As tarefas de exploração e investigação na aprendizagem da Geometria

Maria Gorete Pires Branco

A Geometria é uma área da Matemática que proporciona um meio de descrição, análise e compreensão do mundo e da sua beleza visual (*National Council of Teachers of Mathematics* [NCTM], 2007). Ela trata de formas, das suas propriedades e das suas relações e, por isso, ao olharmos à nossa volta rapidamente nos apercebemos de que na «Natureza são produzidas e reproduzidas determinadas formas e que, além disso, a Natureza prefere certas formas em relação a outras também possíveis» (Loureiro, Oliveira, Ralha & Bastos, 1997, p. 14).

Ela é por excelência um tema formativo, que permite ao aluno trabalhar simultaneamente com números, calculando ou relacionando áreas e volumes, trabalhar com proporções na semelhança de figuras ou trabalhar com expressões algébricas. A sua aprendizagem, através da resolução de problemas não rotineiros, pode propiciar o desenvolvimento de múltiplas capacidades, apontadas como fundamentais para qualquer pessoa e, em particular, para todos os alunos, sendo a mais óbvia a visualização espacial (Afonso, 2002; Hoffer, 1981; Junqueira, 1995). Para isso é relevante que o professor proponha aos alunos tarefas adequadas, como as tarefas de natureza exploratória e investigativa e as de construção e manipulação. E a Geometria fazendo apelo à intuição e à visualização e recorrendo à manipulação de materiais é, dentro da Matemática escolar, uma área propícia a um ensino baseado fortemente na realização de tarefas de exploração e investigação (Abrantes, 1999), que podem ser desenvolvidas na sala de aula, sem a necessidade de um grande número de pré-requisitos. Evitando, sem grande dificuldade, uma visão da matemática centrada na resolução de exercícios e problemas de rotina.

As tarefas de natureza exploratória e investigativa representam boas oportunidades para pôr os alunos a debater questões, a expor os seus raciocínios, a estabelecer conjeturas e a usar e aplicar a matemática. O trabalho com este tipo de tarefas, ao estimular a participação dos alunos favorecendo uma aprendizagem significativa, e ao proporcionar pontos de partida diferentes facilitando o envolvimento dos alunos com diferentes níveis de competências e o reconhecimento e/ou estabelecimento de conexões, apresenta importantes potencialidades educacionais (Santos, Brocardo, Pires & Rosendo, 2002).

As investigações matemáticas como atividades de ensino-aprendizagem ajudam a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína. O aluno formula questões, estabelece conjeturas, realiza provas e refutações, justifica e apresenta resultados, argumenta e discute com os colegas e com o professor. Em particular, a exploração de investigações geométricas, «pode também contribuir para concretizar a relação entre situações da realidade e situações matemáticas, desenvolver capacidades, tais como a visualização espacial e o uso de diferentes formas de representação» (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003, p. 71).

Ao realizar uma investigação matemática é importante começar por uma exploração inicial que permita clarificar a questão ou situação proposta e colocar questões interes-

Tarefa

Poliedros Regulares

Com polígonos regulares congruentes podem-se construir poliedros regulares.
Utilizando *polidrons*, investiguem quantos poliedros regulares convexos é possível construir. Encontrem explicações para a vossa resposta.
Estabeleçam, para cada um, as principais características.

Sugestão: À medida que vão construindo os poliedros registem numa tabela as principais características.

santes e produtivas sobre as quais se vai trabalhar. Depois é fundamental analisar alguns dados e formular conjeturas. O teste e a recolha de mais dados podem refinar essas conjeturas ou levar a que sejam refutadas e a olhar a questão de outra forma, formulando novas conjeturas. Passando a fase do teste há que provar a sua veracidade. Durante este processo novas questões para investigar podem surgir. A exploração de investigações é, assim, um trabalho exigente que envolve processos de raciocínio complexos, que requerem um elevado grau de empenhamento e criatividade por parte dos alunos (Ponte & Matos, 1996). Os alunos quando estão pouco familiarizados com este tipo de tarefas revelam dificuldades em entender alguns dos processos inerentes à atividade investigativa, contudo a realização continuada deste tipo de atividade contribui para um entendimento progressivo destes processos, sendo a formulação de questões, aquele a que os alunos dão menor importância.

A seguir descrevem-se alguns episódios de uma aula para ilustrar estas ideias, na qual a autora desempenhou o papel de observadora participante ativa, no âmbito de uma investigação com uma turma de alunos do 10.° ano de escolaridade.

