

## GEOMETRICAMENTE FALANDO: RAÍZES, QUADRADOS E NÚMEROS

Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (Bagdad, c. 790–?, c. 850). Imagem de um selo da antiga União Soviética



Esta paixão pela ciência, com a qual Deus distinguiu o Imã al-Ma' mun, o Comandante dos Crentes, (...) essa simpatia e condescendência que ele mostra pelos que aprendem, essa prontidão com a qual ele os protege e apoia no iluminar das obscuridades e na remoção das dificuldades, encorajaram-me a compor um pequeno trabalho sobre o cálculo através de completude e simplificação, resumindo-o ao que é mais fácil e mais útil em aritmética, tal como o que os homens requerem constantemente em casos de heranças, doações, partilhas, leis e comércio, e em todos os seus negócios uns com os outros, ou onde a medida de campos, a construção de canais, o cálculo geométrico (...)

(Excerto traduzido a partir de *The Algebra of Muhammed ben Musa* de Frederic Rosen, Londres, 1831)

Na sua mais conhecida e importante obra *al-kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabalah* Muhammed ibn Musa al-Khwarizmi salientava que «o que as pessoas geralmente querem ao calcular... é um número», pelo que o livro deveria ser um manual de resolução de equações, com vista à obtenção de um resultado. Apesar do seu esforço de escrever um manual prático e não teórico e de o tipo de descrição dos procedimentos ser semelhante ao dos babilónios, a influência da matemática grega na Casa da Sabedoria de Bagdad «obrigou-o» a fornecer provas geométricas para os seus métodos algébricos.

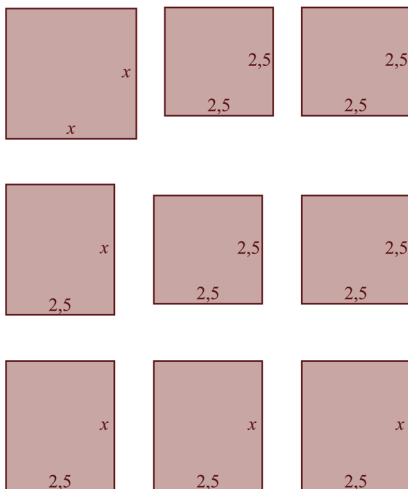
As tarefas que vais realizar ilustram um dos raciocínios geométricos utilizados por al-Khwarizmi.

1. Recorta os retângulos desenhados na folha anexa 1.
2. Calcula a área de cada um desses retângulos e regista o seu valor nas respetivas figuras.
3. Com o quadrado maior e os 4 retângulos não quadrados constrói uma «cruz» de modo que lados adjacentes tenham o mesmo comprimento.
4. Escreve uma expressão que represente a área da figura que construístes.
5. Supõe que a figura tem 39 unidades quadradas de área. Traduz este facto através de uma equação na incógnita  $x$ .
6. Completa a «cruz» com as restantes figuras de modo a obteres um quadrado.  
Qual o valor da área deste quadrado? E quanto mede o seu lado?
7. Exprime a área do quadrado «final» através de uma expressão na variável  $x$ .
8. Qual é o valor de  $x$ ? Explica o teu raciocínio.
9. Verifica que o valor de  $x$  que obtiveste é uma solução da equação que escreveste na tarefa 5.
10. Utiliza o mesmo raciocínio e as figuras da folha anexa 2 para resolveres a equação  $x^2 + 16x = 36$ .

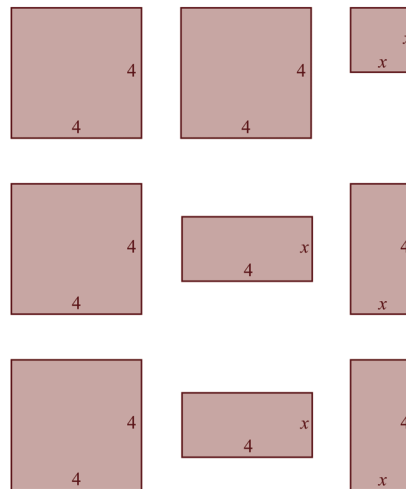
### Notas e sugestões:

