

# Matemática e cultura

MICHELE EMMER



## RELAÇÕES ENTRE CULTURA E MATEMÁTICA: UMA INTRODUÇÃO

Em 24 de Setembro de 1949 foi publicado um livro destinado a tornar-se famosíssimo: *Le modulator. Essai sur une mesure harmonique à l'échelle humaine applicable universellement à l'architecture et à la mécanique*. Autor: Le Corbusier. Tinha um sonho, o arquitecto francês: «O meu sonho é construir, nas áreas edificáveis que mais cedo ou mais tarde estarão disponíveis no nosso país, uma grelha de proporções desenhada sobre uma parede ou realizada com hastes de ferro, que sirva como indicação para o projecto na sua totalidade, um modelo apresentando uma sequência infinita

de diferentes combinações e proporções, e que os pedreiros, os carpinteiros, os marceneiros deverão consultar sempre que tenham de escolher medidas para os trabalhos que lhes cabem; de modo que todas as várias obras realizadas, embora diferentes entre si, sejam unificadas pela harmonia. Tomemos um homem, com um braço levantado, de tal modo que nessa posição atinja a altura de dois metros e vinte... Com a referida *grelha de construção* desenhada de modo a estar em harmonia com esse homem nela incluído, estou certo de que se obterá uma série de medidas conciliando as dimensões humana e a matemática» [1]. Porquê a matemática?

«A matemática é a magnífica estrutura estudada pelo homem para tentar compreender o universo. Apreende o absoluto e o infinito, o compreensível e o eternamente ambíguo. Possui paredes que se podem subir e descer sem qualquer resultado; mas por vezes há uma porta, que então abrimos, entramos, e damos por nós num outro reino, o reino dos deuses, o lugar que encerra a chave dos grandes sistemas. Estas portas são as portas do milagre.» [1]

Alguns anos depois, em 1958, um artista gráfico holandês que viria a tornar-se famoso, Maurits C. Escher, abria uma outra porta: «Há bastante tempo confrontei-me por acaso com o problema da divisão regular do plano, das figuras que se repetem até ao infinito. Deparei com um muro elevado e, tendo o pressentimento de que escondesse algum enigma, subi-o com alguma dificuldade. Assim que cheguei ao outro lado, encontrei-me num lugar selvagem e tive grande dificuldade em encontrar o meu caminho, senão quando, seguindo um percurso muito sinuoso e complicado, atingi a grande porta aberta da matemática.» [2] Anos depois, no prefácio do seu primeiro livro, Escher acrescentará: «Da análise dos enigmas que nos rodeiam e das considerações e observações que fiz cheguei ao domínio da matemática. Embora seja completamente desprovido de conhecimentos e experiência no domínio das ciências exactas, sinto muitas vezes ter mais em comum com os matemáticos do que com os artistas.»[3]

Na mesma altura em que Escher escrevia estas palavras, o Pato Donald, personagem de Walt Disney, fazia uma viagem ao *reino da Matemática* que terminava com as palavras: [4] «Não há limites para o que a mente humana pode conceber e criar. Todos os dias que passam abrem-se portas para novas conquistas científicas e portas que hoje estão fechadas serão amanhã abertas, com a mesma chave: a matemática! A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o Universo.» (citado de Galileu Galilei).

As relações entre a matemática e as artes, a literatura, a poesia, a arquitectura, a música, o teatro, o cinema, têm uma história antiga que se renova continuamente. Em resumo, a relação entre cultura e matemática é indissociável, a matemática é parte essencial da cultura.

«A matemática é uma força cultural de primeiro plano na civilização ocidental» observou o matemático Morris Kline, em 1953, no livro *Mathematics in Western Culture*. [5] «A matemática determinou a orientação e o conteúdo de grande parte do pensamento filosófico, destruiu e reconstruiu doutrinas religiosas, constituiu os fundamentos de teorias económicas e políticas, moldou os principais estilos pictóricos, musicais, arquitectónicos e literários, está na origem da nossa lógica e deu as melhores respostas que te-

mos às questões fundamentais sobre a natureza do homem e do seu universo... Por fim, sendo uma realização humana imensamente depurada, oferece satisfação e valores estéticos pelo menos semelhantes aos que são oferecidos por qualquer outro domínio da nossa cultura». Dir-se-á, palavras de um matemático!

