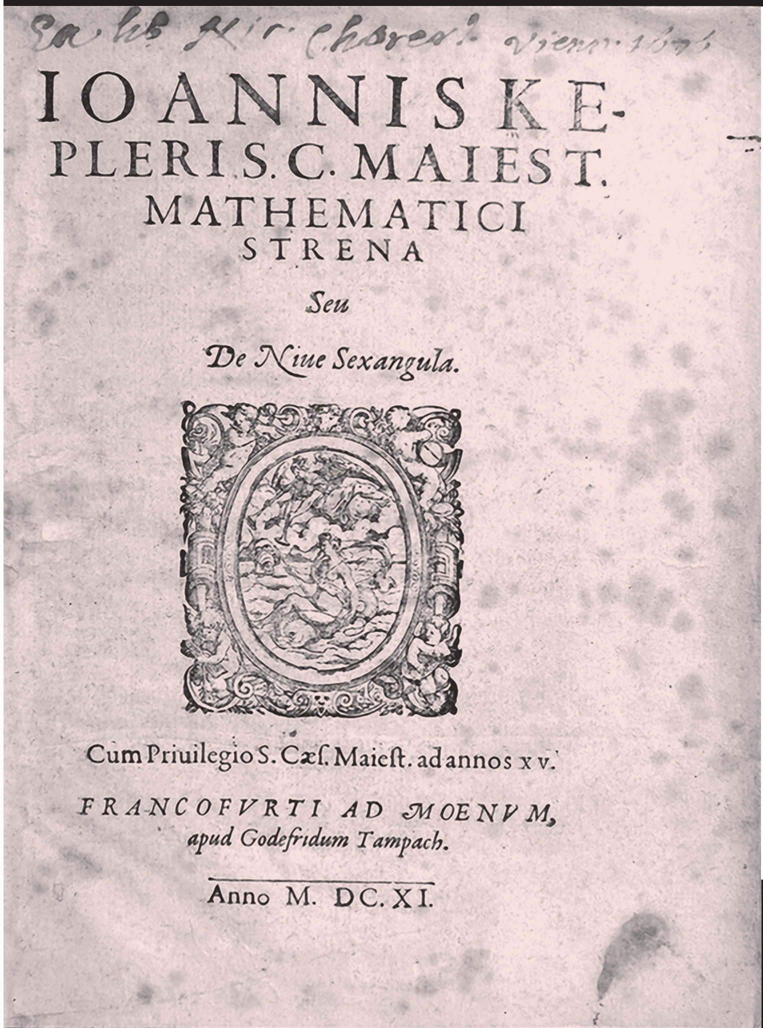
Da neve hexagonal

Lurdes Figueiral



Strena seu De Nive Sexangula, 1611.

The Six-Cornered Snow Flake, A New Year's Gift, 2000.

Em 1610, Kepler escreve um opúsculo intitulado *Strena seu De Nive Sexangula* que se pode traduzir como *A Oferta ou Da Neve Hexagonal*. *A Oferta*, porque Kepler o escreve para oferecer, como presente de ano novo em Janeiro de 1611, a Johannes Matthäus Wackher von Wackhenfels, seu benfeitor da corte prussiana do Imperador Rudolfo II, onde Kepler era astrónomo; *Da neve hexagonal* (ou, mais literalmente, *Da neve de seis ângulos*) porque propõe uma reflexão sobre a causa da forma hexagonal dos flocos de neve.

Este pequeno texto é de agradável leitura pelo *jeu d'esprit* que Kepler utiliza. Logo a abrir, dá o tom:

> Estou bem consciente do quanto amais o Nada, não tanto pelo pouco valor que tem, mas pelo subtil jogo de ideias que se pode fazer com ele, como se fosse um feliz pardal. Por isso posso imaginar que uma oferta pode agradar-lhe tanto mais, e ser mais bem recebida, quanto mais se aproxime do Nada.[1]

Kepler inicia este «jogo de espírito» logo nas primeiras linhas: a *Neve*, que em latim é *Nive* ou *Nix*, pronuncia-se tal como soa na Baixa Germânia o nada – nix– da língua materna de Kepler, ou mesmo o alemão *nichts*.

Na sua essência, este escrito é uma espécie de ensaio sobre a natureza das coisas, das substâncias: Kepler, pro-

