A determinação do m.d.c. de dois números e a Subtracção recíproca / Algoritmo de Euclides

Florinda Costa, Manuela Ribeiro, Mª José Carinha Bóia

O conceito de divisibilidade era já dominado pelos pitagóricos[1] e este arrastava naturalmente a determinação dos divisores comuns de dois ou mais números e, em particular, a determinação do m.d.c. de dois números.

Vamos encontrar a resposta dada pelos pitagóricos a este último problema nas proposições 1 e 2 do Livro VII dos *Elementos de Euclides*[2]:

> Elementos VII, 1 — Dados dois números distintos, e subtraindo-se continuamente de cada vez o menor do maior, se o número que resta nunca medir o anterior até que reste uma unidade então os números originais são primos entre si.[3]

> Elementos VII, 2 — Dados dois números não primos entre si, encontrar a sua máxima medida comum.[3]

Como aplicar estas proposições à determinação do m.d.c., por exemplo, de 14 e 32?

1.	Partimos do par (14, 32) em que 14 é o menor.	14	32
2.	O menor 14 é subtraído ao maior 32. Substituímos o maior pela diferença e conservamos o menor.	14	18
3.	Voltamos a repetir o passo 2 subtraindo agora 14 a 18. Ficamos com o par (14, 4) em que agora 4 é o menor.	14	4
4.	O menor 4 é subtraído ao maior 14. Substituímos o maior pela diferença e conservamos o menor.	10	4
5.	Voltamos a repetir o passo 4 subtraíndo agora 4 a 10.	6	4
6.	E mais uma vez subtraíndo 4 a 6. Ficamos com o par (2, 4) em que agora 2 é o menor.	2	4
7.	O menor 2 é subtraído ao maior 4. Substituímos o maior pela diferença e conservamos o menor.	2	2

Chegamos então a dois números iguais. Esse número comum — 2 — é o m.d.c. dos dois números de que partimos 14 e 32.

Tal processo para a determinação do m.d.c. de dois números, conhecido como *Subtracção recíproca, antifairese ou antanairese* baseia-se na seguinte propriedade aritmética:

> «Dados dois números naturais m e n com $m > n$, os divisores comuns de m e n são exactamente os divisores comuns do menor dos números n e da sua diferença $m - n$.»

Assim os divisores comuns de 14 e 32, são os mesmos de 14 e 18, 14 e 4, 10 e 4, 6 e 4, 2 e 4, e, 2 e 2.

Ora 2 é o m.d.c. de 2 e 2, logo também é o m.d.c. de 2 e 4, de 6 e 4, ..., de 14 e 32.

Demonstremos a propriedade anterior:

$$m, n \in \mathbb{N} \text{ com } m > n$$

d é divisor comum de m e n $\Leftrightarrow$ d é divisor comum de n e m-n

1. d é divisor comum de m e n $\Rightarrow$ d é divisor comum de n e $m - n$.
   Se d é divisor comum de m e n existem números naturais p e q tais que $m = pd$ e $n = qd$.
   Como $m > n$, $p > q$, logo $p - q$ é também um número natural e $m - n = (p - q)d$, logo d é divisor de $m - n$.

Como d é também divisor de n, d é divisor comum de n e $m-n$.

2. d é divisor comum de n e $m-n \Rightarrow$ d é divisor comum de m e n.
   Se d é divisor comum de n e $m-n$ existem números naturais r e s tais que $n=rd$ e $m-n=sd$.
   $n+(m-n)=rd+sd$
   $m=(r+s)d$
   Ora $r+s$ é um número natural, logo d é divisor de m. Como d é também divisor de n, d é divisor comum de m e n.

Ao aplicarmos a *Subtracção recíproca* à determinação do m.d.c.(14, 32) encontrámos um processo finito e chegámos a dois números iguais. Será que tal situação se verifica sempre?

Partimos de dois números naturais m e n com $m>n$, mantemos o menor, n, e substituímos o maior, m, pela diferença $m-n$, logo por um número inferior. Vemos assim que a sequência dos maiores números de cada par é estritamente decrescente, logo finita. Assim ao fim de um número finito de passos, quando muito igual ao maior dos números, não é possível subtrair o menor do maior, ora tal facto só pode vir da igualdade dos dois números.

O processo anterior pode ser condensado em:

$$\begin{array}{r|l} 32 & 14 \\ \hline 4 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 14 & 4 \\ \hline 2 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

m.d.c.(14, 32) = 2 (último divisor)

Comparemos:

Subtracção recíproca		Processo condensado	
14	32	32	14
14	18	4	2
14	4		
Subtraímos duas vezes 14 a 32, e resta 4			
10	4	14	4
6	4	2	3
2	4		
Subtraímos três vezes 4 a 14, e resta 2			
2	2	4	2
0	2	0	2
Subtraímos duas vezes 2 a 4, e resta 0			

NB: Na Subtracção recíproca subtraímos 2 apenas uma vez a 4 mas ficámos com resto 2, logo podemos voltar a subtrair 2 até obtermos resto zero.

Os gregos não levavam o processo até ao fim, isto é, até ao par (0, 2) porque não tinham símbolo para o zero. Ficavam-se pelo par de números iguais (2, 2).

Este processo condensado da Subtracção recíproca é chamado *Algoritmo de Euclides*.

A Subtracção recíproca foi também usada por Teeteto[4] para determinar a máxima medida comum de duas quaisquer grandezas do mesmo tipo. Encontramos tal referência nas proposições 2 e 3 do Livro X dos *Elementos* de Euclides.

