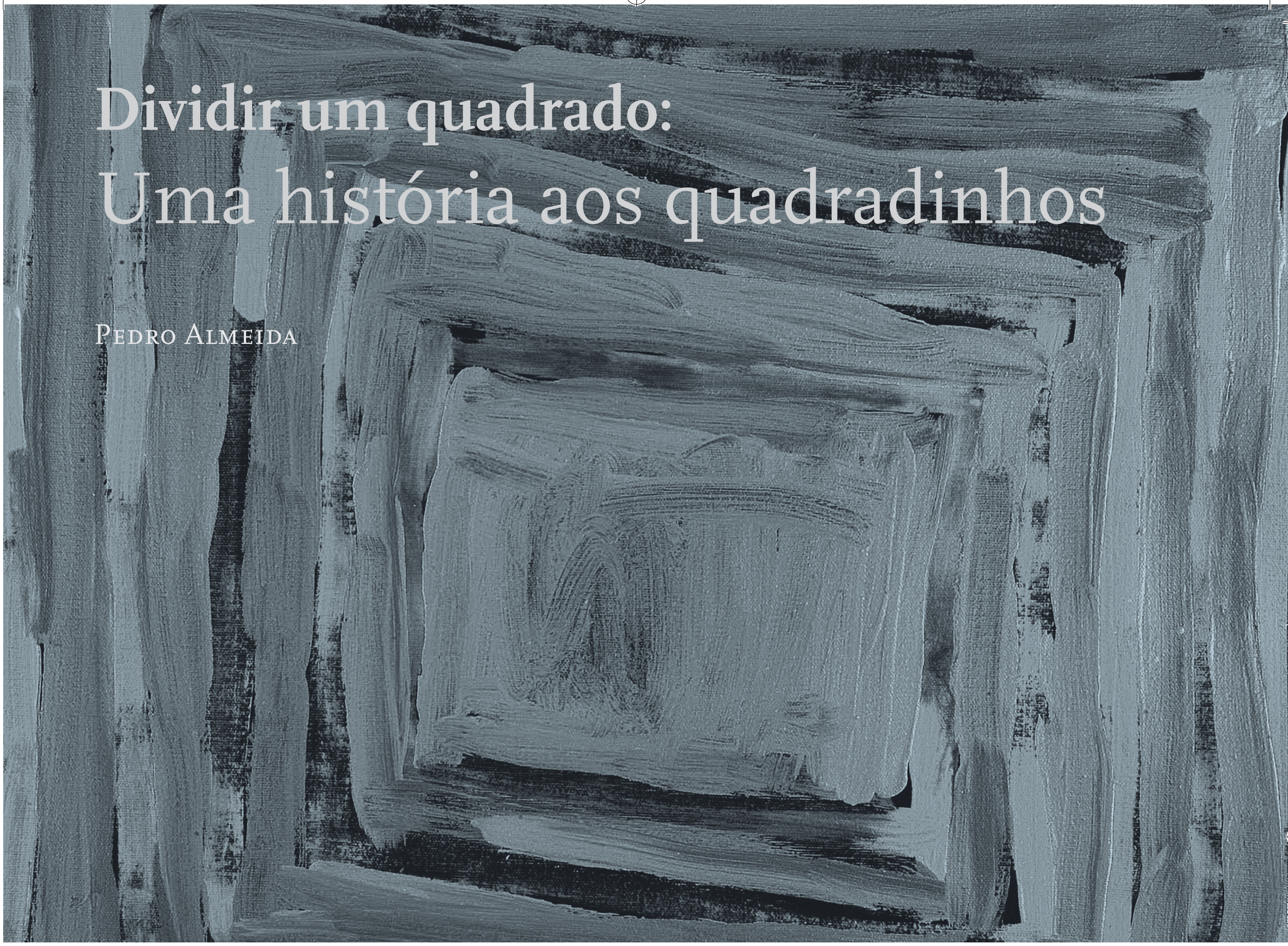
Dividir um quadrado:
Uma história aos quadradinhos

Pedro Almeida



Todos sabemos dobrar um quadrado de papel em partes iguais. E nessa dobragem reconhecemos usar preceitos de rigor geométrico. Na prática a aproximação ao rigor depende da habilidade do executante, porque em verdade ele só existe na nossa imaginação.