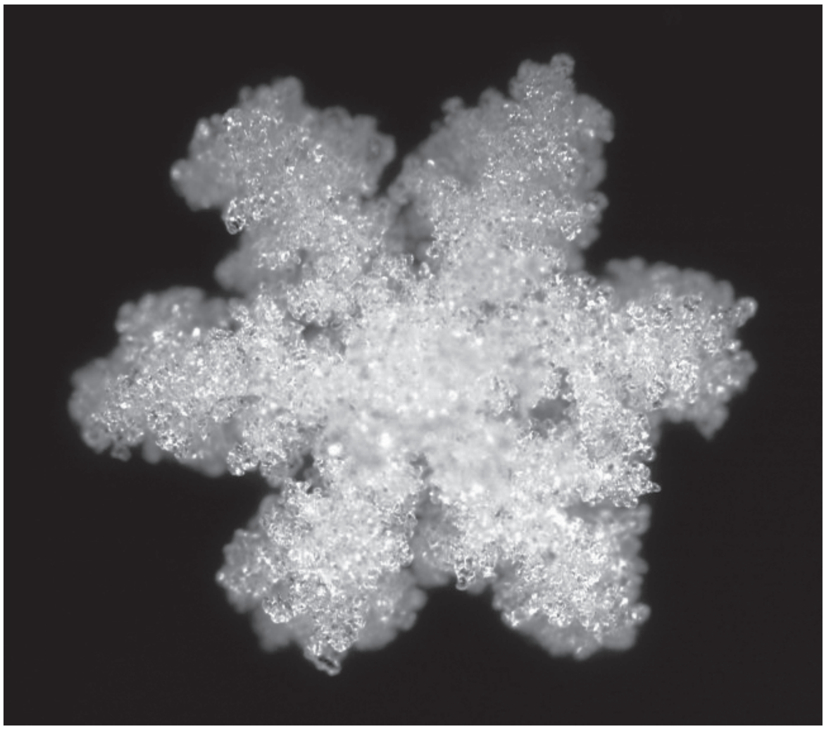


Figura 1

curando essa dádiva que mais se aproxima de *Nada*, depois de recusar sucessivamente o átomo de Epicuro (que considera ser mesmo nada), a poeira da terra (da qual ninguém pode ver a forma e cujo tratamento exigiria cálculos onde ele teme perder-se já que, segundo Arquimedes, haveria numa só semente de papoila, dez mil desses minúsculos grãos), as faíscas de fogo (que ainda são mais que o pó de duas pedras de sílex que se raspam para as produzir — as faíscas, que o pó já ele tinha anteriormente recusado — e por isso, como afirma, «deixo a Platão essas formas piramidais que eu nunca vi, para que ele delas faça fogo como desejava»), o vento e o fumo e a água, escolhe um simples floco de neve, qual estrela caída do céu e pergunta-se se um floco de neve, feito de vapor de água e que derrete quase instantaneamente quando cai, será verdadeiramente alguma coisa.

Vejamos o texto de Kepler:

Enquanto ansiosamente pensava neste assunto [o da oferta do Nada a fazer ao seu amigo], atravessei a ponte[2] mortificado pela minha deselegância de me apresentar diante de vós sem um presente de Ano Novo, excepto talvez (para continuar no mesmo tom) aquele que sempre vos trago — literalmente, Nada. Nem eu estava capaz de pensar em algo que, sendo quase Nada, proporcionasse ainda assim uma subtil reflexão. É então quando, por uma feliz coincidência, algum do vapor que havia no ar se transformou em neve pela força do frio, e alguns flocos dispersos caíram no meu casaco, todos hexagonais, com raios felpudos, filamentosos [omnes sexanguli, villosis radiis, no original]. Por Hércules! Ali estava algo, mais pequeno que uma gota e no entanto dotado de uma forma. Ali estava, na verdade, a mais admirável oferenda de Ano Novo para o amante do Nada, e digno também de um matemático (que tem Nada e recebe Nada[3]) uma vez que desce do céu e tem semelhança com as estrelas (figura 1).

Kepler, interroga-se então:

Visto que sempre é assim, que sempre que começa a nevar, aquelas primeiras partículas de neve adoptam a forma de uma pequena estrela de seis ângulos, é necessário que haja uma causa determinada; pois, se acontece por acaso, por que não tombam igualmente com cinco ou sete ângulos, mas sempre com seis, contanto que estejam ainda esparsas e distintas e antes que se precipitem num confuso aglomerado?

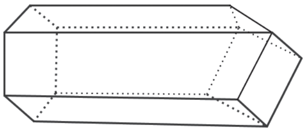
Para ver como estas questões devem ser tratadas, vamos recorrer a alguns exemplos bem conhecidos. Mas vamos apresentá-los de uma forma geométrica, porque uma digressão deste tipo contribuirá muito para a nossa investigação.

Kepler inicia então uma interessante viagem por temas geométricos, cristalográficos e matemáticos, abordando questões que vão desde a conjectura do favo de mel aos quasicristais.

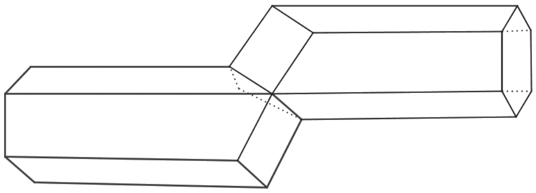
Do favo de mel à Conjectura de Kepler

Já Papo de Alexandria (320 d.C.) tinha considerado que até as abelhas, com «uma certa intuição geométrica», sabiam que, entre as formas regulares que pavimentam o plano, o hexágono é aquela que optimiza a área para o mesmo perímetro. Papo referia-se aqui à secção transversal do alvéolo como se este fosse um prisma hexagonal. Ora, o argumento de Papo é incompleto. De facto, limita-se à comparação de três casos: o triângulo, o quadrado e o hexágono que, desde Pitágoras, se sabia serem os únicos polígonos regulares a cobrir o plano. Papo defende que, se a mesma quantidade de material for usada para construir estas figuras, é o hexágono que é capaz de conter mais mel. Papo não apresenta qualquer razão matemática para restringir as hipóteses aos três polígonos regulares (*porque, às abelhas, repugnam as figuras dissemelhantes*), como também para o motivo que o levou a excluir lacunas entre os alvéolos (*elas* [as abelhas] *acreditam que estas figuras* [os alvéolos] *devem estar absolutamente justapostas e terem os lados em comum, para que as matérias estranhas não possam entrar nos interstícios e manchar assim o fruto dos seus trabalhos*).

