Do canto gregoriano a Jacques Brell

Simetrias e estruturas matemáticas em música[1,2]

Carlota Simões

Reflexão, translação, rotação são termos usados frequentemente em matemática e associados em geral ao sentido da visão: vitrais, azulejos, ladrilhos são exemplos que apresentamos para clarificar tais conceitos junto dos nossos alunos. É no entanto possível exemplificar os mesmos conceitos usando o sentido da audição. Se no primeiro caso as coordenadas x e y do plano são, por exemplo, a largura e a altura de uma janela em vitral, no segundo caso as variáveis passam a ser respectivamente o tempo e a altura do som, e em vez da visão, são necessárias a audição e a memória para reconhecer uma reflexão ou uma translação.

Músicos e compositores conhecem bem estes conceitos e usam-nos com rigor e engenho. Neste texto vamos apresentar vários exemplos musicais de diversas épocas e estilos bem como a sua tradução para linguagem matemática, analisando composições que vão desde o canto gregoriano do Século VII a Jacques Brel do Século XX, passando pela jovialidade de Mozart e pelo génio de Bach do Século XVIII.

Figura 1

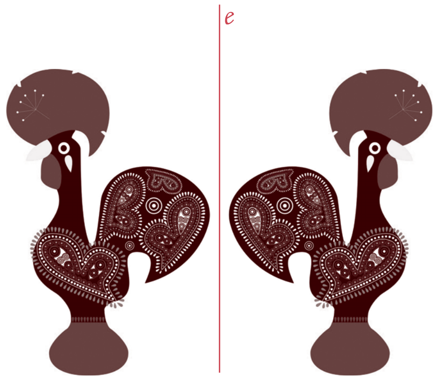

Figura 2

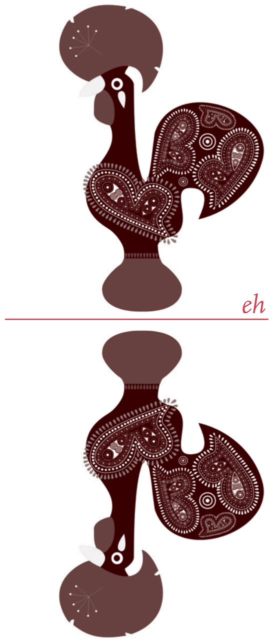

Figura 3

Simetrias musicais

Conceitos matemáticos como reflexão, rotação e translação podem ser transportados para a música. De facto, as simetrias musicais podem ser identificadas com os frisos, padrões em que existem apenas simetrias de translação segundo uma direcção.

Para exemplificar cada uma destas transformações, tomemos a imagem de um galo de Barcelos a olhar para o lado esquerdo (figura 1). Uma reflexão desta figura, segundo um espelho vertical, coloca o galo a olhar para o lado direito (figura 2). Uma reflexão segundo um espelho horizontal coloca o galo de pernas para o ar, mantendo o olhar para a esquerda (figura 3). Podemos tornar a reflectir a última imagem segundo um espelho vertical (figura 4). A figura final pode ser obtida a partir da inicial apenas com uma única operação: a rotação de 180°. E esta pode ser obtida por duas rotações sucessivas de 90°, no sentido dos ponteiros do relógio (figura 5).

A música escreve-se na pauta de um modo muito semelhante à representação cartesiana de pontos e funções no plano: um eixo vertical para a altura do som, um eixo horizontal para que as diversas linhas melódicas se desenvolvam ao longo do tempo. A linha melódica representada na pauta pode assim ser analisada como um friso. Suponhamos que a «figura» que queremos transformar é uma sequência de notas S, que queremos usar tanto na forma original como em versões que se obtêm dela por reflexão. Suponhamos que a sequência principal é $S=(a_1,a_2,..., a_n)$. A retrógrada de S, $R(S)$, obtém-se de S lendo esta do fim para o princípio (figura 6).

