Geometria colorida

Eduardo Veloso[1]

Tradicionalmente, as cores não intervinham em geometria, pelo menos não intervinham com «substância». Que pretendo dizer com isto?

Suponhamos que estamos no âmbito da geometria plana. Estamos assim a imaginar um plano, representado por uma folha de papel *branco*. Desenhar uma *figura* nesse plano é escolher e assinalar, com uma cor diferente — *preto*, por exemplo — esses pontos escolhidos. As cores, do plano e dos pontos escolhidos, podiam ser outras, por exemplo verde/vermelho, desde que fossem duas diferentes.

A figura 1a representa um triângulo ABC. O rectângulo cinzento representa o plano ilimitado. Note-se que neste triângulo os pontos assinalados são os vértices e os lados (*e não o interior*) e até poderíamos ter escolhido outra cor para os vértices — por exemplo o amarelo — e traçado a figura 1b. Poderíamos ainda ter assinalado os pontos do interior do triângulo ABC com um cinzento médio, e obtido a figura 1c.

Se definimos *figura plana como um conjunto (bem definido) de pontos do plano*, então estamos em presença de *duas figuras apenas:* a figura 1a e a figura 1b são geometricamente *a mesma figura*, pois os conjuntos de pontos assinalados no plano são os mesmos em qualquer dos casos. *Igualdade de figuras* quer aqui dizer, portanto, *figuras com os mesmos pontos*. Assim, encarando a cor como o estamos a fazer neste início do artigo, podemos dizer que estamos a trabalhar apenas *com uma cor*, a qual serve para distinguir do plano os pontos que formam a figura que queremos assinalar. De resto, *por este facto*, essa «cor» até podem ser várias (como no caso da figura 1c, em que são três: preto, amarelo e cinzento).

Mas quando a matemática pretende estudar as simetrias da arte decorativa, em que as figuras com mais do que uma cor abundam..., é óbvio que estes simples conceitos iniciais da geometria elementar não chegam. Que fazer?

O que é que distingue realmente um ponto de outro na geometria com apenas uma cor? Eu diria que é a *posição* dos pontos! As duas figuras 1a e 1b são *a mesma figura*, ou seja, *são formadas pelos mesmos pontos*, porque ao pintarmos o ponto A de preto ou vermelho, no contexto em que nos estávamos a colocar, estávamos a assinalar o mesmo ponto A, pois em ambas as situações *a sua posição no plano era a mesma*.