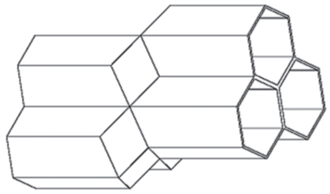
Restringindo-se então a estas três figuras, Papo demonstra que é o hexágono que cumpre o requisito, mas a sua demonstração é feita para um conjunto muito restrito de pos-

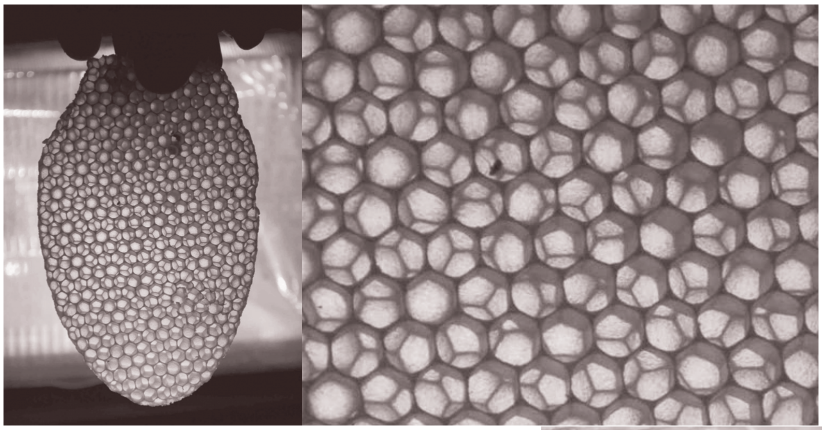


Esquema de um alvéolo

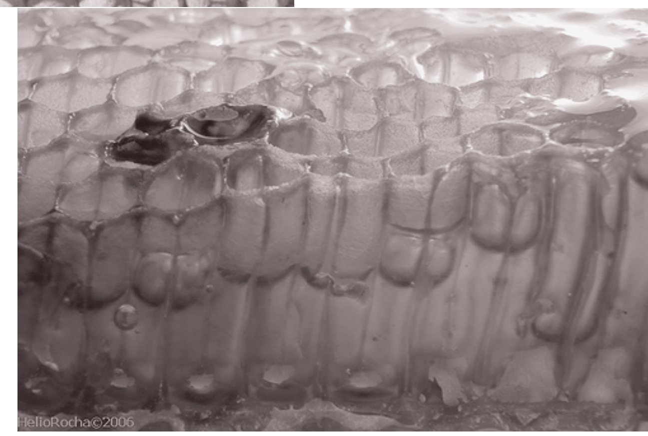


Encaixe de alvéolos pelas paredes do fundo

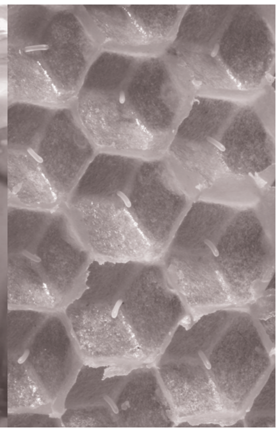




Pequeno favo tipo *seta* fotografado en contraluz



quilha vista em fotografia de perfil



e de cima

Figura 2

sibilidades. Fica então em aberto esta questão, em torno da *Conjectura do favo de mel* (*The Honeycomb Conjecture*) como é conhecida: O hexágono é a figura geométrica com perímetro mínimo e que divide o plano em regiões iguais com uma área dada. (Observe-se que minimizar o perímetro, dada a área, é equivalente a maximizar a área, dado o perímetro.)

Neste livro, Kepler debruçou-se também sobre esta questão e colocou-a no espaço tridimensional, chegando a formular, ele próprio, uma conjectura sobre empacotamentos de esferas (*Conjectura de Kepler*[4]). As demonstrações de ambas as conjecturas estiveram relacionadas e só foram cabalmente resolvidas no limiar deste século. O matemático húngaro László Fejes Tóth (1915–2005) provou, em 1943, a conjectura do favo de mel sob a hipótese da convexidade das células e previu que a demonstração sem esta hipótese da convexidade envolveria consideráveis dificuldades. Esta demonstração veio a ser feita por Thomas C. Hales[5] no contexto da complexa demonstração da Conjectura de Kepler, em trabalhos publicados entre 1998 e 2005.

Na sua viagem ao mundo das colmeias, Kepler descobre que os favos de mel não são constituídos por prismas hexagonais justapostos: esses prismas têm alterada a «parede do fundo». De facto, enquanto que a abertura do alvéolo é um hexágono, no seu fecho posterior este foi substituído por três losangos que formam uma espécie de «quilha» (*carinam potius nuncupes*[6]) que permite que os alvéolos se encaixem de forma desencontrada dando mais consistência ao favo (figura 2).

Figura 3

Figura 4

Esta observação suscitou em Kepler uma curiosidade:

> Os três planos da quilha são idênticos uns aos outros e a sua forma é a que os geómetras chamam losangos. Intrigado com estes losangos comecei a procurar na geometria corpos que, à semelhança dos cinco sólidos regulares e dos catorze sólidos de Arquimedes, pudessem ser construídos só com losangos. Descobri dois: um relacionado com o cubo e com o octaedro e o outro com o dodecaedro e o icosaedro.

Não sendo então os favos das abelhas células óptimas no preenchimento do espaço, para Kepler elas eram suficientemente boas para ser tidas como exemplo, no seu encaixe posterior, deste «empacotamento» sem falhas que o dodecaedro rômbico permite. Outro exemplo que nos apresenta, são as sementes de uma romã:

> Se se corta uma romã de bom tamanho, pode ver-se que a maior parte das sementes estão comprimidas nesta mesma forma (figura 3).