A inversão de S, $I(S)$, obtém-se de S mantendo a primeira nota, mantendo os intervalos entre duas notas consecu-

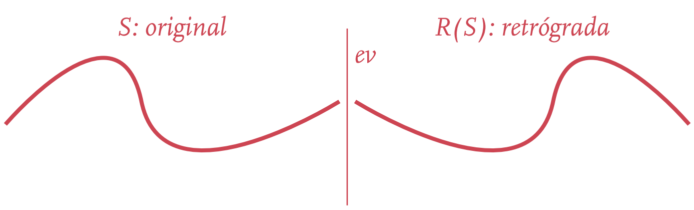

Figura 6. Representação gráfica de uma melodia e da sua retrógrada

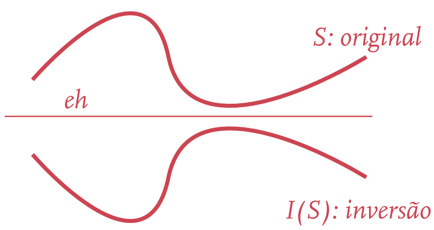

Figura 7. Uma melodia e a sua inversão

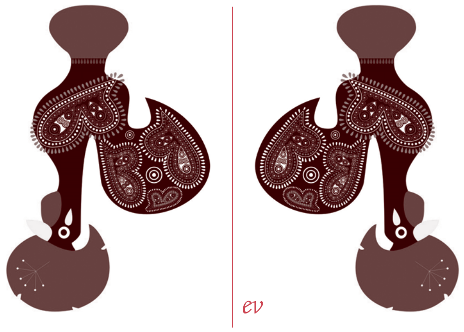

Figura 4

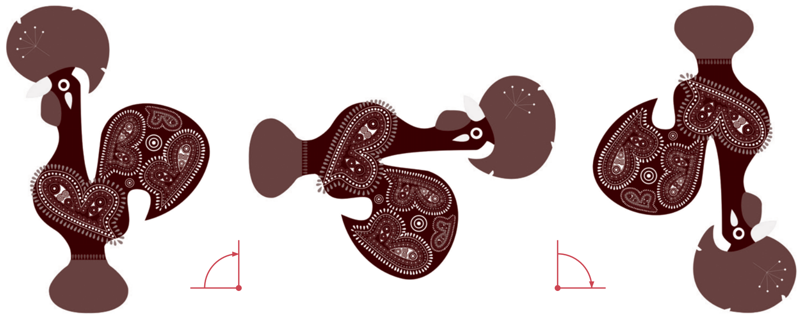

Figura 5. Duas rotações sucessivas de 90°

tivas, mas trocando-lhes o sentido, ou seja, fazendo com que um intervalo ascendente passe a descendente e vice-versa. $I(S)$ corresponde à reflexão segundo um eixo horizontal (figura 7).

Como as notas de $I(S)$ são diferentes das da sequência S, designemos a inversão por $I(S)=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$. A retrógrada da inversão de S, $RI(S)$, obtém-se de S aplicando-lhe as duas transformações anteriores, obtendo: $RI(S)=(b_n, \ldots ,b_2,b_1)$ (figura 8).

Na figura 10, podemos ver uma sequência de notas S e as respectivas transformadas $R(S)$, $I(S)$ e $RI(S)$.

Tal como fizemos com o galo de Barcelos, podemos tentar passar directamente da sequência original S para a retrógrada da inversão $RI(S)$ através de uma rotação de 180°. Na verdade, o resultado obtido desta forma não é exactamente $RI(S)$, nem sequer uma transposta por alguns meios-tons de $RI(S)$.

A forma como a música é representada graficamente numa pauta musical permite aplicar uma rotação de 180° à pauta de uma dada melodia e assim obtermos uma nova melodia, na qual intervalos ascendentes passam a descendentes e vice-versa, e onde os intervalos, grosso modo, se mantém (figura 11). É no entanto necessário acrescentar à pauta uma clave, uma espécie de «origem do referencial» em música, que define a posição de uma nota e permite assim conhecer o nome de todas as outras notas representadas na pauta (figura 11).

Existe em música ainda uma outra operação: a transposta de S por k meios-tons, S_k, obtém-se de S «adicionando» k meios-tons a todas as entradas de S (figura 9). Esta transformação corresponde à translação no plano, em matemática.