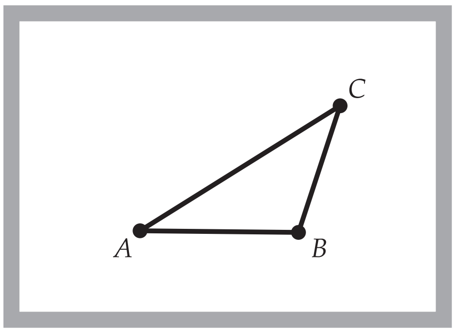

Figura 1a

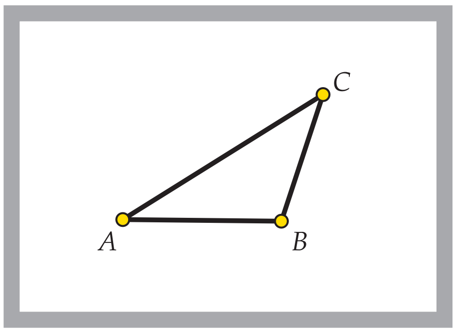

Figura 1b

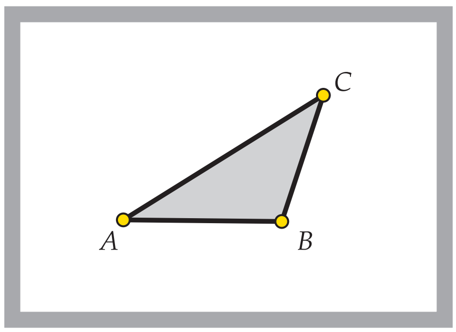

Figura 1c

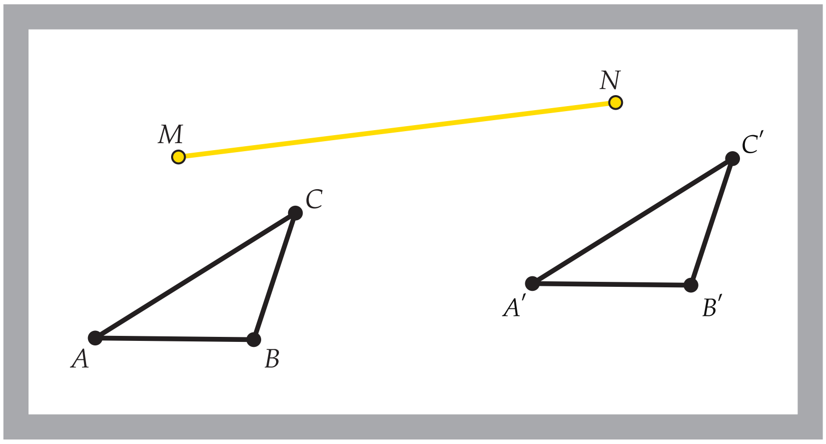

Figura 2

Mas pensemos no seguinte exemplo: um triângulo ABC, um segmento orientado MN e a imagem $A'B'C'$ de ABC pela translação definida por MN. (Figura 2)

Podemos considerar que a figura 2 é formada pelos pontos todos assinalados no plano, ou que temos aqui três figuras (um segmento e dois triângulos). Mas o que *nunca diremos* é que o triângulo ABC *é a mesma figura* que o triângulo $A'B'C'$! É evidente que os dois triângulos são *diferentes conjuntos de pontos*, e dada a nossa definição de figura estamos perante figuras diferentes... Mas não devemos chamar ignorante a alguém que diga que os dois triângulos são iguais, pois está simplesmente a definir igualdade de figuras de um modo diferente da nossa... Foi por um preconceito deste tipo que na Matemática Moderna se começou a chamar a estes dois triângulos *geometricamente iguais*, o que gerou e continuará a gerar grandes confusões, agora que nas metas isso foi ressuscitado... A solução é deixar os alunos até ao fim do 2.° ciclo, pelo menos, dizer iguais — tal como chamam iguais a dois gémeos, que no entanto não são a mesma pessoa... — e não os obrigar desde logo a dizer congruentes.

E depois, quando e se necessário, explicar a pouco e pouco por que razão devemos preferir a palavra *congruente*.

Portanto, *mesma figura* é diferente de *figuras congruentes* (ou iguais). E *congruentes* o que é? Em vez da velha ideia de Euclides da sobreposição, como já temos transformações geométricas, podemos definir duas figuras F e F' como *congruentes* (ou iguais) se existe uma *isometria* que as transforma uma na outra (como a translação no caso dos triângulos da figura 2).

Como sabemos, *isometrias* são as transformações geométricas que preservam as distâncias entre quaisquer dois pontos. Assim, voltando às cores, se os pontos A', B' e C' fossem vermelhos, não seria por isso que os dois triângulos deixariam de ser *congruentes* (ou vulgarmente *iguais*...), pois as distâncias entre os pares de vértices correspondentes dos triângulos são iguais!

Portanto, no contexto da *geometria a uma cor* em que estamos a mover-nos até agora, as isometrias não ligam à cor, pois só há uma cor realmente, é qualquer cor que assinale uma nossa escolha de um ponto no plano, o qual supostamente tem uma cor uniforme que não conta...

Figuras coloridas; primeiros passos

É óbvio que na arte decorativa não podemos ignorar as cores, e a matemática que queira analisar a arte decorativa não o pode obviamente fazer.

Está-se mesmo a ver o que são figuras coloridas e o que significa duas figuras coloridas serem iguais. Mas em matemática, quando estamos a abordar um assunto novo, devemos inicialmente ter cuidado com os termos que usamos, ser um pouco formais e apenas depois aceitar cometer abusos de linguagem. Uma linguagem muito formal é quase ilegível, e portanto, assim que sabemos com alguma certeza do que estamos a falar, podemos e devemos — sobretudo na educação básica — começar a cometer abusos de linguagem simplificadores.

Vamos considerar de início que, além da cor uniforme do plano — que será o cinzento médio —, temos apenas duas cores à nossa escolha[2]. Essas duas cores serão, pelas razões apontadas na nota 2, o preto e o branco (mas poderiam ser em teoria quaisquer duas cores diferentes). Como construímos uma figura colorida? Atribuindo a cada ponto que escolhemos para a figura uma das duas cores. Um modelo matemático para este procedimento é considerar que as cores formam um conjunto C com dois elementos — $C = \{P, B\}$ — e que colorir uma figura F (conjunto de pontos) é conceber uma aplicação Γ de F em C, que faz corresponder a cada ponto de F um elemento de C,

