise desta relação entre a multiplicação e a divisão discutindo a possibilidade da operação divisão e depois o modo de ultrapassar um tipo de impossibilidade surgida na divisão de um número inteiro por um número natural.

Divisão Inteira — conceito para ultrapassar um dos impasses na divisão

Nesta secção procede-se à discussão da possibilidade da divisão no conjunto $\mathbb{N}_0$, e em seguida discute-se como se pode ultrapassar, pela divisão inteira, um primeiro nível de impossibilidade da divisão neste universo.

A possibilidade operatória pode ser traduzida pela questão: Da divisão de um número inteiro por um número natural resulta um número inteiro? Nas duas situações abor-

Tabela 1. Situações de partilha equitativa e de medida

Situação A	Situação B
Partilha equitativa[2]	Medida ou Agrupamento[3]
Dados:	
24 — n° de alunos da turma 8 — n° de grupos Os grupos têm igual n° de alunos. Todos os alunos estão distribuídos.	24 — n° de alunos da turma 8 — n° de alunos por grupo Os grupos têm igual n° de alunos. Todos os alunos estão distribuídos.
Pedido:	
número de elementos por grupo	número de grupos

dadas anteriormente, que envolveram os números inteiros 24 e 8, foi obtido o quociente 3 que é também um número inteiro. A pertença ao mesmo conjunto deste número é justificada pelo facto de 24 ser múltiplo de 8. Estendendo esta relação pode afirmar-se que a divisão é possível em $\mathbb{N}_0$ desde que o dividendo seja múltiplo do divisor. Ficam assim excluídos, (ainda) sem resposta, os casos em que:

(i) o dividendo é maior que o divisor não sendo seu múltiplo,

$D > d$, D não múltiplo de d;

e em que

(ii) o dividendo é menor que o divisor, $D < d$.

Uma vez estabelecida a condição de possibilidade da operação analise-se como se evoluiu na abordagem dos casos abrangidos em (i). Considere-se uma situação em que o dividendo é maior que o divisor e não é seu múltiplo.

Embalar objetos

Há 33 objetos para embalar em caixas iguais e com capacidade para 6 objetos. Quantas caixas se encherão, no máximo, e quantos objetos ficarão, eventualmente, por embalar?[5]

Um dos processos práticos de proceder ao empacotamento consiste em ir enchendo as caixas até se obter o maior número possível de caixas cheias. Este processo pode ser traduzido, enchimento a enchimento, da seguinte forma:

- enche-se 1 caixa com 6 objetos, restando 27 objetos, traduzida esta ação pela igualdade $33 = 1 \times 6 + 27$;
- repete-se a ação anterior, enche-se uma segunda caixa, e podem representar-se as duas ações já executadas por $33 = 2 \times 6 + 21$.
- Assim sucessivamente até não haver possibilidade de encher outra caixa,

A Tabela 2 apresenta todos os passos efetuados para a obtenção da resposta à questão formulada, afirmando que se encheram 5 caixas e ficaram 3 objetos por embalar.

Detenhamo-nos um pouco na análise desta tabela, com a preocupação de a relacionar com a divisão. Procuremos explicitar as regularidades nas cinco igualdades que nela figuram. Representam decomposições de 33 como soma de duas parcelas em que uma delas é um produto e neste produto existe um invariante que é 6 (número de objetos por caixa). Como diferença significativa para o que estamos a estudar interessa realçar que a igualdade

$\mathbf{5} \times 6 + \mathbf{3} = 33$ difere das quatro anteriores por a parcela 3 ser menor que 6. Revisitando o problema significa que é esta, e não as anteriores, que corresponde à resposta apresentada.

Relacionando a solução deste problema com a definição de divisão apresentada anteriormente, pode perguntar-se se 5 pode ser considerado quociente da divisão de 33 por 6. Raciocinando por absurdo, ou seja, admitindo que pode ser considerado como quociente, significava que era válida a igualdade $\mathbf{5} \times 6 = 33$; perante a falsidade desta afirmação conclui-se que 5 não é o quociente desta divisão. A igualdade $33 = 5 \times 6 + 3$ tem relação com a igualdade $30 = 5 \times 6$, sendo aceitável a afirmação: o quociente inteiro é 5 (n° de caixas cheias) e o resto é 3 (n° de objetos não embalados). Estamos perante um caso de divisão inteira, operação que vai ser caraterizada imediatamente de seguida.

No conjunto dos números inteiros não negativos, $\mathbb{N}_0$, a divisão inteira é uma operação (binária) que transforma cada par ordenado desses números (dividendo, divisor), (D, d), com $d \neq 0$, num único par ordenado de números, (q, r), em que q designa o quociente inteiro e r o resto, com $0 \leq r < d$, e de tal modo que o produto de d por q adicionado a r é D. Esta relação de igualdade designa-se por *identidade fundamental da divisão inteira* e representa-se com simbologia matemática por $D = d \times q + r$, com $0 \leq r < d$.