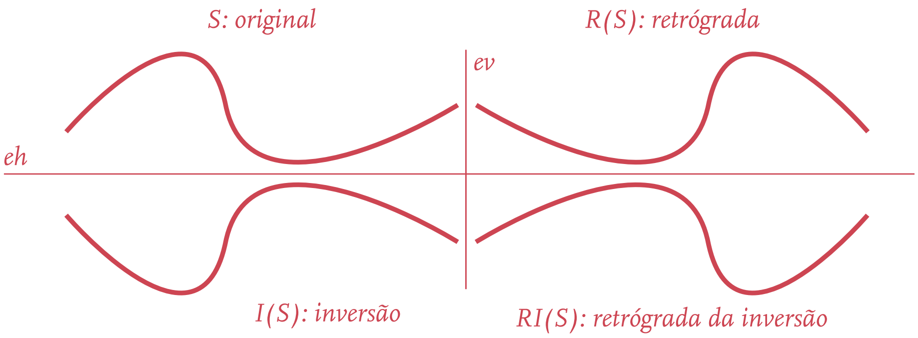

Figura 8. Representação gráfica de uma melodia e suas transformações por reflexão

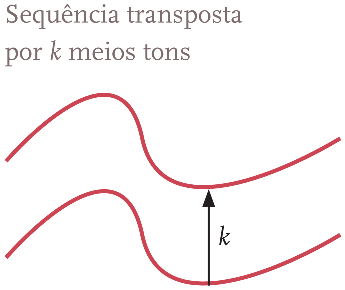

Figura 9. Uma melodia e a sua transposta

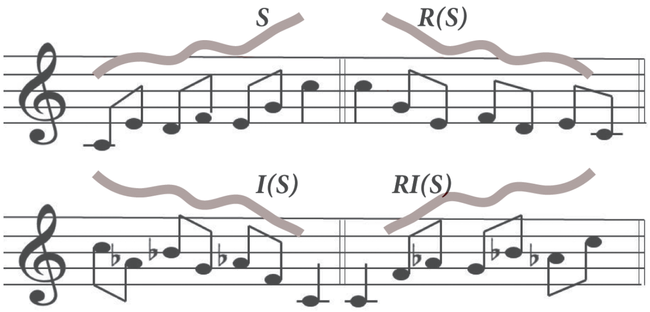

Figura 10. Uma sequência de notas S e as respectivas transformações R(S), I(S) e R(I(S)).

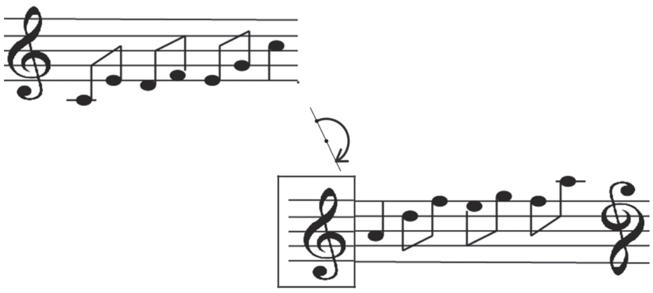

Figura 11. Uma melodia inicial e a melodia que se obtém por rotação da respectiva pauta

Translação, repetição e cânone

Quem não se lembra do *Frère Jacques*? O primeiro cantava as primeiras quatro notas, e logo o segundo começava a cantar desde o início enquanto o primeiro seguia com a canção sem se perturbar. O terceiro entrava depois das quatro primeiras notas do segundo, o quarto depois das quatro primeiras notas do terceiro, e assim sucessivamente (figura 12).[3]

Frère Jacques diz-se um *cânone*: uma música a diversas vozes, na qual uma linha melódica é cantada por uma primeira voz, que será repetida por outras vozes que vão entrando uma após a outra, cada uma retomando o que a outra acabou de cantar. Na verdade, a sobreposição de linhas melódicas na pauta de um cânone faz lembrar a calçada portuguesa no Largo do Rossio (figura 13)[4].