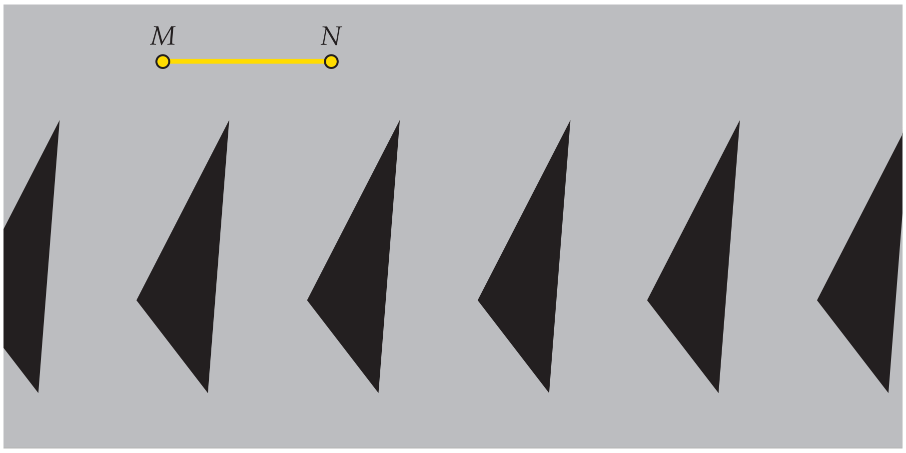

Figura 3

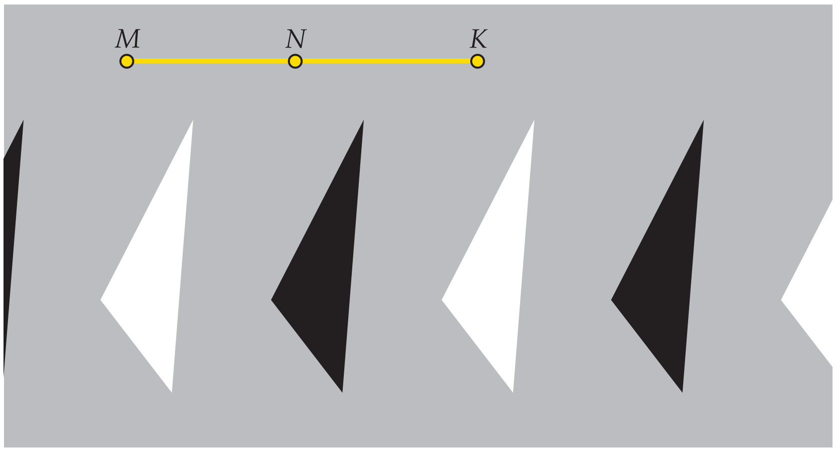

Figura 4

isto é, uma das duas cores. Assim, dado o conjunto C das cores — neste caso com dois elementos, preto e branco —, uma *figura colorida* $\mathcal{F}$ não é mais do que, um par (F, Γ) formado por uma figura F e uma aplicação Γ de F em C. O crucial é compreender como se define igualdade de duas figuras coloridas — que não pode ser, obviamente, o mesmo que a anterior igualdade de duas figuras, quando as figuras eram simples conjuntos de pontos... Consideremos então duas figuras coloridas $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$, ou seja dois pares $\mathcal{F}_1 = (F_1, \Gamma_1)$ e $\mathcal{F}_2 = (F_2, \Gamma_2)$. As figuras $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ *são iguais quando os pares são iguais!* E isso quer dizer que $F_1 = F_2$ e que $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Ou seja, existe uma isometria do plano $\mathbf{S}$ que transforma F_1 em F_2, e para cada ponto $P' = \mathbf{S}(P)$ de F_2, $\Gamma_2(P') = \Gamma_1(P)$. Ou seja. em linguagem simples, pontos correspondentes em F_1 e F_2 (pela isometria $\mathbf{S}$) têm a mesma cor. Assim, *duas figuras coloridas são iguais* quando são iguais geometricamente (existência da isometria $\mathbf{S}$) e quando pontos correspondentes pela isometria $\mathbf{S}$ têm a mesma cor. E não voltaremos à linguagem formal a não ser que sintamos que podemos estar a escamotear alguma incorrecção com a nossa linguagem abusiva...

Frisos coloridos

Vamos estudar alguns exemplos de frisos coloridos para compreender as implicações que pode ter a cor no estudo da simetria. Mantemo-nos ainda num plano em que os pontos que queremos distinguir do fundo cinzento podem ter duas cores, preto ou branco. Consideremos a figura 3.

Embora existam duas cores disponíveis, apenas foi usada uma cor — o preto —, além do fundo cinzento do plano. Assim, esta figura estuda-se como se fosse *não colorida*. Vemos que a translação de segmento orientado MN é uma simetria da figura, tal como todas as suas potências inteiras. Portanto, trata-se de um friso[2].