É fácil encontrar soluções de divisão por dobragem em duas, quatro, oito partes... uma sucessão de potências de 2, até onde o papel o permitir. Mas então e em 3, e em 5,...? Claro que a olho não vale, tem de haver alguma referência geométrica.

Insistiram comigo para que contasse umas descobertas acerca da divisão do quadrado em partes iguais. Para mim foi uma história de interrogações que se bifurcou várias vezes e tem ainda por onde crescer. Contá-la ao pormenor não cabe aqui, dizer simplesmente onde cheguei não tem qualquer interesse. Talvez um meio termo pudesse ser útil para nos questionarmos, mais uma vez, sobre os caminhos que percorremos quando queremos aprender.

A partir de agora vou referir-me sempre à divisão do quadrado (pode perfeitamente ser um outro retângulo). Claro que comecei pela divisão por dobragem de papel, mas cedo o processo se desmaterializou.

O interesse pela divisão em 3 e em 5 partes marinou durante anos até dar lugar à vontade de a procurar, numa esforçada «investigação», recorrendo à tentativa e erro. Se o recurso às diagonais ou às mediatrizes dos lados estava esgotado tinha de explorar outros segmentos.

A divisão em três partes (figura 1) foi a primeira a surgir por dobragem e verificada depois com recurso a um programa de geometria dinâmica.

Considerando,

— o quadrado ABCD[1],
— o ponto médio E do lado AB,
— o ponto de interseção F da diagonal AC com o segmento ED,

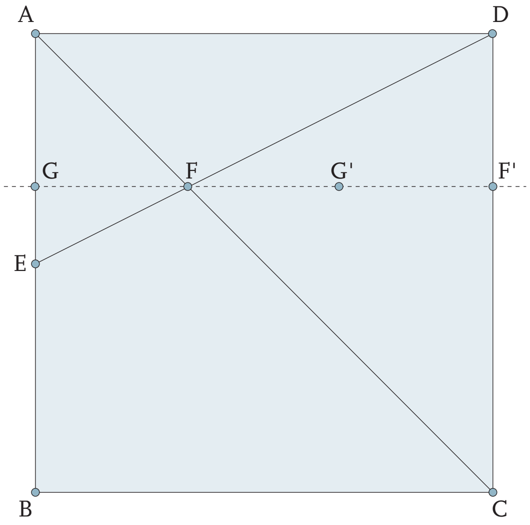


Figura 1

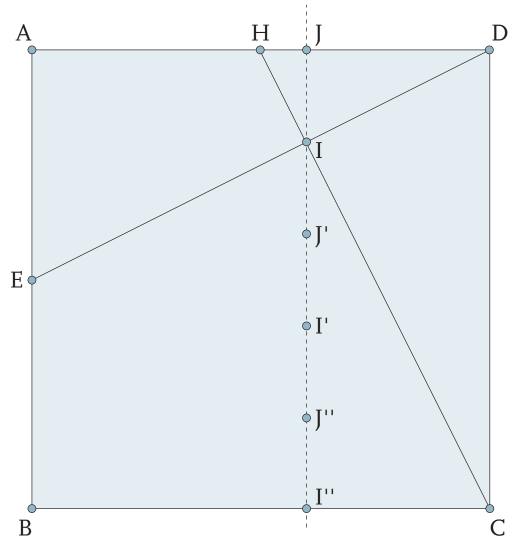


Figura 2

a distância de F ao lado AB (ou a AD) é um terço da medida do lado.

Verifiquei recorrendo a meias voltas: o ponto G foi obtido por meia volta de G com centro em F, e o ponto F por meia volta de F com centro em G. Como não tinha a certeza se F caíra exatamente sobre o lado CD, usei a ferramenta de medida do programa para verificar se realmente GF era ou não um terço do lado do quadrado.

Fiquei satisfeito mas o sucesso motivou-me a ir mais além. A divisão em 5 partes passou ser especialmente querida pois, a partir dela obteria uma desejada divisão em dez partes iguais. Continuei a experimentar interseções entre outros segmentos, agora já recorrendo ao programa de geometria dinâmica e não a dobragens.