Um exemplo magnífico de cânone é o quarto andamento da *Sonata em Lá Maior* de César Franck (1822–1890). Analisando a figura 14, vemos (sombreado inicial mais claro) a primeira frase melódica, tocada pelas duas mãos no piano em simultâneo, e depois pelo violino, com um atraso de quatro tempos. A seguir (sombrado menos claro seguinte) vem a segunda frase que entra no piano enquanto ainda o violino não terminou a primeira. E assim sucessivamente. Esta sonata foi composta por César Franck para violino e piano em 1886, mas existe uma versão para piano e vio-

Figura 12. Os primeiros compassos de Frère Jacques

Figura 13. Largo do Rossio, em Lisboa

Figura 14. Início do quarto andamento da ***Sonata em Lá Maior***, de César Franck

loncelo por Mischa Maisky (violoncelo) e Martha Argerich (piano) que vale a pena ouvir (RM1). Quem quiser explorar mais um cânone brilhante, tentando identificar as frases melódicas que se repetem sucessivamente pelos diversos instrumentos, pode ouvir o Cânone em Ré de Johann Pachelbel (1653–1706), numa versão tocada pela Orquestra Filarmónica de Berlim, conduzida por Herbert von Karajan (RM2).

Em termos matemáticos, o cânone corresponde à translação no plano. Em todos estes exemplos, *Frère Jacques*, *Sonata em Lá* de Franck e *Cânone em Ré* de Pachelbel, a linha melódica sofre apenas uma translação no tempo: a segunda voz reproduz a melodia, começando-a na mesma nota (ou numa nota do mesmo nome, com altura diferente, como acontece na sonata de César Franck).

Mas também existem cânones que deslocam a segunda voz tanto no tempo como em altura do som. Da obra *Variações Goldberg* de Johann Sebastian Bach (1685–1750), que consiste num total de 30 variações sobre um mesmo tema, fazem parte nove cânones (figura 15). O que é interessante para o nosso estudo é o facto de, nesta obra, todas as variações que correspondem a um número múltiplo de três, excepto a última (Variação 30), serem um cânone. Mais ainda: a variação número $3n$ é um cânone ao intervalo n; a variação 3 é um cânone ao uníssono (o intervalo entre uma nota e ela própria), ou seja, um cânone com duas vozes que se repetem sucessivamente, como no Frère Jacques; já a variação 6 é um cânone com intervalo de segunda (o intervalo entre uma nota e a nota imediatamente a seguir), a variação 9 é um cânone com intervalo de terceira, e assim sucessivamente, até à variação 27, um cânone com intervalo de nona.

Na Variação 3 há uma primeira voz que segue uma linha melódica que começa no primeiro compasso (figura 16), e uma segunda voz que começa no segundo compasso, imitando a primeira e sobrepondo-se a ela. Vale a pena ouvir esta variação interpretada por Glenn Gould (RM3)

Aria	Variatio 16. Ouverture
Variatio 1	Variatio 17
Variatio 2	Variatio 18. Canone alla Sesta
Variatio 3. Canone all'Unissono	Variatio 19
Variatio 4	Variatio 20
Variatio 5	Variatio 21. Canone alla Settima
Variatio 6. Canone alla Seconda	Variatio 22. alla breve
Variatio 7. al tempo di Giga	Variatio 23
Variatio 8	Variatio 24. Canone all'Ottava
Variatio 9. Canone alla Terza	Variatio 25. adagio
Variatio 10. Fughetta	Variatio 26
Variatio 11	Variatio 27. Canone alla Nona
Variatio 12. Canone alla Quarta	Variatio 28
Variatio 13	Variatio 29
Variatio 14	Variatio 30. Quodlibet
Variatio 15. Canone alla Quinta	Ario da Capo

Figura 15. As Variações Goldberg, de Johann Sebastian Bach

Na Variação 9 (figura 17), a primeira voz começa no primeiro compasso, num Si, e a segunda voz começa no segundo compasso, no Sol imediatamente mais grave (Sol–Si é um intervalo de terceira). Vale a pena ver a interpretação desta variação por Colin Booth com representação gráfica de Stephen Malinowski (RM4).

Simetria de reflexão ou composições capicua

Vimos já que a música escrita na pauta pode ser analisada como se de um friso se tratasse. Procuremos nela mais simetrias dos frisos.

Uma melodia com a simetria da capicua pode ser tocada do início para o fim ou do fim para o princípio, que o resultado musical é o mesmo. Esta é a simetria que encontramos no *Minuetto al Roverso* (RM5) da *Sinfonia n.° 47 em Sol Maior* (figura 18) de Haydn (1732–1809).