Não há dúvidas de que nos últimos anos, além de uma intensa utilização de ideias e instrumentos matemáticos em todos os campos do saber e da tecnologia, se verificou um grande desenvolvimento nas relações entre matemática e cultura, a começar pelo teatro, no início dos anos noventa do século passado, mas também no cinema, na arte, na música, na literatura, na arquitectura. Neste último caso, a matemática não aparece apenas como instrumento para a construção, mas também como fonte de inspiração de novas formas e novas ideias.

Não devemos, porém, cair no erro de considerar que a matemática é uma disciplina simples e de fácil divulgação. «A matemática é em si própria um mundo, e é preciso habitá-lo durante bastante tempo para sentir tudo o que lhe pertence de modo necessário», salientou Robert Musil, autor do romance *O jovem Toerless* (1906). [6] Um mundo em si mesmo mas, para empregar uma frase célebre do físico Eugene P. Wigner, não oferece qualquer dúvida a «ilógica eficácia da matemática», não apenas nas ciências da natureza mas também na cultura.

«A matemática não é apenas um dos instrumentos essenciais do pensamento primário, mas igualmente, nos seus elementos fundamentais, uma ciência das proporções, do comportamento objecto a objecto, movimento a movimento. E dado que esta ciência tem em si estes elementos fundamentais e os coloca em relação significativa, é natural que factos semelhantes possam ser representados, transformados em imagens.» Palavras de um grande artista do séc. XX, Max Bill. no artigo «*O pensamento matemático na arte do nosso tempo*», publicado em 1949, o mesmo ano do livro de Le Corbusier.[7]

Entre 20 de Janeiro e 17 de Fevereiro de 1963 realizou-se em Paris, no Palais de la Découverte, um dos templos da divulgação científica em França, uma exposição de arte com o título *Formes: mathématiques peintres sculpteurs contemporains*. Uma exposição que colocava no mesmo plano a pintura e a escultura contemporânea e a matemática. Uma exposição em que estavam expostas obras de artistas de grande relevância: entre os pintores, Max Bill, Paul Cézanne, Robert e Sonya Delaunay, Albert Gleitzes, Juan Gris, Le Corbusier, Jean Metzinger, Peter Mondrian, Ladislav Moholy-Nagy, Georges Seurat, Gino Severini, Sophie Taeuber-Arp, Victor Vasarely. Entre os escultores, Max Bill,

Raymond Duchamp-Villon, Georges Vantergerloo. A exposição estava organizada em três secções: – Mathématiques – Peintres – Sculpteurs. [8] Matemática e cultura, em todos os diversos aspectos. Mas a matemática é uma cultura à parte? E a educação que papel tem em tudo isto?

## AS DUAS CULTURAS

«As mudanças na educação não produzirão milagres. As divisões da nossa cultura farão de nós mais obtusos do que é possível; não traremos à vida mulheres e homens capazes de compreender o nosso mundo como Piero della Francesca, ou Pascal, ou Goethe compreenderam o seu. Porém, com um pouco de sorte, podemos educar uma grande parte das nossas melhores mentes, de tal modo que não sejam alheias às experiências criativas tanto na arte como na ciência». Em 6 de Outubro de 1956 foi publicado no *New Statesman* um artigo de Charles Percy Snow colocando um problema que foi depois desenvolvido numa conferência e ainda num livro três anos mais tarde. O livro intitulava-se *The Two Cultures* [9] e punha em confronto cultura científica e cultura humanística. Abordava temas muito sensíveis, e o livro desencadeou uma prolongada polémica que levou Snow a publicar, alguns anos depois, em 1963, um apêndice ao livro que termina com as palavras citadas no início. Snow era um químico que tivera o azar de em 1932 se enganar nos dados de uma experiência. Isto teve grandes repercussões e determinou o fim da sua carreira científica. Tornou-se escritor. Os seus romances foram publicados em diversas línguas entre 1940 e 1970. Com o livro *The Two Cultures* tornou-se famoso em todo o mundo.