Obtive a solução quando substituí a diagonal AC pelo segmento HC, sendo H o ponto médio de AD (figura 2). Sobre o ponto de interseção, tracei a perpendicular ao lado mais próximo e obtive o ponto J. Recorri a meias voltas sucessivas até obter o ponto I'' que caiu sobre o lado BC.

Dividindo assim o lado do quadrado, consigo dividir o quadrado em cinco partes iguais e, por divisão destas ao meio, está dividido em 10 partes.

Considerei que tinha alcançado o meu objetivo, o de achar as divisões que me faltavam. Repare-se que com as divisões em 3 e em 5 conseguia também a divisão em 6, 9 e 10 partes iguais. Só me faltava a divisão em sete, mas o interesse marinou, mais uma vez, até encontrar uma amiga que me renovou o interesse. «Acho que em 7 não dá, exclamei a brincar, o 7 é um primo tramado».

Mais do que a divisão em 7 partes iguais o que intrigava era o modo de demonstrar que estas divisões funcionavam, sem recorrer à experimentação.

Pensei que só obteria a divisão em 7 partes iguais se encontrasse alguma regularidade no processo. Além disso, essa regularidade poderia ajudar-me a ver uma explicação geométrica para o efeito.

Como tinha obtido sucesso com interseção de segmentos que ligavam vértices a pontos médios dos lados, resolvi continuar.

A figura 3 mostra já um desenvolvimento dessa procura de regularidade. Tracei sobre o quadrado os segmentos ED e EC, depois AG e BF, sendo E, G e F os pontos médios dos respetivos lados. Assinalei as interseções H, I, J e K e, recorrendo (outra vez) a sucessivas meias voltas verifiquei que o segmento HI media um terço do lado e que o segmento JK correspondia a um quinto do lado. Encontrados os pontos H e I tracei os segmentos AH e BI, os quais intersetam ED e EC em J e K (já assinalados anteriormente), e em N e O. De seguida verifiquei que NO media a sétima parte do lado do quadrado. Curioso como este processo vai definindo sucessivamente segmentos com comprimento expresso por frações unitárias de denominador ímpar. Porque não uma sucessão com denominador natural?

Recomecei. A teimosia (e uma dose de intuição) dizia-me que encontraria sobre uma diagonal os pontos que me dariam a sucessiva divisão em 1/2, 1/3, 1/4,... porque, se bem se lembram foi sobre uma diagonal que encontrei 1/3 e 1/2 já lá estava.

A figura 4 mostra como fui traçando segmentos que se intersetam com a diagonal BD.

O primeiro segmento é a diagonal AC. Pelo ponto de interseção E tracei uma perpendicular a CD e determinei o ponto de interseção F.

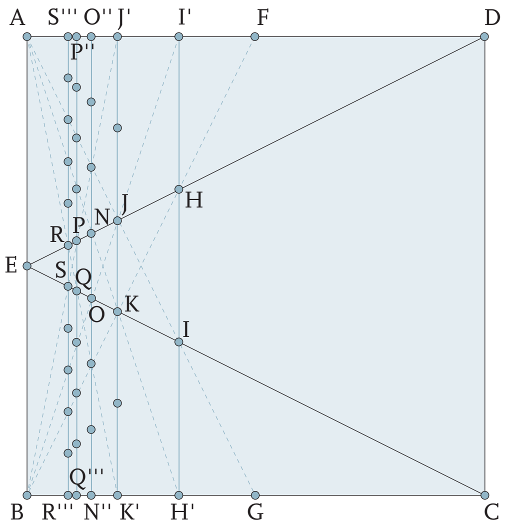


Figura 3

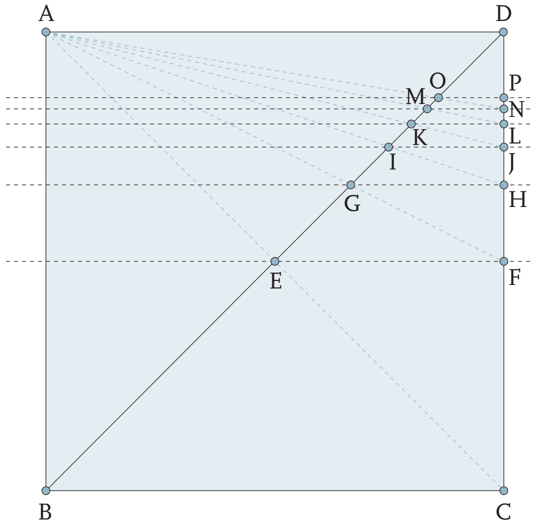


Figura 4

Traço o segmento AF que se intersecta com BD em G. Traço a perpendicular a CD e determino o ponto de interseção H. Repito o procedimento: traço AH, encontro a interseção I, desenho a perpendicular a CD passando por I e marco a interseção J. Deste modo vou obtendo sucessivamente a divisão do lado do quadrado.