Poderíamos ainda, prosseguindo a nossa análise, concluir que não existem outras simetrias (sejam de rotação, de reflexão ou de reflexão deslizante) neste friso, pelo que é do tipo *p111*. Portanto, os pontos da figura podiam ser todos pretos ou *todos de uma outra cor qualquer*, que as conclusões na geometria sem cores seriam sempre as mesmas.

Mas consideremos agora a possibilidade de colorir os pontos da figura com as duas cores, preto e branco, e imaginemos a figura 4.

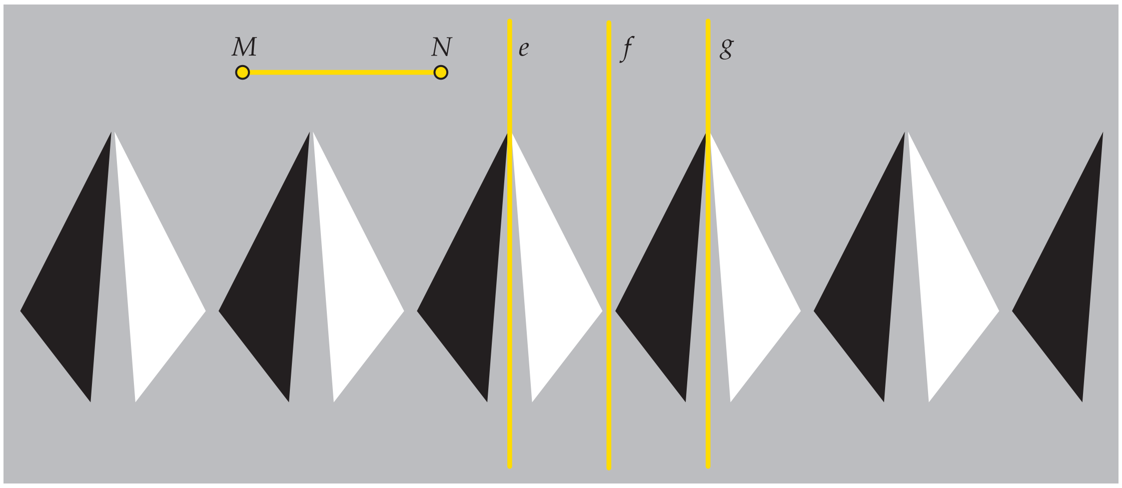

Figura 5

Neste caso, como devemos reinterpretar a frase «*sendo por definição uma simetria da figura F qualquer isometria **T** do plano que a deixe invariante*»? Se temos mais do que uma cor para os pontos que formam a figura, a palavra *invariante* tem que ser explicitada: invariante em relação à posição dos pontos — ou seja, à *forma* da figura — e *também em relação às cores dos pontos*, o que significa que para ser simetria de uma figura colorida, uma isometria do plano tem que *preservar as cores*. Voltando por uns momentos a uma linguagem formal, podemos dizer que, no estudo do friso $\mathcal{F}$ da figura 4 — que é uma figura colorida e portanto formalmente um par (F, Γ) — *simetria colorida de* $\mathcal{F}$ é qualquer isometria **S** do plano que verifique as seguintes condições:

- $\mathbf{S}(F) = F$, em que os pontos de F são considerados todos da mesma cor;
- Qualquer que seja o ponto P de F, $\Gamma(\mathbf{S}(P)) = \Gamma(P)$, ou seja, as cores são preservadas por **S**.[4]

Note-se que a translação definida pelo segmento orientado MN — que era uma simetria do friso da figura 3 — ***não é*** uma simetria do novo friso com duas cores, pois por exemplo o primeiro triângulo da esquerda, preto, é transformado num triângulo branco — e assim, essa translação não preserva as cores! Mas, dada o facto da cor ser repetida de dois em dois triângulos, a translação definida pelo segmento orientado MK (comprimento igual ao dobro do comprimento de MN) é uma simetria do friso colorido, pois preserva as cores.

Acompanhe-nos agora o leitor na análise do friso colorido da figura 5.

Não é difícil concluir que a translação definida pelo segmento orientado MN é uma simetria (colorida) deste friso, pois não só preserva a forma como preserva as cores. E este friso colorido não tem mais simetrias... Mas *se não ligássemos às cores*, ou seja se imaginássemos este friso apenas formado por pontos de uma só cor, então ele admitiria outras simetrias — infinitas simetrias de reflexão vertical, de que apresentamos três eixos e, f e g. como exemplos. Assim, vemos que, perante uma figura colorida, de que naturalmente investigamos as simetrias (coloridas), se por qualquer razão decidimos não ligar às cores, o número e tipo das suas simetrias pode naturalmente aumentar.