Na introdução à edição de 1993 Stefan Collini, professor de literatura inglesa na Universidade de Cambridge, escreve: «Devemos incentivar o desenvolvimento de uma capacidade intelectual equivalente ao bilinguismo, não apenas a capacidade de usar a língua das nossas respectivas especializações, mas também de ouvir, aprender e eventualmente contribuir para abordagens culturais mais vastas.» Numa palavra, estamos a falar de *interdisciplinaridade*, termo que aponta para um tema, uma matéria, uma metodologia ou uma abordagem cultural que engloba competências de mais campos científicos ou de mais disciplinas de estudo. E é muito significativo que em 16 de Maio de 2013 tenha sido apresentado em Washington, nos EUA, patrocinado conjuntamente pela Smithsonian Institution e pela NSF, National Science Foundation, um *white book* «that will share results and seek feedback from an exploration of challenges and opportunities for transdisciplinary research and creative work, informed by 200 international

contributors. Next we will consider methods for innovative exchanges supporting crossdisciplinary learning across formal and informal education settings»<sup>[1]</sup>, sobre as possibilidades de fazer crescer no mundo os cursos, as teses, os doutoramentos, em poucas palavras os percursos educativos interdisciplinares sobre o tema da arte, da ciência, da tecnologia, das duas culturas. O projecto, denominado *SEAD, Networking Sciences, Engineering, Arts and Design to Confront the Hard Problems of our Time*, concebido e lançado por Roger Malina, astrofísico e humanista, professor de *Arts and Technology* e de *Physics* na *University of Texas in Dallas*, director da mais importante revista de arte, ciência e tecnologia, Leonardo, da MIT Press, prolonga-se pelos próximos anos. [10].

Em 1981, a historiadora de arte americana Linda D. Henderson publicou um livro destinado a mudar o modo como olhamos a arte moderna, a vanguarda artística do séc. XIX, *The Fourth Dimension and Non Euclidean Geometry in Modern Art* [11] — um trabalho que foi continuado por uma segunda edição do livro publicada em Março de 2013, com mais 200 páginas, pela MIT Press [12]. Henderson reconstruiu os percursos através dos quais as novas ideias sobre geometria da segunda metade do séc. XIX, em particular as geometrias não euclidianas e a ideia de quarta dimensão espacial, antes da teoria da relatividade e do espaço-tempo, influenciaram a arte do séc. XX, inclusive através da literatura inspirada nas investigações matemáticas, a começar pelo romance *Flatland* de Edwin Abbot, de 1884. [13]

As fontes científicas e matemáticas que Henderson utilizou são praticamente a totalidade das investigações matemáticas da época. Não afirmando, obviamente, que esta era a única fonte de inspiração para os artistas da época, mas mostrando como é complexa e fascinante a destriça dos fios de Ariana que levam à formação de novas ideias na ciência e na arte.

«O de filosofia esforça-se o máximo para nos convencer que a sua disciplina é útil. Todos querem convencer-nos que ensinam coisas úteis. Todos excepto o de matemática. Esse disse-nos logo no primeiro dia que a matemática não serve para nada.» «A matemática é importante. Tal como a filosofia: mesmo se nem a matemática nem a filosofia têm respostas para a grande questão. Tolstoi ou Dostoiévski?» Diálogo entre Claude e o seu professor German, na peça de teatro *O rapaz da última fila*, do escritor espanhol Juan Mayorga, [14] diálogo retomado no filme *Dans la maison* [*Dentro da Casa*, em português] de François Ozon. [15]. «Agora vamos rever os números imaginários. E se pensas sequer levantar o rabo dessa cadeira obrigo-te a comer os apontamentos, percebes, poeta? Finalmente entraram-me

na cabeça os números imaginários. É como jogar sem bola. Existem apenas na cabeça. Mas podem-se somar, multiplicar...», diálogos da peça de Mayorga.

«Diz-me, compreendeste esta coisa? Isto dos números imaginários. Sim. Não é muito difícil. Tudo o que é preciso saber é que a raiz quadrada de menos um é a unidade com que se deve calcular. Mas como pode fazer-se tal coisa sabendo, com certeza matemática, que é impossível? (...) O que me faz estremecer é a força contida num tal problema, uma força que nos agarra tão firmemente que no fim aterrámos sãos e salvos do outro lado.»