Figura 16. Variação 3, *Variações Goldberg*, Johann Sebastian Bach

Figura 17. Variação 9, ***Variações Goldberg***, Johann Sebastian Bach

Figura 18. Tema do ***Minuetto al Roverso, Sinfonia n.° 47 em Sol Maior*** de Hayden

Haydn não foi o primeiro a criar uma obra musical em capicua. Podemos dar o exemplo do Cânone 1 da *Oferenda Musical* (1747) de Johann Sebastian Bach que neste vídeo (RM7) se desenvolve engenhosamente sobre uma Fita de Möbius.

A reflexão de espelho horizontal

Encontrar exemplos musicais inspirados na reflexão segundo um eixo horizontal é uma tarefa mais difícil que as anteriores.[5]

No exemplo seguinte esta simetria é muito difícil de detectar, a não ser por observação das pautas musicais. A composição mais famosa de Paganini (1782–1840) é, quase de certeza, o *Capricho n.° 24* para violino, que podemos ouvir numa interpretação por Alexander Markov (RM8). Um século mais tarde, Rachmaninoff (1873–1943) homenageou Paganini com a sua *Rapsódia sobre um tema de Paganini* (1934), um conjunto de 24 variações sobre o *Capricho 24* de Paganini. Na *Variação* 18 da rapsódia de Rachmaninoff, que podemos ouvir numa versão de Rubinstein (RM9), é quase impossível reconhecer o tema original de Paganini sem olharmos atentamente para as duas pautas (figuras 19 e 20). Rachmaninoff usou para tema da sua composição a inversão do tema de Paganini, ou seja, a melodia que se obtém depois de aplicar uma reflexão de eixo horizontal ao tema de Paganini.