- A obra de al-Khwarizmi foi primeiramente traduzida para o latim com o título *Ludus Algebrae et Almucrabalaeque*. Em 1140, Robert de Chester traduziu o título árabe como *Liber Algebrae et Almucabala*. A expansão árabe na Península Ibérica levou a palavra *al-jabr* para a Espanha. Um algebrista passou a ser um restaurador ou alguém que consertava ossos quebrados. Por isso, Miguel de Cervantes em *Dom Quixote* (II, cap. 15) refere «um algebrista que atendeu ao infeliz Sansão». Na época podia ver-se à porta de uma barbearia as palavras «Algebrista y Sangrador». No século XVI, em inglês, o título surge como *Algiebar and Almachabel*, sendo mais tarde encurtado para *Algebra*. A palavra é usada pela primeira vez com o seu sentido matemático atual em 1551, por Robert Recorde no livro *The Pathwaie to Knowledge* e, muito mais tarde, em 1849, Augustus de Morgan escreveria *Trigonometry and Double Algebra*.
- A palavra *al-jabr* significa restauração, complementação, transposição, completude ou reunião de partes quebradas. A palavra *wa-l-muqabalah* significa simplificação, redução, oposição.
- O título *al-kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabalah* pode ser traduzido por *compêndio do cálculo por completude e simplificação* ou por *livro sumário sobre cálculos por transposição e redução*.
- Cerca de 750 anos depois da morte do grande matemático de Bagdad, o estudioso persa Beha-Eddin Mohammed Ben al-Husain al-Aamouli escreveu: «o membro que é afetado por um sinal de menos será aumentado e o mesmo adicionado ao outro membro, isto sendo álgebra; os termos homogêneos e iguais serão então cancelados, isto sendo *al-muqabalah*». Estas palavras, incluídas na obra *Kholâsat Al-Hisâb* (Essência da Aritmética), fornecem uma boa descrição dos dois termos.

#### Folha anexa 1



#### Folha anexa 2



*Nota:* as folhas anexas 1 e 2, que aqui apresentamos reduzidas, podem ser descarregadas do portal da APM, na página da revista correspondente a este artigo.