A tarefa de investigação proposta «Poliedros regulares», trabalhada no âmbito do módulo inicial do programa do 10.° ano, tinha como objetivo que os alunos investigassem quantos poliedros regulares convexos é possível construir e estabelecessem as principais características para cada um deles.

Os alunos trabalharam em grupos de três elementos e esta era a terceira tarefa de natureza exploratória e investigativa que realizavam. A aula seguiu a estrutura, que geralmente envolve uma aula com tarefas de exploração e investigação (Christiansen & Walther, 1986; Ponte *et al.*, 2003): (i) introdução da tarefa; (ii) Desenvolvimento da tarefa (iii) Discussão de resultados.

Introdução da tarefa

O enunciado da tarefa foi entregue aos alunos por escrito e lido em voz alta pela professora que paralelamente foi colocando algumas questões, procurando que os alunos recordassem a noção de poliedro regular. Foram distribuídas várias peças de polidron (triângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos regulares) pelos grupos.

Desenvolvimento da tarefa

Os alunos começaram logo por tentar construir poliedros, uns optaram por trabalhar com triângulos equiláteros, outros com quadrados. Rapidamente construíram o tetraedro e outros o cubo. O entusiasmo e o prazer visível em usar as peças para construir os poliedros levaram alguns grupos a não definirem estratégias de exploração e ao esquecimento do registo das características dos poliedros que iam construindo. A maioria dos grupos seguiu a sugestão dada no enunciado da tarefa de organizar e registar as características dos poliedros numa tabela. Todos os grupos apontaram o número de vértices, arestas e faces e o tipo de face do poliedro. Alguns acrescentaram o número de faces que concorria em cada vértice do poliedro e as amplitudes dos ângulos internos dessas faces.

Apesar de ter sido recordada a noção de poliedro regular, alguns grupos estavam a considerar poliedros que não eram regulares e não se apercebiam desse facto, pois não tinham procurado clarificar o foco da investigação. Contudo, outros grupos procuraram relacionar as observações iniciais com o objetivo da investigação, como se pode verificar, por exemplo, pelo diálogo seguinte:

Matilde — O cubo é regular. Interessa.

Diana — Vou construir o paralelepípedo. Não temos peças.

Matilde — Coloca assim dois quadrados para um lado. Podemos escolher as cores.

Francisca — Este parece um prédio, parece aquele jogo.

Concluímos que a conjetura apresentada em cima acerca dos dodecaedros não é válida.

Chegámos a esta conclusão porque ao construirmos uma figura em que no mesmo vértice concorressem 4 pentágonos regulares, não era possível concretizar. A conjetura anterior errada deve-se ao facto de termos colocado os ângulos externos do pentágono enquanto que o que queríamos saber eram os ângulos inscritos.

Pensando sobre o problema descobrimos que o ângulo interno é de 108°, então:

$108 \times 3 = 324° < 360°$ (é possível construir)

$108 \times 4 = 432° > 360°$ (não é possível construir)

Figura 1. Justificação apresentada pelo grupo para a refutação da conjetura.[1]

Matilde — Não podemos construir um paralelepípedo, porque temos que investigar os poliedros regulares.

A formulação de questões a investigar foi uma fase da atividade investigativa a que os alunos não deram grande importância. Em geral, usavam o modo afirmativo em vez do interrogativo, proferiam afirmações, como por exemplo: «Com triângulos ainda dá para vermos mais». Embora durante a realização da tarefa tenham formulado uma ou outra questão de forma mais precisa, por exemplo, quando procuravam estudar as características do cubo: «Quando as diagonais [espaciais do cubo] se cruzam também dará 90°?» nunca as registaram.

A formulação e o teste de conjeturas foram processos que estiveram presentes no trabalho dos alunos. Formularam várias conjeturas, algumas das quais irrelevantes para a investigação e outras triviais como: «Algumas das faces do cubo são perpendiculares e outras paralelas». Contudo, também formularam conjeturas relevantes para a investigação, por exemplo: «Podem concorrer no mesmo vértice 4 pentágonos». Esta conjetura foi formulada com base no cálculo da soma das amplitudes dos ângulos das faces que podiam concorrer num vértice do poliedro. Estes alunos calcularam a amplitude de um ângulo interno de um pentágono regular utilizando o mesmo procedimento para o cálculo de um ângulo externo, tendo obtido 72°, que multiplicado por 4 dá 288°, portanto inferior a 360°. Ao testarem a conjetura, os alunos verificaram que não era possível construir poliedros regulares concorrendo quatro pentágonos em cada vértice, porque «não há espaço para a quarta peça, sobrepõem-se». Então refutaram a conjetura e preocuparam-se em tentar perceber o porquê destes resultados. Um dos alunos do grupo desconfiou do valor obtido para a amplitude do ângulo interno do pentágono regular e, em conjunto, procuraram encontrar o erro. Os alunos registaram o argumento que os levou a refutar a conjetura, como se pode observar na figura 1.