Figura 19. Tema do ***Caprice n.° 24***, Paganini

Figura 20. Tema da Variação 18, Rachmaninoff

Figura 21. Calçada Martin de Freitas, junto aos Arcos do Jardim, Coimbra

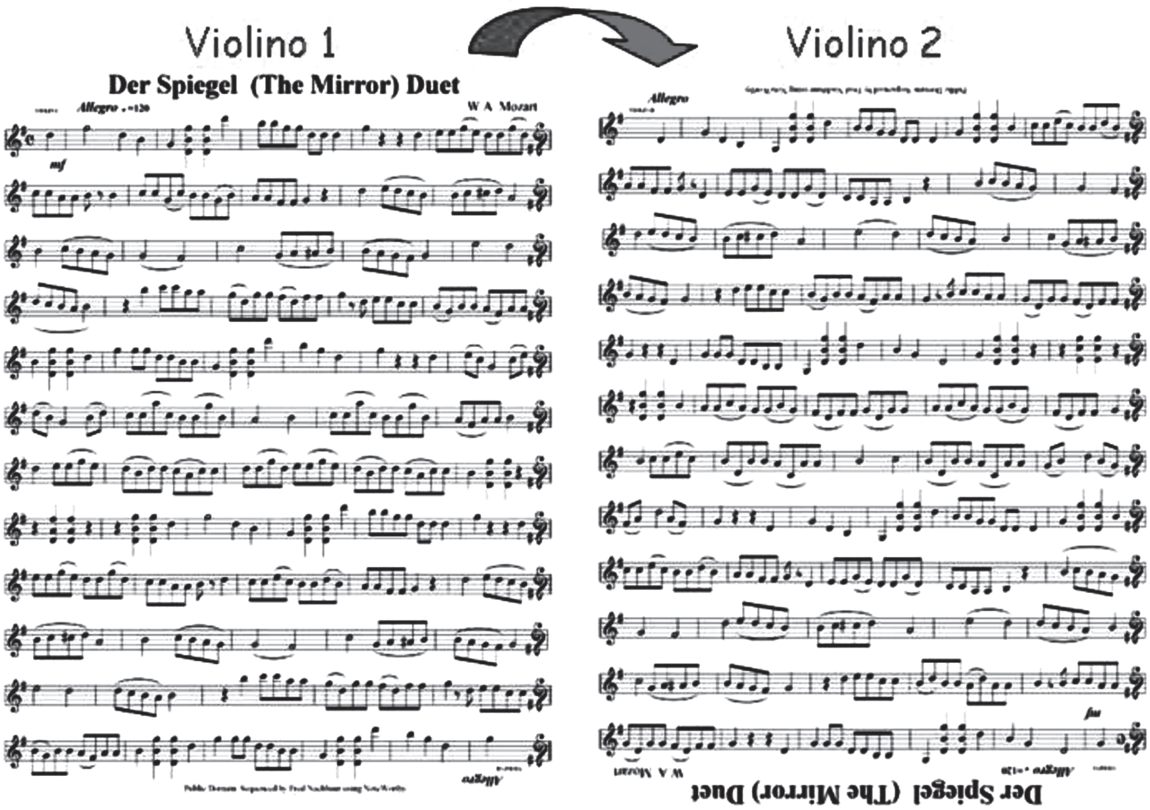

Figura 22. O dueto *Espelho*, para dois violinos

A simetria musical entre estes dois temas é a que podemos encontrar, por exemplo, na Calçada Martim de Freitas, em Coimbra (figura 21).

O dueto espelho

Encontra-se *online* a pauta relativa a uma peça para dois violinos, *Der Spiegel Duet*[6], atribuída a Mozart e que podemos ver e ouvir no *youtube* (RM10). O que é original nesta obra é que uma única pauta serve para os dois violinistas em simultâneo, que a poderão executar se estiverem ambos frente a frente, a olhar para a mesma folha de papel (figura 22). De facto, a isometria envolvida é a rotação de 180°, operação «efectuada» pelo segundo violinista, quando este olha para a pauta que, para o primeiro violinista, estaria invertida. Mas na verdade, e como vimos anteriormente, a rotação de 180° corresponde, grosso modo, à retrógrada da inversão da sequência original.

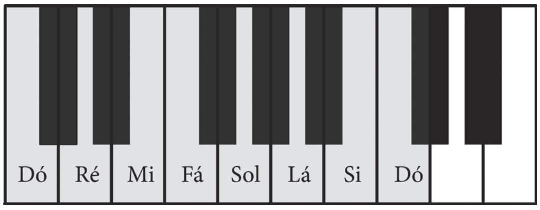

Figura 23. A escala de Dó Maior

Figura 24. Tons e meios-tons da escala de Dó Maior. Os meios-tons estão assinalados com uma ligadura entre as notas correspondentes

Escalas com simetria

No teclado de um piano, entre cada duas teclas brancas sucessivas pode haver, ou não, uma tecla preta. No primeiro caso, as notas correspondentes distam de um tom e no segundo caso distam de meio-tom. Mas mesmo quem nunca tenha aprendido música consegue reconhecer e trautear a escala de Dó, entoando meios-tons e tons inteiros sem se aperceber desse feito (figura 23).

Hoje chamamos a esta escala diatónica maior, e caracteriza-se por ter os meios-tons (Mi-Fá e Si-Dó) da terceira para a quarta e da sétima para a oitava notas. Por causa da localização dos meios-tons nesta escala, esta é constituída por dois conjuntos de quatro notas com a mesma distribuição de tons e meios-tons (figura 24).

Podemos tocar esta escala no teclado de um piano começando-a em qualquer nota, mas para respeitar as posições dos seus tons e meios-tons é preciso recorrer às teclas pretas. Começando a escala em Fá ou em Sol, basta usar uma tecla preta: no primeiro caso é a tecla preta que fica imediatamente antes de Si (Si b), e no segundo caso a que fica imediatamente a seguir a Fá (Fá #). Se no entanto quisermos começar a escala em Si, já temos que usar todas as cinco teclas pretas.

A afinação de um teclado que torna possível começar a escala diatónica em qualquer nota, e de tal forma que qualquer das escalas soe bem ao ouvido, foi um problema resolvido no Século XVIII, com intervenção tanto de matemáticos como de músicos. Bach comemorou o feito compondo *O Cravo bem Temperado* (1722), um conjunto de 24 Prelúdios e Fugas que pode ser visto como um catálogo de composições, que cobre todas as 24 escalas diatónicas (12 maiores e 12 menores) que se obtêm mantendo os tons e meios-tons da escala de Dó, mas começando-a em qualquer uma das 12 notas do teclado, brancas ou negras. As peças aparecem ordenadas, por ordem cromática, começando em Dó e terminando em Si, as ímpares para os tons maiores e as pares para os tons menores (figura 25).