Para Kepler, é claro que as faces rômbicas aparecem na natureza como produto de uma luta pelo espaço entre formas orgânicas redondas, como as sementes de romãs, pressionando-se umas contra as outras.

Por outro lado, essas mesmas formas redondas, se são sujeitas apenas a forças laterais, transformam-se em cubos, tal como as ervilhas, alinhadas na vagem (figura 4).

Mas, e se essas formas esféricas lutando por espaço, são feitas de material sólido? Como devemos embalá-las, a fim de optimizar o uso do espaço? (Corrales, 2010) Kepler descreve as diferentes formas de justapor esferas, com o mesmo raio, no plano e no espaço, da forma mais apertada possível.

No plano, só existem duas maneiras: a de malha quadrada e a de malha triangular (figuras 5 e 6). No primeiro caso, cada esfera contacta com 4 esferas vizinhas; no segundo, cada esfera contacta com 6 esferas vizinhas.

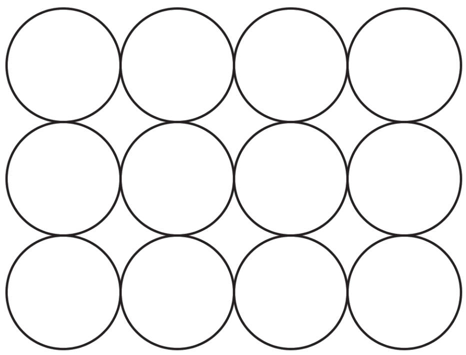


Figura 5. Disposição quadrada

Kepler trabalha obviamente com um conjunto finito de esferas, porque distingue aqui as esferas situadas nos bordos das interiores. Situações que resultam desta concepção finita aparecem noutros locais da exposição feita por Kepler que, no fundo, faz estas análises localmente.

Se quisermos agora empilhar esferas (criando assim uma estrutura tridimensional), teremos que partir destas duas situações planas. Kepler descreve todas as hipóteses.

Malha quadrada: o plano de que se parte tem uma distribuição quadrada e permite duas formas de construir as camadas superiores. Num caso, na camada que se lhe sobrepõe, cada esfera coloca-se directamente sobre uma esfera do plano anterior e assim sucessivamente para as camadas que se venham a sobrepor; todas as camadas apresentam uma disposição quadrada e uma esfera «no interior» toca seis esferas vizinhas: 4 no mesmo plano, 1 no plano abaixo e 1 no plano acima. No outro caso, cada esfera das seguintes camadas coloca-se nos interstícios da camada anterior, mantendo uma malha quadrada; cada esfera, agora, toca 4 vizinhas no mesmo plano, 4 no plano abaixo e 4 no plano acima, num total de 12 esferas.

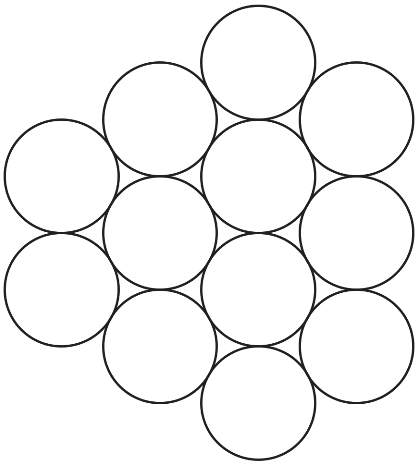


Figura 6. Disposição triangular

Malha triangular: o plano de que se parte apresenta uma malha triangular. A partir daqui há também duas possibilidades de sobrepor camadas. Numa delas, as camadas seguintes alternam em planos que são colocados de forma que cada esfera esteja sobre uma esfera da camada anterior e de esferas colocadas nos interstícios da camada anterior; cada esfera toca em 6 esferas no mesmo plano, 1 esfera no plano abaixo e 1 esfera no plano acima, num total de 8 esferas. Na outra, as esferas das camadas seguintes são colocadas nos interstícios deixados pelas esferas do plano anterior; cada esfera toca em seis esferas no mesmo plano, 3 no plano abaixo e 3 no plano acima, num total de 12 esferas.

Em relação a estas situações, Kepler faz dois tipos de considerações: a que ocupa a maior parte da sua argumentação tem a ver com a finalidade deste seu escrito — perceber a razão das formas, de certas formas da natureza.

Sobre o primeiro arranjo, diz Kepler, num pressuposto de que as esferas não são totalmente rígidas:

> Este é um arranjo cúbico e, uma vez comprimido, as esferas transformam-se em cubos.

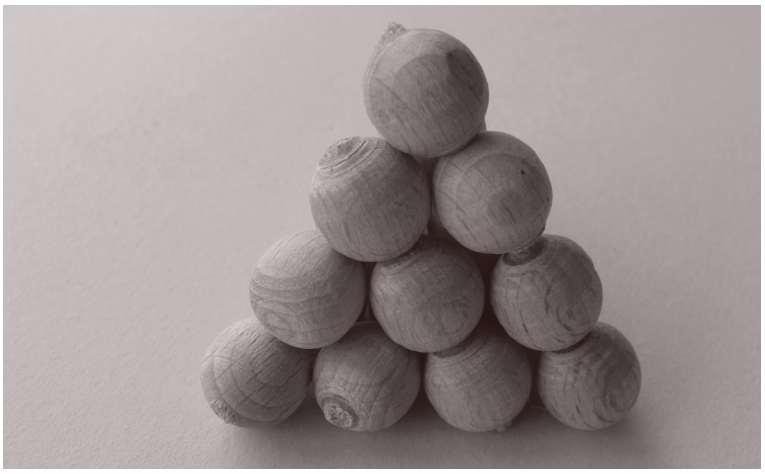
E sobre o segundo:

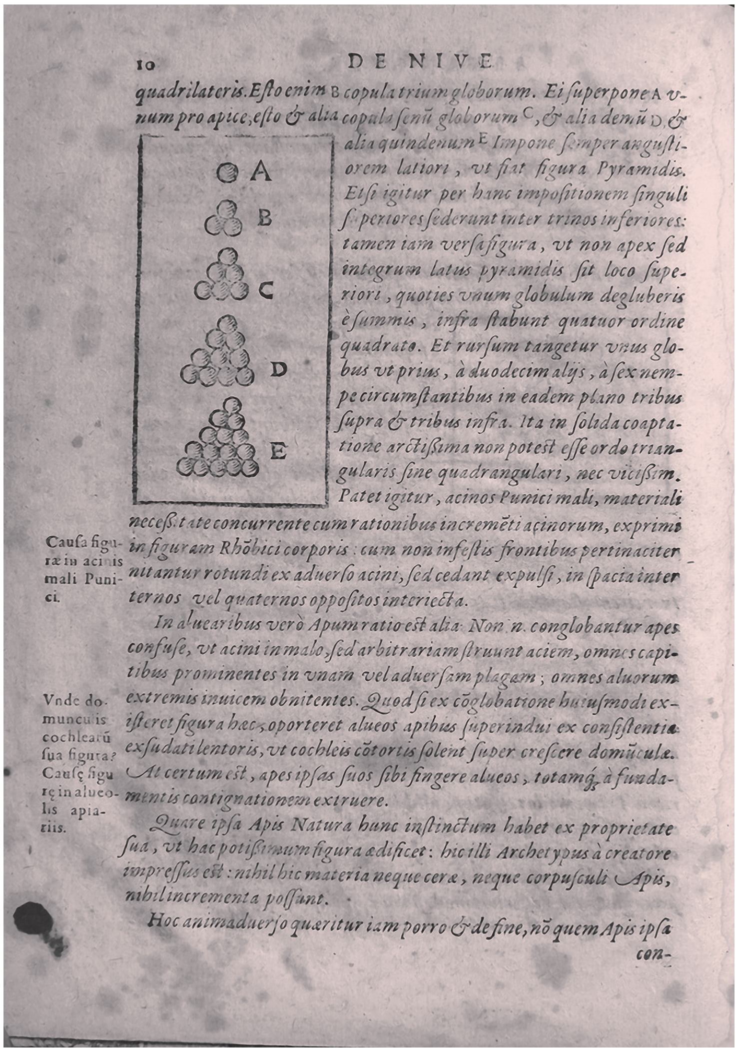
> Quando comprimidas, as esferas tornam-se rômbicas[7]. Esta ordenação é mais comparável ao octaedro e à pirâmide.

O terceiro caso apresenta:

> Um arranjo semelhante a um prisma e, quando comprimido, as esferas transformam-se em colunas com seis lados quadrados e duas bases hexagonais.

Sobre o quarto diz ser semelhante ao segundo, mas descreve-o da seguinte forma:





10 DE NIVE

quadrilateris. Esto enim B copula trium globorum. Ei superpone A unum pro apice; esto & alia copula senũ globorum C, & alia demũ D, & alia quindenum E. Impone semper angustiorem latiori, ut fiat figura Pyramidis. Etsi igitur per hanc impositionem singuli superiores sederunt inter trinos inferiores: tamen iam versa figura, ut non apex sed integrum latus pyramidis sit loco superiori, quoties unum globulum degluberis è summis, infra stabunt quatuor ordine quadrato. Et rursum tangetur unus globus ut prius, à duodecim alijs, à sex nempe circumstantibus in eadem plano tribus supra & tribus infra. Ita in solida coaptatione arctissima non potest esse ordo triangularis sine quadrangulari, nec vicissim. Patet igitur, acinos Punici mali, materiali necessitate concurrente cum rationibus incremẽti acinorum, exprimi in figuram Rhõbici corporis: cum non infestis frontibus pertinaciter nitantur rotundi ex aduerso acini, sed cedant expulsi, in spacia inter ternos vel quaternos oppositos interiecta.

Causa figuræ in acinis mali Punici.

In aluearibus verò Apum ratio est alia. Non n. conglobantur apes confuse, ut acini in malo, sed arbitrariam struunt aciem, omnes capitibus prominentes in unam vel aduersam plagam; omnes aluorum extremis inuicem obnitentes. Quod si ex cõglobatione huiusmodi existeret figura hæc, oporteret alueos apibus superindui ex consistentia exsudati lentoris, ut cochleis cõtortis solent super crescere domũculæ. At certum est, apes ipsas suos sibi fingere alueos, totamq́; à fundamentis contignationem extruere.

Vnde domunculis cochlearũ sua figura? Causę figurę in alueolis apiariis.

Quare ipsa Apis Natura hunc instinctum habet ex proprietate sua, ut hac potissimum figura ædificet: hic illi Archetypus à creatore impressus est: nihil hic materia neque ceræ, neque corpusculi Apis, nihil incrementa possunt.