Num outro grupo, os alunos depois de terem construído o tetraedro realizaram mais experiências na tentativa de obter mais poliedros regulares formados por triângulos equiláteros, mas não conseguiam. Então conjeturaram que com triângulos equiláteros não dava para construir mais poliedros regulares para além do tetraedro. A professora incentivou-os a continuar a experimentar e passado algum tempo já tinham o octaedro construído. Entretanto, Pedro diz: «Não dá com 5 [triângulos]», Nelson não concordou, «mas ainda dá com 300°». Os alunos continuaram a exploração e formularam uma nova conjetura: «Com 6 faces [triangulares] já não dá para construir poliedros regulares».

Os alunos nesta tarefa, e uma vez que já tinham realizado duas tarefas de natureza exploratória e investigativa, evidenciaram maior preocupação com a justificação das suas conjeturas, embora tenha sido necessário insistir para que procurassem argumentos válidos. Como mostra o episódio seguinte, em que um dos grupos procura argumentos para justificar a conjetura de que com quadrados só dá para construir o cubo:

Matilde — Nós já tínhamos visto que podíamos ter duas peças aqui, duas ali, ali, sempre duas, ia dar um poliedro regular, mas era uma ampliação deste [do cubo].

Diana — Pois tendo sempre o mesmo número de quadrados, temos na mesma um cubo, se pusermos de outra maneira dá um paralelepípedo e já não é regular.

Francisca — Aqui [no cubo] em cada vértice concorrem 3 [faces].

Ao concorrer 4 faces num vértice não podemos formar um poliedro porque 90 × 4 = 360 que dá uma figura plana.

Não podemos construir poliedros com hexágonos porque cada ângulo interno tem 120 e ao tentarmos pôr 3 faces num vértice obtemos 360° ou seja uma figura plana.

Nas figuras a partir do pentágno não se consegue construir um poliedro, pois o mínimo de faces a concorrer num vértice é 3, com 4 existe sobreposição de pentágonos logo 108 × 4 = 432°.

No heptágono cada ângulo inscrito tem 128 logo ao tentar concorrer 3 faces num vértice dá 385° que dá superior a 360° logo existe sobreposição de heptágonos.

Figura 2. Justificações apresentadas por um grupo para algumas conjeturas.[2]

Matilde — Para ser regular tem que ser sempre o mesmo número [de faces] a concorrer em cada vértice. E se concorrerem 4?
Diana — Não dá, olha, não faz vértice.
Matilde — Então é essa a justificação.

A professora estava próxima do grupo e questionou as alunas: «O que significa não fazer vértice?» Diana disse: «Não dá assim para dobrar». A professora sugeriu que procurassem razões para não permitir a dobragem, mas as alunas ficaram em silêncio, então a professora avançou uma pista «há pouco disseram que a amplitude dos ângulos internos de cada quadrado era de 90°, pensem se esse dado poderá ajudar para encontrarem justificações válidas». As alunas tinham sobre o plano da mesa a figura plana que haviam construído e rapidamente chamaram a professora para lhe comunicar a justificação que tinham encontrado:

Matilde — Stôra, aqui à volta do ângulo [no qual concorrem as 4 faces], dá 360°, por isso é que não dá para dobrar, não é? Diga-nos se está bem.
Professora — São vocês que têm que decidir se está bem.
Francisca — Sim, mas oh stôra, eu acho que se der menos de 360° dá, com 360° não.
Professora — Pronto, então discutam as três para poderem decidir.

As alunas mostravam pouca confiança em si próprias. Depois de alguma discussão decidiram escrever: «Se concorrerem num vértice mais de 3 faces a soma dos ângulos que concorrem nesse vértice irá ser de 360°, o que não permite a dobragem. Forma-se uma figura plana». Não contemplando, porém na sua justificação casos em que concorrem mais de quatro faces em cada vértice, apesar de terem referido «mais de 3 faces». Para as restantes conjeturas formuladas em torno dos restantes poliedros regulares, as alunas continuaram a apresentar justificações baseadas em raciocínio aritmético.