Esta definição acolhe a de divisão como operação inversa da multiplicação no conjunto $\mathbb{N}_0$, apresentada na primeira parte desta secção. A igualdade $D = d \times q$ específica da divisão como operação inversa da multiplicação, correspondente às situações em que D é múltiplo de d, traduz aquela identidade com resto zero.

Tabela 2. Percurso da divisão inteira de 33 por 6

N° de caixas cheias	N° de objetos empacotados	N° de objetos por empacotar	Igualdade correspondente
1	6	27	$1 \times 6 + 27 = 33$
2	12	21	$2 \times 6 + 21 = 33$
3	18	15	$3 \times 6 + 15 = 33$
4	24	9	$4 \times 6 + 9 = 33$
5	30	**3**	$\mathbf{5} \times 6 + \mathbf{3} = 33$

Uma vez caraterizada a divisão inteira e para a distinguir da anteriormente definida, chama-se divisão exata a esta operação inversa da multiplicação. Pelo que foi analisado pode afirmar-se que a divisão exata em $\mathbb{N}_0$ é um caso particular de divisão inteira, tendo como quociente um número natural e nulo o resto.

Sistematizando a análise feita nesta secção, formulou-se a questão: Como ultrapassar a impossibilidade de, pela divisão exata, se poderem resolver os casos em que o dividendo é maior que o divisor? Desenhou-se um percurso que teve como desfecho a resposta: a divisão inteira. Como nota de reflexão e de passagem à secção que deu título ao artigo, fica o comentário a seguir. A divisão inteira não é a operação inversa da multiplicação pois para um dividendo e um divisor nas condições aqui explicitadas — dividendo não múltiplo do divisor — o quociente (inteiro) não é solução inteira da equação $D = q \times d$. Esta equação é, como foi explicitado, impossível em $\mathbb{N}_0$.

Surgimento do número fracionário no contexto da divisão de inteiros

O problema da possibilidade da divisão no conjunto dos números inteiros foi, até aqui, discutido através de dois tipos de situações: aquele em que o dividendo é múltiplo do divisor e o imediatamente anterior a esta secção, em que o dividendo é maior, embora não múltiplo do divisor. Falta discutir o caso em que o dividendo é menor que o divisor. Para prosseguir, voltemos à igualdade $33 = 5 \times 6 + 3$, que relaciona o dividendo, 33, com o divisor, 6, com o quociente inteiro, 5 e com o resto, 3. Como este não é nulo, significa que 33 (ainda) não foi dividido exatamente por 6. Para responder a este impasse pode começar por se enunciar a pergunta: Como dividir este resto, 3, pelo divisor 6? A divisão como operação inversa da multiplicação não é solução, pois 3 não é múltiplo de 6. Será a divisão inteira um estratagema adequado? A igualdade $3 = 0 \times 6 + 3$, embora verdadeira, em nada adianta para poder responder. Realmente o quociente nulo traduz um não fracionamento do dividendo e consequentemente o problema ainda não está resolvido. A resposta a este problema é possível pela criação de um novo número e pela extensão a um novo conjunto numérico, que contém o conjunto $\mathbb{N}_0$, da definição de divisão exata apresentada atrás nos termos seguintes:

Quando

- D representa um número inteiro
- d representa um número natural (inteiro não nulo, $d \neq 0$)

e $D < d$

define-se a divisão como sendo a operação que permite determinar o quociente $q = \frac{D}{d}$, $d \neq 0$ de tal modo que q verifique a equação $q \times d = D$ e em que:

- D representa o dividendo,
- d o divisor
- $\frac{D}{d}$ o quociente exato.

$\frac{D}{d}$ representa um exemplo de uma nova categoria de número, o *número fracionário*. A esta representação $\frac{D}{d}$ chama-se *fração própria*, se o numerador for menor que o denominador.

Se o numerador for maior ou igual que o denominador pode afirmar-se que se trata de uma *fração imprópria*.

Esta caraterização da divisão de números inteiros permite agora afirmar que é possível efetuar a divisão de um número inteiro qualquer por um número não nulo. Nos exemplos atrás estudados pode afirmar-se que o quociente de 3 por 6 é $\frac{3}{6}$ e que o quociente de 33 por 6 é $\frac{33}{6}$.

É esta caraterização do quociente de quaisquer dois números inteiros, sendo o divisor não nulo, que permite definir número racional desde já. Um número racional é todo o número que pode ser representado por uma fração cujos numerador e denominador representam números inteiros, mantendo a restrição de o denominador representar um número não nulo. Resulta assim que qualquer inteiro também é número racional, basta pensar que pode ser representado por qualquer fração cujo numerador seja um inteiro múltiplo do denominador. Um número fracionário pode ser representado na forma de fração cujo numerador não é múltiplo do denominador. Resulta então que nenhum número inteiro é número fracionário e reciprocamente, nenhum fracionário é número inteiro.