Hoc animaduerso quæritur iam porro & de fine, nõ quem Apis ipsa con-

Imagem de página de um exemplar do *Strena seu De Nive Sexangula*, 1611

Seja B um grupo de 3 esferas. Coloque-se uma (A) no topo, como vértice. Considere-se outro grupo C de seis esferas; outro, D, de dez e outro, E, de quinze. Coloque-se o mais estreito sempre acima do mais largo, de forma a obtermos uma forma piramidal. Mesmo se, neste método de empilhamento, cada esfera assenta em três abaixo, se a pirâmide estiver voltada de modo que uma face, em vez de o vértice, esteja em cima, sempre que se retira uma esfera a partir do topo, quatro irão aparecer num arranjo quadrado abaixo.

No fundo, Kepler diz que se «rodarmos» convenientemente a pirâmide, pomos de manifesto uma malha quadrada, onde os arranjos das diferentes camadas eram todos triangulares (fig 7).

Portanto no arranjo sólido mais apertado não pode haver ordem triangular sem ordem quadrada e vice versa

No texto, Kepler, em relação à segunda situação, diz:

É o mais apertado arranjo possível e nenhum outro pode armazenar mais esferas num mesmo contentor.

E, mais à frente, em relação ao arranjo descrito em quarto lugar:

O segundo caso produzirá o mesmo resultado que o segundo caso do arranjo quadrilateral descrito acima.

De facto é o mesmo arranjo, ou empacotamento (figura 8). O que muda é a disposição no plano inicial: se neste o arranjo for quadrado e se empilharmos as esferas em forma piramidal obtemos uma pirâmide quadrangular (se o empilhamento se fizer nos dois sentidos, obtemos o octaedro). Se for triangular, obtemos uma pirâmide triangular. Cada esfera do interior do arranjo toca em 12 outras esferas. Dependendo da orientação do arranjo, pode tocar em quatro, quatro e quatro outras esferas em planos paralelos, ou em seis, três e três esferas.

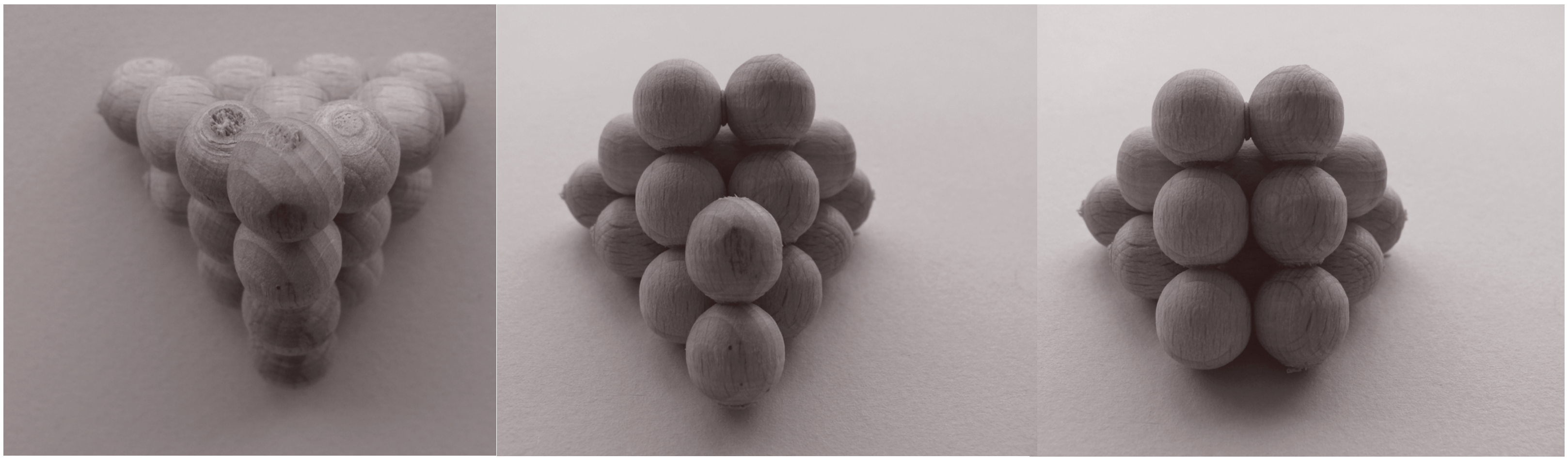


Figura 7. Empilhamento compacto de esferas sobre base triangular: é visível a malha quadrada

E este é sempre o melhor arranjo para empilhar esferas. É esta conclusão que, durante mais de 400 anos, foi conhecida por *Conjectura de Kepler*.

Gauss (Hales, 1998) demonstrou que, de facto, estes dois arranjos descritos por Kepler, possuem a densidade mais alta entre todas as disposições regulares. Em qualquer um deles cada esfera está rodeada por outras 12, e ambos os arranjos têm uma densidade média[8] de $\frac{\pi}{\sqrt{18}}$.

Em 1900, no Congresso Internacional de Matemáticos (ICM)[9], Hilbert propôs uma lista de 20 problemas em aberto que deveriam ser o grande desafio dos matemáticos do século XX. A conjectura de Kepler é a parte C do 18° problema dessa lista: qual a maneira mais densa, no espaço, de arrumarmos um número infinito de sólidos iguais de uma dada forma, como esferas de raio dado? Ou seja: como podemos arrumá-los de modo que a razão entre o espaço ocupado e o espaço não ocupado assuma o maior valor possível?