Elementos X, 2 — Se, quando a menor de duas grandezas desiguais é continuamente subtraída de cada vez da maior, e aquela que resta nunca medir a anterior, então as grandezas são incomensuráveis[5].

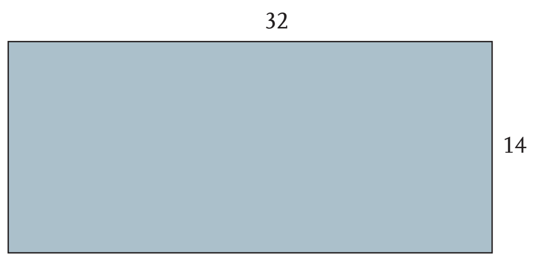
Elementos X, 3 — Dadas duas grandezas comensuráveis, encontrar a sua máxima medida comum[5].

Vemos assim que:

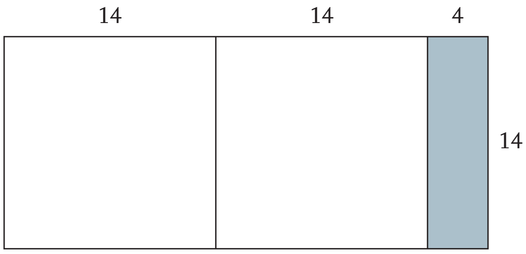
- Elementos VII, 1 e 2 permitem averiguar se dois números distintos são ou não primos entre si e, caso não sejam, determinar o m.d.c. dos dois números;
- Elementos X, 2 e 3 permitem averiguar se duas grandezas são ou não incomensuráveis e, caso não sejam, determinar a máxima medida comum das duas grandezas.

Estamos agora em condições de ilustrar geometricamente a Subtracção recíproca / Algoritmo de Euclides. Retomemos a determinação do m.d.c. (14, 32).

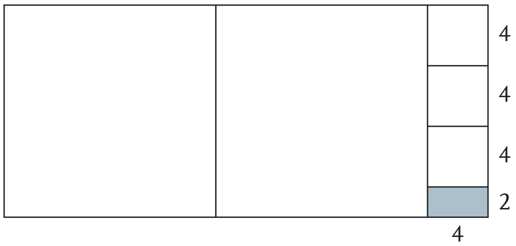
1. Partimos do par (14, 32). Construimos dois segmentos de recta de comprimentos 32 e 14 ou seja um rectângulo 32×14.



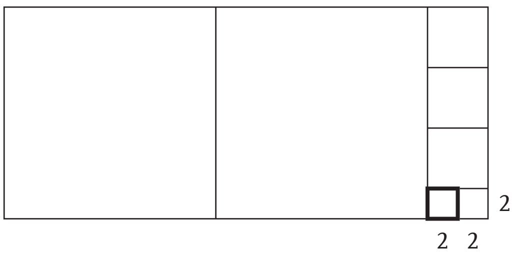
2. A 32 retiramos 14, o maior número possível de vezes — 2, e resta 4, ou ao rectângulo 32×14 retiramos o maior quadrado possível — 14×14, o maior número de vezes possível — 2, e resta um rectângulo 4×14.



3. A 14 retiramos 4, o maior número possível de vezes — 3, e resta 2, ou ao rectângulo 4×14 retiramos o maior quadrado possível — 4×4, o maior número de vezes possível — 3, e resta um rectângulo 4×2.



4. A 4 retiramos 2, o maior número possível de vezes — 2, e resta zero, ou ao rectângulo 4×2 retiramos o maior quadrado possível — 2×2, o maior número de vezes possível — 2, e acabamos de pavimentar o rectângulo inicial 32×14.



O lado deste último quadrado retirado — 2, é o m.d.c. (14, 32).

Notas

1. Pitágoras de Samos viveu na segunda metade do século VI a.C. e fixou-se em Crotona onde fundou uma espécie de confraria, a *escola pitagórica*.
2. Euclides de Alexandria escreveu os *Elementos* cerca do ano 300 a.C.
3. *Vide:* Sá, C. *et al.* (2000) (p. 277)
4. Teeteto nasceu perto de Atenas e viveu entre 417 e 369 a.C.
5. Tradução de: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html

Bibliografia e referências online

Sá, C. *et al.* (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta

Katz, V. J. (1998). *A History of Mathematics — An Introduction*. Columbia: Addison-Wesley Educational Publishers

http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html

http://www.atractor.pt/mat/mdcEuclides/Euclides/euclides.html

Nota: por opção das autoras, este artigo não obedece às regras do novo acordo ortográfico.

Florinda Costa
Manuela Ribeiro
Mª José Carinha Bóia

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Por sermos defensoras da implementação de uma metodologia que proporcione a todos os alunos oportunidades de vivência de diferentes tipos de experiências de aprendizagem, estamos a propor uma sequência de tarefas que favoreça a integração da história da matemática no seu ensino.

Concretamente, as tarefas enquadram-se no programa do 2.º ciclo no conteúdo dos divisores comuns de dois números e na determinação do máximo divisor comum.

A utilização dos processos designados por *Subtracção Recíproca* e *Algoritmo de Euclides*, que surgiram há cerca de 24 séculos, facilita a compreensão dos conceitos envolvidos e proporciona um conhecimento histórico dos mesmos.

Esta sequência de tarefas é apoiada pelo artigo *A determinação do m.d.c. de dois números e a Subtracção recíproca/Algoritmo de Euclides*.

Florinda Costa
Manuela Ribeiro
Maria José Carinha Bóia