O segmento EF (igual a FD) é 1/2 de CD; o segmento HD é 1/3 de CD... o segmento PD divide o lado em 7 partes iguais e continuaremos por aí adiante se seguirmos sempre o mesmo procedimento.

Até agora a verificação das ditas divisões em partes iguais foi sempre obtida recorrendo a meias voltas e aparente coincidência de pontos sobre pontos ou segmentos. Ora isso não chega, é como as dobragens feitas a olho. É preciso encontrar provas mais válidas. Nesta altura, um olhar mais atento encontraria as tais provas, mas eu deambulei por percursos tortuosos, levantando novas questões e encontrando alguns becos muito curiosos. É neste ponto da história que consigo entusiasmar duas colegas em busca de uma ferramenta que mostrasse que as divisões funcionavam rigorosamente. De três maneiras diferentes usámos a semelhança de triângulos para mostrar que os tais segmentos dividiam exatamente o lado do quadrado (e a diagonal) em partes iguais. O teorema de Tales também ajuda.

Os triângulos ABF e DFE são semelhantes, pois

— os ângulos AFB e DFE são verticalmente opostos,
— os ângulos EDF e ABF são alternos internos, assim como FAB e FED.

Sendo E o ponto médio, o segmento DE é 1/2 de AB e portanto a razão de semelhança é 1/2. O segmento DF divide BF em 2 partes iguais, logo é 1/3 da diagonal.

De acordo com o teorema de Tales, sendo paralela ao lado AD a reta que passa em F, a sua interseção em G com o lado CD marca o segmento DG que é 1/3 do lado, tal como DF é 1/3 da diagonal.

Se agora traçarmos o segmento AG, teremos os triângulos ABH e DHG semelhantes tal como os referidos na figura 5. Entretanto sabemos já que DG é 1/3 do lado. Portanto DH é 1/3 de BH, sendo então 1/4 da diagonal. Tal como fizemos para a figura 5, a interseção da reta paralela ao lado AD que passa em H define um segmento DI que é 1/4 do lado, tal como DH é 1/4 do lado (figura 6).

Como se pode ver poderemos continuar recursivamente a definir segmentos do lado do quadrado que correspondem a uma sucessão de frações unitárias de denominador natural.

Como disse no início, vale a pena olhar para o percurso que fiz. Não é exagero reconhecer que se tratou de uma «experiência matemática». Uma experiência que progrediu mais à custa de perguntas que de respostas, num ciclo de conjetura e verificação, de palpites que suscitavam novos interesses que me levaram a novas paisagens (figura 7). Outro ingrediente desta experiência é a autoria do problema, fui eu que o criei e o vivi com o entusiasmo ingénuo de quem pensa descobrir algo novo. Numa pesquisa superficial pela Web encontrei o teorema de Haga, mas deve haver muito mais coisas relacionadas com isto. Para além das atitudes, há a considerar o papel desempenhado pelo *software* de geometria dinâmica (GEOGEBRA). A facilidade e rigor com que se fazem as construções e as ferramentas que auxiliam na verificação de resultados impulsionam a realização de mais experiências antes de passar à fase de demonstração e que para ela contribuem. Infeliz-

