

Pontos e planos, sempre no espaço

Temos quatro pontos no espaço, não coplanares.

Quantos planos existem que sejam equidistantes dos quatro pontos?

(Respostas até 15 de julho para zepaulo46@gmail.com)

O LOSANGO DE VASARELY

O problema proposto no número 125 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Muitas das obras do pintor húngaro-francês Victor Vasarely (1906-1997), um dos fundadores da op art, baseiam-se em figuras e transformações geométricas.

No estudo de um dos seus quadros, unem-se dois vértices de um quadrado com os pontos médios dos lados opostos, dando origem a um losango central, tal como se vê na figura 1.

Que relação há entre as áreas do losango e do quadrado inicial?

Recebemos respostas de Alberto Canelas (Queluz), Ana Luísa Correia, Catarina Ferreira (Viseu), Francisco de Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Hugo Silva, João Barata (Castelo Branco), João Pereira (São Martinho do Porto), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).

Apesar de as respostas serem apenas nove, apareceram seis (sim, seis) processos de resolução, que foram desde a simples utilização de um programa de geometria dinâmica (pela Graça) até à artilharia pesada da geometria analítica (pelo Hugo), passando por um elaborado método de semelhança de triângulos (também da Graça). Vejamos os outros três.

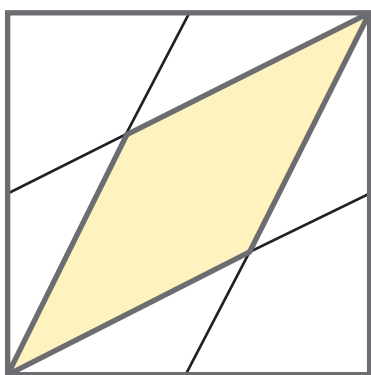


Figura 1

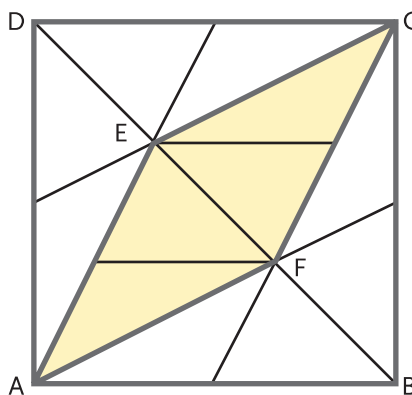


Figura 2

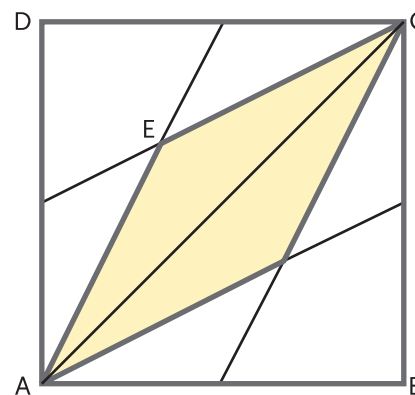


Figura 3

MÉTODO DA PARTIÇÃO (ALBERTO, FRANCISCO E PEDROSA)

Tracemos a diagonal DB e, por E e F, paralelas ao lado AB (ver figura 2).

O quadrado inicial fica dividido em doze triângulos que, facilmente se demonstra, têm áreas iguais. Como o losango é formado por quatro desses triângulos, a sua área é um terço da área do quadrado.

MÉTODO DO BARICENTRO (ANA LUÍSA E JOÃO PEREIRA)

O baricentro de um triângulo tem a propriedade de o dividir em três triângulos com a mesma área. O ponto E (ver figura 3) é o baricentro do triângulo ACD. Então, a área do $\triangle ACE$ é um terço da área do $\triangle ACD$. Logo, a área de metade do losango é um terço da área de metade do quadrado pelo que a área do losango é um terço da área do quadrado.

CÁLCULO DIRETO DA ÁREA (CATARINA E JOÃO BARATA)

Seja L o comprimento do lado do quadrado.

A diagonal maior do losango é $D = \sqrt{2} \cdot L$

A diagonal menor é um terço da maior: $d = \frac{\sqrt{2} \cdot L}{3}$

A área de um losango é $\frac{1}{2} D \cdot d = \frac{1}{2} \sqrt{2} \cdot L \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot L}{3} = \frac{L^2}{3}$

Logo, a área do losango é um terço da área do quadrado.