Os alunos de outros grupos também se preocuparam em justificar as suas conjeturas, como se pode observar, por exemplo, na figura 2.

Os alunos justificaram que com quatro quadrados a concorrer num vértice não é possível construir poliedros regulares por se obter uma figura plana e o mesmo acontece com três faces hexagonais regulares quando estas concorrem num vértice. Nestas justificações estão subjacentes as condições de que para se poder construir um poliedro regular têm que concorrer no mínimo três faces num vértice e a soma das amplitudes dos ângulos das faces que concorrem num vértice tem que ser inferir a 360°. Os alunos apresentam assim, justificações baseadas em raciocínio aritmético e na observação das construções feitas com auxílio das peças de *polidron*. Parece terem começado a entender o *estatuto* de uma conjetura. Para tal terá contribuído o trabalho realizado, em tarefas anteriores, em torno da importância da justificação e prova das conjeturas.

Discussão de resultados

À medida que se iam discutindo os resultados, um aluno ia registando as conclusões no quadro. O número de poliedros regulares encontrados e algumas das suas características, como o número de faces, vértices e arestas, tipo de face do sólido e número de faces que concorrem em cada vértice do poliedro não geraram muita discussão. Verificou-se alguma discordância relativamente à contagem do número

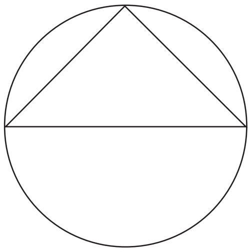

Figura 3. Desenho feito por Cátia (reproduzido do original).

de vértices e de arestas, mas depressa se chegou a consenso. Por vezes, alguns alunos questionavam os outros e pediam explicações sobre determinadas características que eles tinham estabelecido e que os colegas não referiam, como por exemplo, a soma das amplitudes dos ângulos que concorriam em cada vértice do tetraedro, como se pode observar no episódio seguinte:

Lúcia — E os ângulos? Não disseste nada.
Fábio — Ah, dá 180°.
Joaquim — Eu concordo, mas porque dá 180, tens que explicar.
Fábio — O de cada triângulo é 60 e temos 3 [triângulos], é vezes 3, que dá os 180°.

As alunas de um dos grupos apresentaram algumas conjeturas que tinham formulado e que lhes pareceram ser importantes, por exemplo, conjeturaram que a «altura do tetraedro é perpendicular à base no baricentro da mesma». A justificação apresentada baseava-se em raciocínio geométrico e apoiava-se no critério de perpendicularidade entre retas e planos. A comunicação desta conjetura e a respetiva justificação por parte das alunas gerou discussão em torno de conceitos, como altura, baricentro, circuncentro e ortocentro de um triângulo. Verificou-se que muitos alunos não tinham noções claras destes conceitos, como se pode observar no episódio seguinte:

Leonel — O circuncentro tem a ver com o triângulo?
Carlos — O circuncentro é o centro da circunferência.
(...)
Cátia — Temos que ter os vértices do triângulo a tocar na circunferência.
Professora — Queres vir aqui [ao quadro] explicar?
(A Cátia foi ao quadro e desenhou a figura 3).
Carlos — O que ela vai fazer é a altura do triângulo que é igual ao raio da circunferência.
Francisca — Achas que sim? Pode não ser.
Carlos — Pelo menos parece. Ela agora pode traçar a altura e ver o centro.
Cátia — Não ia traçar a altura.
Carlos — Mas, se traçares a altura vai dar no meio da base do triângulo que é o centro.
Cátia — O que eu queria dizer é que, o circuncentro vai ser o ponto de interseção dos segmentos que traçamos aqui neste ponto, neste e neste [pontos médios dos três lados do triângulo].
Professora — Segmentos? A que segmentos te estás a referir?
Cátia — Às medianas, não, mediatrizes.

O que Carlos pretendia explicar aos colegas é que o circuncentro do triângulo era o centro da circunferência circunscrita, só que ele baseou-se na evidência do desenho, considerando o triângulo isósceles tendo por base o diâmetro da circunferência. Esta discussão continuou, a professora pediu a contribuição dos restantes alunos, foi esclarecida a noção de segmento de reta, medianas e mediatrizes e foi retomada a ideia de Carlos no sentido de levar os alunos a compreenderem que os desenhos não representam necessariamente toda a informação que é conhecida sobre os objetos geométricos. A ideia de Carlos foi também aproveitada para serem discutidas as noções de altura e de ortocentro de um triângulo. Apesar da conjetura que levou a esta discussão ser irrelevante para a investigação, contribuiu para que fossem relembrados e até aprendidos novos conceitos, como por exemplo o conceito de ortocentro de um triângulo, que os alunos mencionaram desconhecer.