Palavras extraídas de *O jovem Toerless*, um diálogo entre o protagonista e o seu amigo Beineberg. Esta lição sobre números imaginários desperta no protagonista «uma veneração pela matemática, que subitamente deixara de ser uma matéria morta para se tornar em qualquer coisa muito viva».

O professor dele (de Toerless) acrescenta:

«No que diz respeito à matemática (...) admito sem mais que por exemplo estes números imaginários, estas quantidades que na realidade não existem, são um osso duro de roer para um jovem estudante. Tem de aceitar o facto de que tais conceitos matemáticos são inerentes à natureza do pensamento puramente matemático (...) A matemática é em si própria um mundo, e é preciso habitá-lo durante bastante tempo para sentir tudo o que lhe pertence de modo necessário.»

A matemática como fonte de inspiração para dizer outra coisa, para visualizar outra coisa, para imaginar outros mundos. E de que trata o cinema, desde os seus começos? O imaginário do cinema que se casa com o imaginário da matemática e da literatura. Por vezes o resultado deste encontro é surpreendente, porque «a matemática nunca desilude».

É uma das frases chave do filme de François Ozon. A certa altura o protagonista tem nas mãos o livro de Musil, vê-se distintamente a capa. E a palavra «imaginário» repete-se mais vezes nos diálogos. O aluno escreve, conta, imagina, deixando o professor fascinado, atraído. O aluno introduz-se na casa dos pais de um colega de turma e, a pouco e pouco, passa a fazer parte integrante da família. Ou antes, constrói uma narrativa, cada vez mais elaborada, mais realística, mas talvez completamente imaginária, na qual todas as pessoas que vivem naquela casa se tornam ou personagens da história contada pelo aluno ou imagens da sua reconstituição pelo professor ou ainda imagens no filme, imagens ambíguas, como ambíguo é o aluno. História que deveria chamar-se, segundo o aluno, *Os números imaginários*, e segundo o professor, *O rapaz da última fila* porque «o título obriga-nos a assumir uma responsabilidade», como escreve Mayorga no texto teatral. O realizador do filme mudou o título da peça de teatro. Disse Ozon que

«o dispositivo de alternância entre a realidade e a história das criações do aluno pareceu-me imediatamente adequado a uma reflexão lúdica sobre o imaginário e os métodos narrativos». A palavra «matemática» surge muitas vezes no filme, a própria estrutura do filme é uma espécie de «arte combinatória» das várias situações, personagens, invenções imaginadas pelo estudante escritor. Que na peça original é muito bom em matemática, aspecto deixado na sombra no filme, embora ele dê lições de matemática ao colega, sobre números imaginários. Imaginário, realidade, existência, construção, invenção, escrita, narração. O filme encerra todos estes aspectos. Tal como no romance de Musil. Porque «a matemática nunca desilude». Nem no cinema, se for usada como fonte do imaginário.

Desde há muitos anos que comecei a ocupar-me das relações entre matemática, arte, cinema, literatura, arquitectura, numa palavra entre a matemática e a cultura, tendo claro para mim que o meu interesse era também pelas possíveis consequências educativas nos cursos que dei na universidade. Com a ambição de que as pesquisas feitas nos diversos domínios pudessem ser úteis a estudantes, professores, e também aos apaixonados pela cultura.

## A MINHA EXPERIÊNCIA

A partir de 1976 comecei a interessar-me pelas conexões entre a matemática e as artes visuais, a arquitectura, e as outras disciplinas científicas. Inicia-se o projecto *Matemática e arte*. Além de escrever artigos e livros, realizei 18 filmes da série *Arte e matemática*, [16] traduzidos em inglês, francês e castelhano, projecto em que participaram muitos matemáticos de diversas universidades, entre os quais Fred Almgren e Jean Taylor, Princeton University, Linda D. Henderson, Texas University, Thomas Banchoff, Brown University, Donald Coxeter, Toronto University, Roger Penrose, Oxford University. E artistas, como Max Bill, Salvador Dalí, Bruno Veronesi, Arnaldo Pomodoro, Bruno Munari e muitos outros, com a colaboração de museus e instituições culturais de todo o mundo.