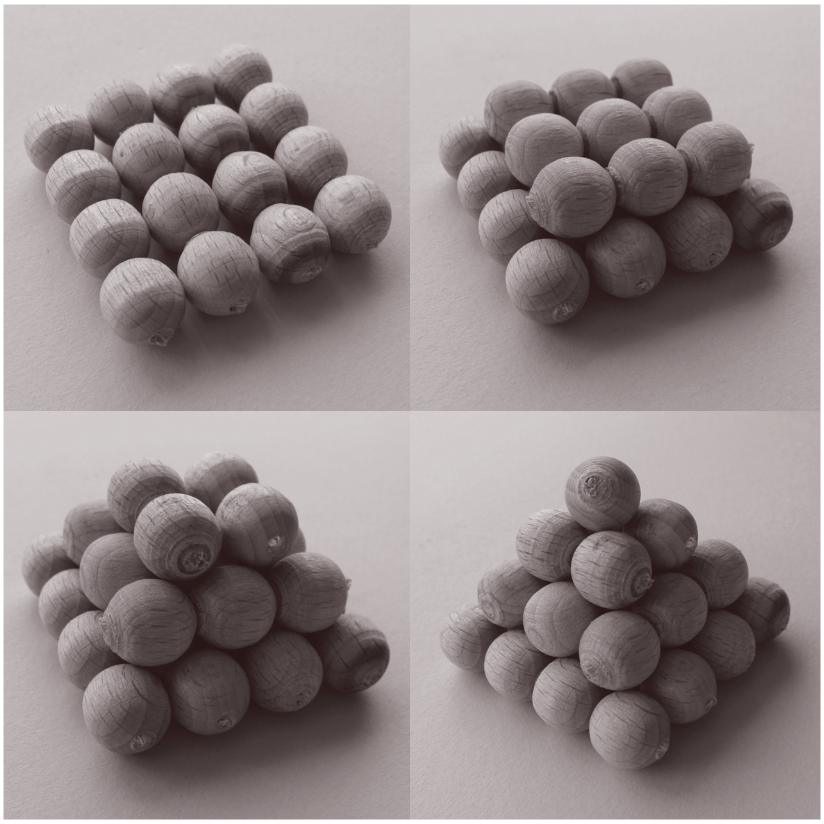


Figura 8. Empilhamento compacto de esferas sobre base quadrada: é visível a malha triangular na face lateral da pirâmide

Em 1998, Thomas Hales, como já referi, seguindo o trabalho feito por László Fejes Tóth em 1953, anunciou a demonstração da conjectura de Kepler. A demonstração de Hales é uma prova por exaustão, feita computacionalmente. Embora este recurso ao computador numa demonstração matemática não seja inédito[10], encontra ainda algumas resistências no seio da comunidade dos matemáticos. No entanto, os editores dos *Annals of Mathematics* concordaram em publicá-la, uma vez que a prova tinha tido a aprovação de um painel de 12 especialistas. Em 2003, depois de quatro anos de trabalho, o coordenador deste painel[11], Gábor Fejes Tóth (filho de László Fejes Tóth), reportou que a sua equipa estava 99% segura da correcção da prova, mas que não conseguiam certificar a correcção de todos os cálculos computacionais. Ora, a possibilidade da verificação de uma prova é, segundo o entendimento comummente aceite até ao aparecimento de demonstrações com recurso ao computador, um dos critérios do que é uma boa demonstração matemática[12].

Em Fevereiro de 2003, Hales publicou um artigo de cem páginas descrevendo, com detalhe, a parte não computacional da sua prova. Os *Annals of Mathematics* concordaram em publicar esta parte. A parte computacional apareceria numa outra publicação, a *Discrete and Computational Geometry*. Um mês antes, Hales tinha anunciado a criação de um projecto colaborativo para produzir uma prova formal completa da conjectura de Kepler. O objectivo é retirar qualquer incerteza que possa restar sobre a validade da demonstração, através de uma prova formal que possa ser verificada por computador[13]. Este projecto chama-se *Project FlysPecK*[14], em que F, P e K se referem a *Formal Proof of Kepler*. Hales calcula que produzir uma prova formal completa pode levar cerca de vinte anos de trabalho.[15]

Pode então dizer-se que a conjectura de Kepler foi de facto demonstrada quase com absoluta certeza.

Kepler, que como já referi procura aqui a causa das formas da natureza, introduz a seguir um tema deveras interessante: compara as formas hexagonal e pentagonal presentes na natureza:

Há dois sólidos regulares, o dodecaedro e o icosaedro, formados expressamente por pentágonos, o último com triângulos mas juntos num arranjo pentagonal. A estrutura de cada um destes sólidos, tal como a do pentágono, não pode ser produzida sem a proporção que os geómetras modernos chamam «divina». Está ordenada de forma que os dois mais pequenos termos consecutivos, juntos, dão o terceiro; e consequentemente, quaisquer dois termos adjacentes adicionam-se para dar o seguinte, até ao infinito, já que a dita sucessão mantém-se para sempre. É impossível dar um exemplo perfeito com números. Quanto mais avançarmos a partir da unidade, mais perfeito se torna o nosso exemplo. Sejam os nossos menores termos 1 e 1, mas considerando-os desiguais. Juntemo-los e obtemos 2. Some-se ao maior 1 para dar 3. Some-se 2 e dá 5. Mais 3 e dá 8. Mais 5 e dá 13. Some-se 8 e dá 13. (...) E assim indefinidamente.

Suspeito que a faculdade geradora das sementes se faz à semelhança desta proporção de auto-propagação, e é por isso que o pentágono, que é a genuína bandeira da faculdade generativa das plantas, se manifesta nas flores.