A concluir

Apesar de os alunos na realização desta tarefa não terem atribuído muita importância à formulação de questões a investigar, em geral, usaram o modo afirmativo em vez do interrogativo, alguns grupos procuraram relacionar as observações iniciais com foco na investigação. O processo de formulação de conjeturas esteve presente no trabalho de todos os grupos, embora algumas tenham sido formuladas de forma implícita. Alguns alunos revelaram alguma tendência para apresentar o máximo de conjeturas possível, independentemente da trivialidade ou relevância para a investigação. Esta tendência parecia estar relacionada, por um lado com alguma dificuldade e um certo descuido em relacionar essas conjeturas com o foco da investigação e por outro lado, por considerarem importante mostrar muito trabalho feito. Os alunos formularam as suas conjeturas com base no processo de especialização e testaram-nas através da realização de mais experiências particulares com as peças de *polidron*. A realização do teste permitiu aos alunos refinar e reformular algumas conjeturas e refutar outras. Verificou-se que a utilização de materiais manipuláveis facilitou a formulação e o teste de conjeturas.

Os alunos na realização desta tarefa já demonstraram entender a justificação das conjeturas como um aspeto inerente à atividade investigativa, começaram a entender o estatuto de uma conjetura e manifestaram preocupação em apresentar alguns argumentos para as validar, embora ainda tenha sido necessário incentivá-los a procurar argumentos lógicos ou pelo menos plausíveis.

A discussão e apresentação do trabalho desenvolvido pelos alunos é uma fase fundamental do trabalho de investigação, por isso carece de atenção por parte do professor. Este momento é propício para desafiar e incentivar os alunos a aprofundar a investigação, a refletir sobre o trabalho realizado, a criticar e questionar as ideias dos outros, a apresentar argumentos que convençam os colegas e também o professor. E pode ser também um momento oportuno para relembrar e mesmo aprender novos conceitos. Por isso é importante que o professor se aproprie da tarefa para que se sinta à vontade para moderar a discussão em torno das descobertas realizadas pelos alunos e de possíveis dificuldades que possam surgir que, por vezes, não são previsíveis.

Notas

[1], [2] Transcrito do original, foram corrigidos erros ortográficos, mas mantida a construção frásica.

[3] Para mais detalhes desta aula consultar Branco (2011).

[4] Tarefa adaptada de Guillén (1991). Transcrito do original, foram corrigidos erros ortográficos, mas mantida a construção frásica.

Referências

Abrantes, P. (1999). Investigações em Geometria na sala de aula. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Orgs.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 153–167). Lisboa: Projeto MPT e APM.

Afonso, C. (2002). *As fases de aprendizagem do modelo de van Hiele: Uma experiência no ensino da Geometria com futuros professores do 1.º ciclo*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Braga.

Branco, M. G. P. (2011). *Tarefas de exploração e investigação no ensino e na aprendizagem da Geometria: Uma experiência com alunos do 10.º ano de escolaridade*. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga. (Disponível em http://repositorium.sdum.uminho.pt).

Christiansen, B. & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243–307). Dordrecht: D. Reidel.

Guillén, S. G. (1991). *El mundo de los poliedros*. Madrid: Editorial Sintesis.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher*, *74*, 11–18.

Loureiro, C., Oliveira, A., Ralha, E. & Bastos, R. (1997). *Geometria: Matemática — 10.º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação e Departamento do Ensino Secundário.

NCTM (2007). *Princípios e normas profissionais para a Matemática escolar*. Lisboa: APM e Instituto de Inovação Educacional. (Original em inglês publicado em 2000).

Ponte, J. P., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Ponte, J. P. & Matos, J. F. (1996). Processos cognitivos e interações sociais nas investigações matemáticas. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 119–138). Lisboa: Projeto MPT e APM.

Santos, L., Brocardo, J., Pires, M. & Rosendo, A. I. (2002). Investigações matemáticas na aprendizagem do 2.º ciclo do ensino básico ao ensino superior. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. F. Dionísio (Orgs.), *Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação dos professores* (pp. 88–106). Lisboa: Secção de Educação Matemática da SPCE.

Maria Gorete Pires Branco

Escola Secundária de Caldas das Taipas, Braga, Portugal