A criação do número fracionário permitiu a construção de um conjunto numérico, o *campo racional* (Caraça, 2002, p. 36) que é o conjunto dos números racionais (não negativos representado por $\mathbb{Q}_0^+$). Este conjunto é a reunião dos conjuntos disjuntos, anteriormente invocados, $\mathbb{N}_0$ e o conjunto dos números fracionários. Embora a discussão das quatro operações no conjunto dos números racionais não seja objeto deste artigo, é do conhecimento profissional que as suas definições e propriedades são inclusivas relativamente ao conjunto dos números inteiros. Este aspeto relativo ao conhecimento sobre a Matemática é valorizado por Caraça (2002) ao considerar regida pelo princípio de *economia* de *pensamento*:

> É claro que as novas definições, uma vez que não estamos obrigados pelas antigas (que não são aplicáveis), podem ser dadas como quisermos. Mas não é menos claro que convém que essas novas definições saiam o menos possível, dos moldes das antigas, para que a introdução delas no cálculo se faça com o menor dispêndio

possível de energia mental, não só no dar da definição, como nas suas consequências. (Caraça, 2002, p. 26)

A concluir

Se este artigo ajudar a aprofundar a ligação existente entre a divisão de números inteiros e o significado de fração enquanto quociente, cumpre o principal objetivo que me propus ao escrevê-lo. O percurso que construí caracteriza-se pela identificação dos impasses criados na divisão definida no conjunto dos números inteiros e progressiva superação, até emergir o número fracionário como forma de dar resposta a situações reais e de traduzir aspetos essenciais do princípio de economia na evolução da Matemática.

Procurei passar a escrito parte do trabalho, no campo do conhecimento matemático dos números racionais, que tenho vindo a sistematizar relativamente à experiência na formação inicial de futuros professores dos 1° e 2° ciclos, na tentativa de contribuir para a evolução respeitante à compreensão matemática do que se ensina nos primeiros anos de escolaridade básica.

Notas

[1] Adoto a caraterização de Caraça, considerando que zero não é número natural, (Caraça, 2002, p. 4) .

[2] O sentido de partilha equitativa provém de situações em que genericamente há D objetos (quantidade de uma grandeza) a serem distribuídos igualmente por d grupos e pretende-se determinar a dimensão de cada grupo, ou seja, o número de objetos (quantidade de grandeza) por 1 grupo.

[3] O sentido de medida, ou agrupamento, está presente em situações em que, genericamente, a quantidade de uma grandeza presente no dividendo vai ser medida tendo como unidade de medida o valor (da mesma grandeza) do divisor. O quociente representa a medida referida.

[4] Em toda a divisão, o divisor tem que ser diferente de zero.

[5] Este problema é diferente daquele que, envolvendo os mesmos dados, pergunta: «Quantas caixas são necessárias para empacotar os 33 objetos?»

Referências

Caraça, B. J. (2002). *Conceitos Fundamentais da Matemática* (4ª ed.). Lisboa: Gradiva.

Ma. L. (2009). *Saber e Ensinar Matemática Elementar*. Lisboa: Gradiva.

Graciosa Veloso
Escola Superior de Educação de Lisboa

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

A sequência de tarefas seguinte tem como principal objetivo o desenvolvimento do sentido de número racional pela compreensão do significado de medida das frações. É este o significado envolvido na marcação de pontos de um segmento de reta (cujo comprimento é considerado como unidade de medida) correspondentes a frações unitárias $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$, etc.

Quando as crianças iniciam a escolaridade básica possuem e revelam algum conhecimento informal baseado nas suas experiências sociais e por esta razão trazem ideias de metade e de quarta parte, em situações de partilha equitativa. Não se passa nada de semelhante relativamente ao conhecimento e muito menos à compreensão da fração como traduzindo a medida de uma grandeza. É para apelar a que se evite a precipitação da abordagem pela via da medida que proponho estas tarefas. Devem ser exploradas sem recorrer a quaisquer processos de cálculo algorítmico. Os materiais são uma ajuda quer para pensar quer para comunicar os aspetos significativos da experiência matemática com eles desenvolvida.

Na primeira tarefa através da comparação visual entre a área de cada peça do Tangran e a da unidade de medida aparecem as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$.

Na segunda tarefa, continuando a usar uma unidade de referência não normalizada, a área do hexágono, surgem, suportadas na análise da utilização do material, relativamente à tarefa anterior, por exemplo, as frações $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{2}{3}$. Nesta tarefa ainda, por observação de alguns blocos dá-se expressão visual a que $\frac{5}{6}$ representa a soma de $\frac{1}{2}$ com $\frac{1}{3}$; consequentemente também se pode estabelecer a igualdade $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Pode ainda ser explorada a variação da medida da grandeza área com a variação da unidade, nomeadamente a situação correspondente a números inversos.

Na terceira tarefa, através da variação da unidade de medida de comprimento podem aparecer outras frações, por exemplo, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, etc. Na quarta tarefa é valorizada a componente mais formal, decorrente das tarefas anteriores, a da representação de pontos numa reta orientada.

Graciosa Veloso