Observações finais

1. Se o conceito de simetria colorida for bem entendido, o estudo das simetrias das figuras coloridas da arte decorativo é idêntico ao que é feito para as figuras a uma só cor. A extensão para um número de cores maior do que dois não tem dificuldades do ponto de vista conceptual, embora evidentemente a pesquisa das simetrias se possa tornar mais complexa. Visite o *site* da *Associação Atractor* e utilize o DVD *Simetria*, produzido pela Atractor.

2. Do ponto de vista do ensino, o Grupo de Trabalho de Geometria entende que nos primeiros anos, em que os alunos estão a dar os primeiros passos em geometria, a introdução do conceito de simetria e o seu estudo no caso das figuras da arte decorativa — rosáceas, frisos e padrões — torna-se mais claro e produtivo se os exemplos se limitarem a figuras com apenas uma cor. Uma transição para o estudo de figuras coloridas poderá ser feito mais tarde, quando o professor entenda conveniente.

3. Um estudo muito completo sobre a simetria na arte decorativa, com figuras a uma e mais cores, pode encontrar-se no livro *Symmetries of Culture: Theory and Practice of Plane Pattern Analysis* (ver bibliografia), Neste livro são apresentados fluxogramas completos para a classificação de figuras coloridas da arte decorativa.

4. Outras referências importantes são os livros de Maria Dedò e de Conway, referidos na bibliografia.

Notas

[1] O autor escreve segundo a ortografia anterior ao Acordo Ortográfico.

[2] O facto desta nota estar a ser escrita para a revista *E&M*, que admite apenas uma cor além do preto e branco do texto e do fundo, impõe limitações no uso das cores das figuras. Vamos adoptar para as duas cores disponíveis o preto e o branco, e supor que a cor de fundo do plano é um cinzento médio. Desta forma, ficamos ainda com uma *spot color* para outras indicações nas figuras,.

[3] Para o estudo das simetrias de figuras não coloridas, veja por exemplo o livro *Simetria e Transformações Geométricas*.

[4] Esta abordagem formal da simetria de figuras coloridas é inspirada num texto existente no *site* da *Associação Atractor* (http://www.atractor.pt). Neste site, e também no DVD *Simetria*, produzido pela mesma associação, são estudadas, com todo o desenvolvimento, as simetrias das figuras coloridas da arte decorativa.

Bibliografia

Bastos, Rita. *Sobre Simetria*. In *Notas sobre o Ensino da Geometria*, **Educação e Matemática**, n.° 88, Maio/Junho 2006.

Conway, John H., Heidi Burgiel e Chaim Goodman-Straus. *The symmetry of things*. Wellesley: A. K. Peters, Ltd., 2008.

Dedò, Maria. *Forme: simmetria e topologia*. Padova: Decibel Editrice, 1999.

Veloso, Eduardo. Simetria e Transformações Geométricas. *Textos para professores*, GTG. APM: 2012.

Washburn, Dorothy K. e Crowe, Donald W. *Symmetries of Culture: Theory and Practice of Plane Pattern Analysis*. Seattle: University of Washington Press, 1988.

Eduardo Veloso

No próximo dia 31 de maio realizar-se-á o IV Dia do Geogebra Portugal. O encontro decorrerá na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico do Porto e conta com os apoios daquele instituto, do Centro de Investigação e Inovação em Educação da ESE/IPPorto e do Instituto Geogebra Portugal.

Sob o lema *Para além de Euclides*, esta iniciativa procurará:

- Dar a conhecer novas potencialidades do GeoGebra;
- Apresentar o GeoGebra como instrumento facilitador no ensino e na aprendizagem;
- Mostrar recursos elaborados com o apoio do GeoGebra;
- Facilitar espaços para compartir experiências sobre o uso deste programa em contexto de educação e investigação matemática;
- Fomentar a criação de grupos de trabalho de professores interessados na elaboração de recursos com o GeoGebra.

O encontro contemplará conferências plenárias, comunicações, apresentações breves e *posters*. À semelhança do ano passado, Markus Hohenwarter, o autor do Geogebra, fará uma conferência via *skype*.

As inscrições decorrem até 30 de abril, assim como a receção de propostas para comunicações e *posters*.

Mais informações em: ‹http://www.geogebra.org.pt/index.php/component/content/article/1-noticias-recentes/240-iv-dia-geogebra-portugal-para-alem-de-euclides-31-de-maio-de-2014›