Aparece-nos assim, não só a referência explícita à divina proporção e à sua relação com a sucessão de Fibonnaci, mas a relação destas com as formas da natureza e uma referência que já então abria a porta àqueles «monstros» da natureza que hoje conhecemos como quasicristais, relacionados também com as regularidades não periódicas e as pavimentações de Penrose, e que mereceram, em 2011, a atribuição do prémio Nobel da Química a Daniel Scechtman exatamente pelas suas investigações nestes *monstros*.

Kepler explana-se ainda sobre as razões pelas quais as formas da natureza variam, argumentando num misto de causas matemáticas e causas necessárias que se prendem com a optimização de matérias e de trabalho e com a essência de cada ser, para se centrar, de novo e finalmente, na forma do floco de neve que explora largamente até parar numa questão para a qual não tem solução matemática, pelo que a deixa na porta dos químicos. Porque é que a forma hexagonal do floco de neve é plana (inscrita no hexágono) e não tridimensional (inscrita na esfera)?

Bati à porta da química e vi quanto fica por dizer sobre este assunto antes que conheçamos as causas. Gostaria antes de ouvir o que pensais, meu senhor cheio de engenho, do que desgastar-me numa discussão mais profunda.

Nihil sequitur
Finis[16]

Notas

1. As citações desta obra são traduzidas por mim a partir da edição bilingue (Latim-Inglês) *The Six-Cornered Snow Flake, a New Year's Gift* by Johannes Kepler, Paul Dry Books, Philadelphia, USA, 2000.
2. A ponte Carlos, cuja construção foi iniciada em 1357 por ordem de Carlos IV e que atravessa o rio Moldava em Praga.
3. Referência ao pagamento que o imperador frequentemente negligenciava.
4. Sobre a conjectura de Kepler pode ler também o artigo *Conjectura de Kepler demonstrada com amplo recurso aos*

computadores!, de Eduardo Veloso, no número 49 da EeM, pp 22–23.

5. «Abstract. This article gives a proof of the classical honeycomb conjecture: any partition of the plane into regions of equal area has perimeter at least that of the regular hexagonal honeycomb tiling.», in Hales, 2002.
6. «posso chamar-lhe quilha».
7. Refere-se aqui Kepler ao dodecaedro rômbico.
8. Esta densidade é a razão entre o volume total das esferas que preenchem um determinado espaço (por exemplo, um cubo) e o volume do espaço em causa (neste caso, o cubo).
9. *International Congress of Mathematicians* (ICM) é o maior congresso de matemática e é realizado de quatro em quatro anos pela União Internacional de Matemática. O primeiro congresso foi realizado em 1897, em Zurique e o mais recente em 2010, em Hyderabad, na Índia. A realização destes congressos apenas foi interrompida nos anos das duas guerras mundiais do século XX.
10. O célebre problema das quatro cores, ou da coloração de um mapa no plano, só foi demonstrado em 1976. Ora, esta demonstração foi computacional e tem gerado discussão na comunidade matemática. Appel e Haken, usando a informática, estudaram 1476 casos distintos de regiões e provaram que qualquer outro mapa se reduz a um daqueles. Em 1994, simplificando a demonstração de Appel e Haken, Seymour, Robertson, Sanders e Thomas, reduziram o número de mapas distintos de 1476 para 633.
11. *the head of the referee's panel*, no original.
12. Sobre os problemas filosóficos e matemáticos que este tipo de demonstração levanta, ver, por exemplo, Tymoczko, T., *The four-color problem and its philosophical significance*, in T. Tymoczko (ed.) *New directions in the philosophy of mathematics*, Boston: Birkhäuser, 1986, pp. 243–266.
13. Já não se trata aqui que o computador faça a demonstração por exaustão mas a verificação dos cálculos através da chamada ATP (Automated Theorem Proving).
14. «The name ‹flyspeck› comes from matching the pattern /f.*p.*k/ against an English dictionary. FPK in turn is an acronym for «The Formal Proof of Kepler.» The term ‹flyspeck› can mean to *examine closely or in minute detail; or to scrutinize*. The term is thus quite appropriate for a project intended to scrutinize the minute details of a mathematical proof», in http://code.google.com/p/flyspeck/.
15. cf. http://www.nationmaster.com/encyclopedia/Kepler-conjecture#Background.
16. «Nada se segue. Fim», cf Kepler, J, op.cit., p. 112–113

Por opção da autora, este artigo não obedece às regras do novo acordo ortográfico.

Referências

Corrales, Capi (2010). *The use of mathematics to read the book of nature. About Kepler and snowflakes*, Contribution to Science, 6 (1): 27–34, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona, p. 30, in http://www.mat.ucm.es/~ccorrale/pdfs/KeplerCorrales.pdf.

Hales, Thomas C. (1998). *An overview of the Kepler Conjecture*, disponível em http://www.math.pitt.edu/~thales/kepler98/.

Hales, Thomas C. (2002). *The Honeycomb Conjecture*. arXiv: math/9906042v2 [math.MG], Mon, 20 May 2002 16:47:49 GMT.

Hales, Thomas C. (2005). *A proof of the Kepler conjecture*, Annals of Mathematics, 162, 1065–1185.

Kepler, Johannes (2000). *The Six-Cornered Snow Flake, a New Year's Gift*. Philadelphia, USA: Paul Dry Books

Lurdes Figueiral

Escola Secundária Artística Soares dos Reis