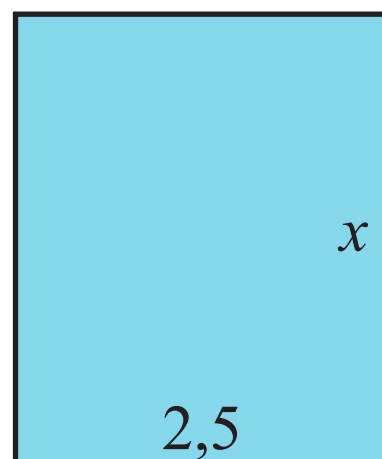
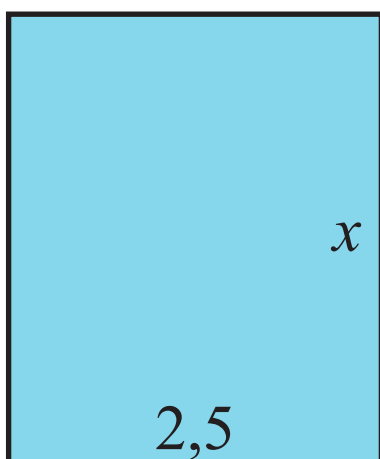
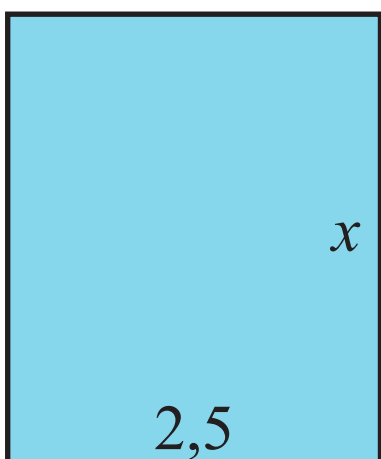
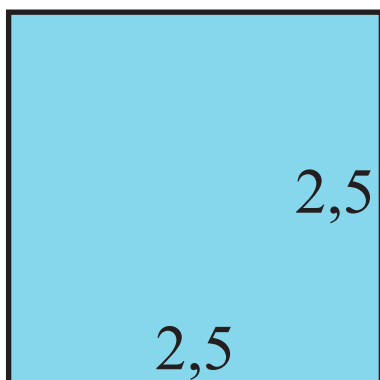
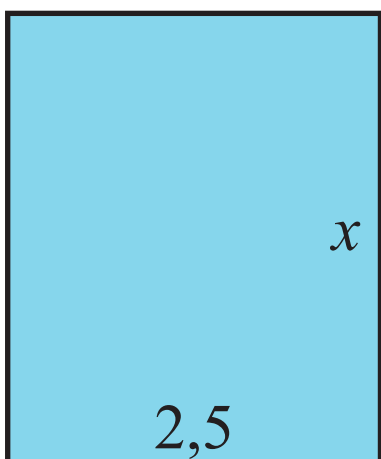
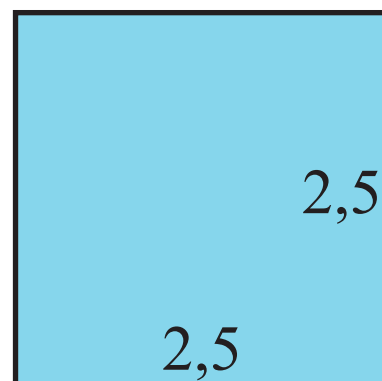
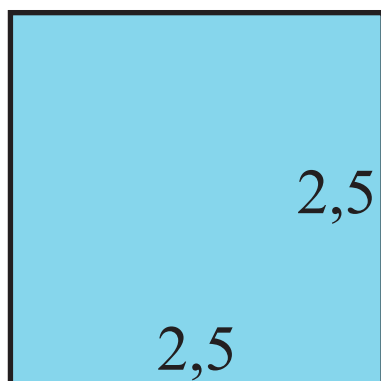
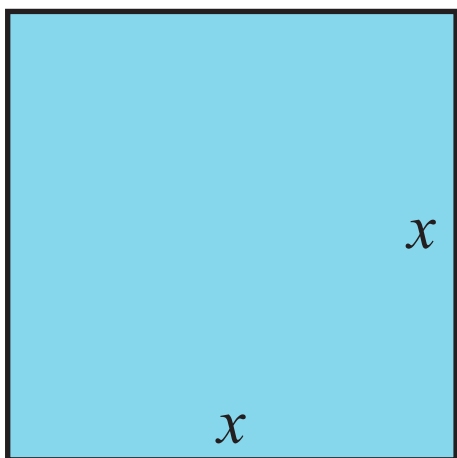
- Ibn Musa al-Khwarizmi escreveu acerca da equação  $x^2 + 10x = 39$ : «... um quadrado e dez raízes são iguais a trinta e nove unidades. Sendo assim, a questão neste tipo de equação é a que se segue: qual é o quadrado que combinado com dez das suas raízes dará uma soma total de trinta e nove? A maneira de resolver este tipo de equação é tomar uma metade das ditas raízes. Ora as raízes no problema são dez. Assim tomando cinco multiplicadas por si mesmas dá vinte e cinco, uma quantidade que adicionada a trinta e nove dá sessenta e quatro. Toma-se então oito e subtraindo a isto metade das raízes que são cinco, fica três. O número três então representa uma raiz deste quadrado, o qual ele próprio com certeza é nove (...).» (Tradução livre realizada com a preocupação de manter o espírito do texto). A atividade baseia-se na prova geométrica por ele fornecida para justificar o raciocínio aqui descrito.
- Será vantajosa a realização da atividade a pares ou em pequenos grupos já que o carácter das tarefas beneficiará da discussão durante a sua concretização.
- A «cruz» referida na tarefa 3 pode ter várias formas, visto que serão obtidas figuras equivalentes.
- Embora as tarefas 6 e 7 se refiram ao mesmo quadrado «final», na primeira pretende-se que os alunos adicionem os valores 39 e 25 e que indiquem 8 como a medida do lado do quadrado, enquanto na segunda se espera que concluam que  $(x + 5)^2 = 64$  para que, na tarefa 8, deduzam que  $x + 5 = 8$  de modo a obterem o valor de  $x$ .

HELENA ISABEL SOUSA

ISABEL CRISTINA DIAS

ESCOLA SECUNDÁRIA JOSÉ CARDOSO PIRES,  
STO. ANTÓNIO DOS CAVALEIROS

# FOLHA ANEXA 1



# FOLHA ANEXA 2