Prelúdio e Fuga (nos ímpares)	Escalas maiores	Prelúdio e Fuga (nos pares)	Escalas menores
1	Dó M	2	Dó m
3	Dó # M	4	Dó # m
5	Ré M	6	Ré m
7	Mi b M	8	Mi b m
9	Mi M	10	Mi m
11	Fá M	12	Fá m
13	Fá # M	14	Fá # m
15	Sol M	16	Sol m
17	Lá b M	18	Sol # m
19	Lá M	20	Lá m
21	Si b M	22	Si b m
23	Si M	24	Si m

Figura 25. Os 24 Prelúdios e Fugas d'*O Cravo bem Temperado*

Bach provou assim que num cravo ‹bem temperado› se pode transpor a escala de Dó fazendo-a começar em qualquer nota do teclado, mantendo os intervalos da escala diatónica, e ainda compor músicas em quaisquer dessas escalas.

Mas a escala de Dó nem sempre foi tão popular como tem sido de Bach aos nossos dias. Foi o Papa Gregório I (540–604) quem organizou um conjunto de escalas musicais, os modos gregorianos, nomeando-as a partir dos nomes das escalas gregas da Antiguidade. A nossa tão popular escala diatónica que acabou por vencer as restantes em popularidade, era nesse tempo o modo Jónico. Há no entanto um outro modo gregoriano que, talvez pela sua estrutura interessante do ponto de vista da simetria de reflexão, chegou directamente e discretamente desde a Idade Média aos nossos dias.

Consideremos a escala que vai de Ré ao Ré seguinte usando apenas as notas brancas (figura 26). Deste modo, os meios-tons ficam entre a segunda e a terceira, e entre a sexta e a sétima notas. Trata-se do modo Dórico (figura 27).

Na verdade, em termos musicais, esta distribuição simétrica dos meios-tons que os afasta do início e do fim da escala, produz uma sensação de sobriedade no ouvinte, enquanto que a localização de um meio-tom logo no início da escala lhe dá um toque lamentoso ou sensual, como acontece, por exemplo, no Flamenco. A discussão acerca dos efeitos das diversas escalas nas emoções e na formação do carácter vem de longe, pelo menos desde a Antiga Grécia, como podemos confirmar em *A República*.

—*Quais são então as harmonias lamentosas?* [...]
—*São a mixolídia, a sintonolídia, e outras que tais.*
—*Portanto essas são as que se devem excluir, visto que são inúteis para as mulheres, que convém que sejam honestas, já para não falar dos homens.* [...] *Não entendo de harmonias, mas deixa-nos ficar [uma harmonia] para aquele que se encontra em actos pacíficos, não violentos, que se comporta com bom senso e moderação.* [...]

Platão, *A República*, Livro III, 398–399

A sobriedade do modo Dórico é por certo a razão para algumas melodias compostas a partir desta escala sobreviverem ao passar dos séculos, permanentemente retomadas e transformadas por músicos e compositores.

Quem não conhece a canção inglesa *Greensleeves* pelo nome, irá reconhecê-la decerto nesta versão em guitarra (RM11). Esta canção, provavelmente do Período Isabelino, da Inglaterra do Séc. XVI, já foi cantada por Elvis Presley (1968) (RM12) e também por Leonard Cohen (1974) (RM13). Podemos ainda ouvi-la numa interpretação em jazz por John Coltrane (1961) (RM14) ou mesmo pela banda rock Jethro Tull (2003) (RM15).

O modo Dórico é também a escala do hino *Dies Irae* composto no Séc. XIII, que podemos ouvir em canto gregoriano (RM16). Também estal melodia tem vindo a ganhar novas roupagens ao longo dos séculos, incorporada em diversas obras de diversos compositores. São exemplo o quinto andamento da *Sinfonia Fantástica de Berlioz* (Séc. XIX) (RM17) ou a *Dança Macabra (Totentanz)* de Liszt (Séc. XIX) (RM18). O tema *Dies Irae* aparece também na *Variação* 24 *da Rapsódia sobre um tema de Paganini* (1934) de Rachmaninoff, de que já falámos neste texto a propósito de outra simetria. Pode ouvir integralmente a interpretação da Rapsódia, pelo próprio Rachmaninoff (RM19), e tentar descobrir o tema *Dies Irae* na última variação, a um minuto do final da obra.