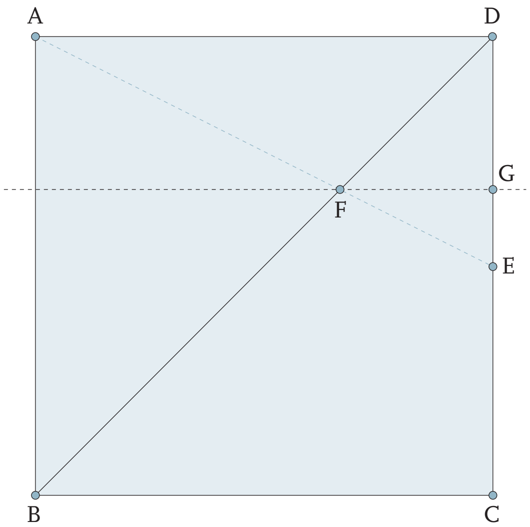


Figura 5

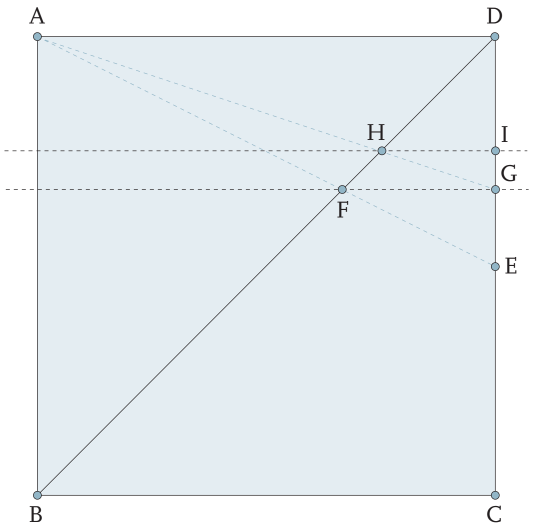


Figura 6

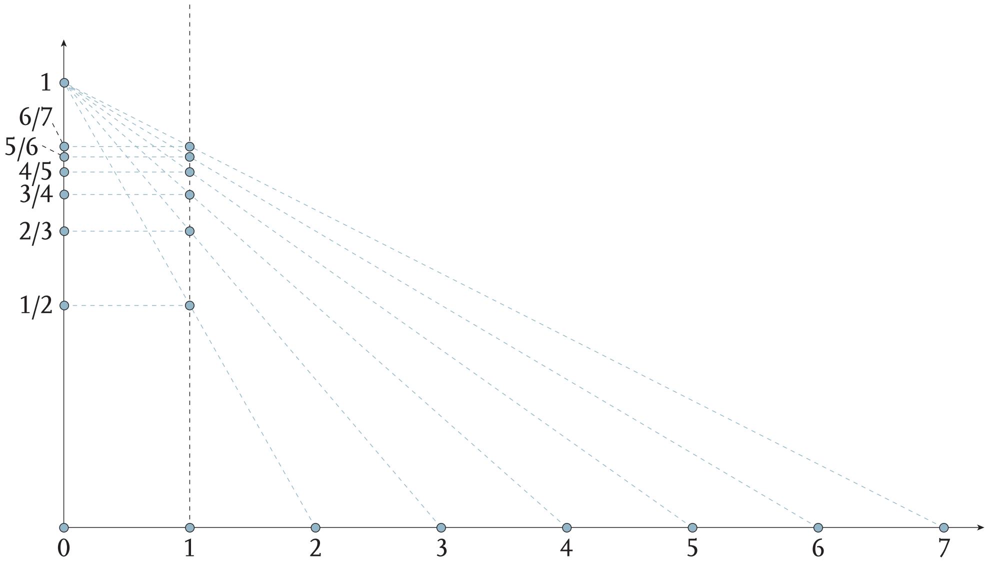


Figura 7

mente a escola, falo de um modo geral, não promove estas atitudes e elas parecem-me essenciais no desenvolvimento de competência matemática. Inquieta-me a conceção sobre a aprendizagem da Matemática que se limita à capacidade de resolver os exercícios ou problemas, sustentada pela prática intensiva, pelo treino de tarefas de aplicação. Isso é essencial, mas quando se olha para a motivação e envolvimento dos alunos e se descobre que eles mesmos já não estão minimamente interessados em compreender os conhecimentos que adquirem (?) e só querem é passar no teste e no exame... E quando eles nos dizem que a Matemática é aquela disciplina em que para passar no exame só precisam de treinar muito. Estamos a formar o quê, máquinas de calcular?

Nota

[1] Simplifiquei ao máximo a notação e não me parece que no decorrer do texto se crie alguma ambiguidade por causa disso.

Pedro Almeida
Escola Superior de Educação de Lisboa