Já no século XX, também Jacques Brel incorporou o tema *Dies Irae* na sua canção *La mort* (1959) (RM20), que David Bowie interpretou em 1973 numa versão em inglês, *My Death* (RM21), comprovando a imortalidade do tema mas também da escala poderosa que lhe deu forma. Poder que decerto lhe chegou por via da simetria!

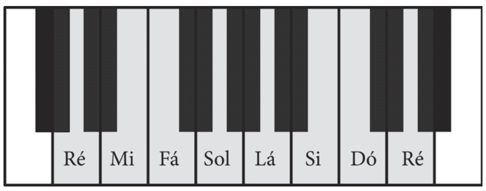

Figura 26. O modo dórico

Figura 27. Tons e meios-tons no modo Dórico. A distribuição de tons e meios-tons nesta escala tem a simetria da capícua

Notas

[1] A autora escreve segundo a antiga ortografia.

[2] Este artigo tem referências a locais na *web* onde podem ser ouvidos trechos musicais ou videos (*youtube*). Essas referências musicais são listadas a seguir. Se o leitor estiver a ler este artigo com a versão pdf aberta no seu computador, as referências musicais dessa versão são *links* directos para esses locais da *web*.

[3] http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:YB4001Canon_Frere_Jacques.png

[4] http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cal%C3%A7ada_da_Pra%C3%A7a_do_Rossio.jpg

[5] Exemplo sugerido pela colega Ana Pereira do Vale, da Universidade do Minho, a quem agradeço.

[6] http://icking-music-archive.org/scores/mozart/spiegel.pdf

Referências Musicais (na versão em pdf, clique para ouvir)

RM1 http://www.youtube.com/watch?v=oS_OfxK8LEo
RM2 http://www.youtube.com/watch?v=H1L4sVxuKZg
RM3 http://www.youtube.com/watch?v=CtSSpAT7rZg
RM4 http://www.youtube.com/watch?v=6E2s57WuFQU7
RM5 http://www.youtube.com/watch?v=bMm_R7RFcMg8
RM6 http://www.youtube.com/watch?v=WLEmVxqye4g9
RM7 http://www.youtube.com/watch?v=oIN_FyhmY8U
RM8 http://www.youtube.com/watch?v=PZ307sMot-012
RM9 http://www.youtube.com/watch?v=h_BArG3ollw
RM10 http://www.youtube.com/watch?v=M8QIaV9ilWc
RM11 http://www.youtube.com/watch?v=wARiOb8oZr016
RM12 http://www.youtube.com/watch?v=J_wD403pqq817
RM13 http://www.youtube.com/watch?v=s9AH-SB59kc18
RM14 http://www.youtube.com/watch?v=NpX517F8H2419
RM15 http://www.youtube.com/watch?v=9qcA9LX7KPg20
RM16 http://www.youtube.com/watch?v=-fMHms5Cvsw21
RM17 http://www.youtube.com/watch?v=3Iw6bCO-nzM22
RM18 http://www.youtube.com/watch?v=3gQfPNt-NNs23
RM19 http://www.youtube.com/watch?v=KL5aiUKPt3Q24
RM20 http://www.youtube.com/watch?v=Qq9-B6REgRI25
RM21 http://www.youtube.com/watch?v=XpW5MdStjoU

Bibliografia

Bach, J. S., *Das Wohltemperierte Klavier*. Teil I, G. Henle Verlag, München, 1974.

Levitin, Daniel J., *This is Your Brain in Music*. Dutton/Penguin, New York, 2006.

Simões, Carlota, *Padrões matemáticos na obra de Mozart*. Encontro MÚSICA e MATEMÁTICA — Actas, Helena Mena Matos e João Nuno Tavares (coordenação editorial), pp. 64–76, Universidade do Porto e Casa da Música, 2006.

Simões, Carlota, *A ordem dos números na música do século XX*. Revista Colóquio Ciências, n° 24, pp. 48–59, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1999.

Simões, Carlota, *Mathematical aspects in the Second Viennese School of Music*. Mathematics and Arts: Mathematical Visualization in Art and Education, pp. 105–117, Editor. Claude P. Bruter, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

Carlota Simões
Faculdade de Ciências e Tecnologia
da Universidade de Coimbra