Em 1985 tem início o projecto *M. C. Escher* em colaboração, entre outros, com R. Penrose e D. Coxeter. Organizei, entre outras iniciativas, o congresso e a exposição sobre Escher na Universidade de Roma e no Instituto Holandês de Roma, em 1985. As actas do congresso, de que fui editor com D. Coxeter, R. Penrose e M. Teuber, foram publicadas pela Elsevier, de Amesterdão, em 1985 e tiveram várias edições, tornando-se num livro de referência para quem se ocupa deste tema. [17] Iniciei neste mesmo ano a realização do filme sobre Escher.[18].

A partir de 1989 comecei a produzir exposições ligadas ao tema da arte e matemática, com a exposição itinerante *L'occhio di Horus: itinerari nell'immaginario matematico*, financiada pelo Instituto da Enciclopédia Italiana, em colaboração com a *Cité de Science de la Villette* de Paris. Depois fui curador da secção de matemática da Città della Scienza de Nápoles, destruída num incêndio doloso em Março de 2013. Realizei a segunda exposição e congresso internacional sobre Escher, na Universidade de Roma, em 1998. As actas foram editadas, em colaboração com Doris Schattschneider, pela Springer verlag. [19]

Em 1993 inicio o projecto *The Visual Mind* em colaboração com a MIT Press. Já foram publicados dois volumes com a colaboração de matemáticos e artistas, entre os quais Max Bill, Roger Penrose e Donald Coxeter, Martin Kemp e muitos outros [20].

A partir de 1997 tem início o projecto *Matemática e Cultura* na Universidade de Ca' Foscari em Veneza, um encontro que não se dirige apenas aos matemáticos, aos professores e aos estudantes do secundário. Todos os anos se realiza um encontro sobre o tema, com matemáticos, artistas, filósofos, arquitectos, músicos, escritores, realizadores de cinema. Já entrevistaram 350 oradores ao longo destes anos e esse encontro tornou-se uma referência quanto aos temas aí tratados. As actas são publicadas pela Springer. Os encontros continuam e o próximo que se realiza de 28 a 30 de Março de 2014, será divulgado através do site <http://www.mat.uniroma1.it/venezia2014>, que estará activo a partir de Outubro de 2013.

Os temas tratados têm a ver com as conexões entre a matemática e a arte, a arquitectura, o cinema, o teatro, a literatura, a poesia, as aplicações, a medicina, a morfologia, a música, a animação computadorizada, a banda desenhada e muitos outros. No decurso dos anos, participaram nos vários encontros, todos os anos, cerca de uma centena de estudantes e meia centena de professores, apesar dos encontros não terem sido pensados apenas para eles. E desde há alguns anos participam estudantes e professores de toda a Itália, mesmo nestes últimos anos de crise.

Era inevitável que destas experiências nascesse também a ideia de criar cursos que tratassem de muitos dos temas de matemática e cultura que têm estado no centro das questões em discussão nos encontros e nas demais iniciativas.

A partir de 2004 comecei a dar um curso chamado *Espaço e forma* dedicado aos estudantes do último ano do mestrado em matemática e do mestrado em design. O simples facto de ter no mesmo curso estudantes de dois mestrados diferentes era por si só uma grande novidade. Queria experimentar em concreto a minha experiência de vários anos

de pesquisas interdisciplinares. Obviamente, havia partes do curso que tinham sido pensadas sobretudo para os estudantes de matemática, e outras para os estudantes de *design* industrial. A partir do mesmo ano, comecei também a dar um curso *Conexões interdisciplinares da matemática* a um grupo de professores.

Eis alguns dos temas tratados nos diversos cursos:

- A ideia de espaço: as novas geometrias, a evolução da ideia de espaço, as influências sobre as vanguardas artísticas dos princípios do séc. XX e sobre a arquitectura.
- A ideia de transformação, de metamorfose.
- As formas regulares no espaço a três dimensões. Do *Timeo* de Platão à redescoberta dos sólidos no Renascimento. Luca Paccioli, Piero della Francesca, até Kepler. Os sólidos semi-regulares, sólidos de Catalan, estrelados. As estruturas matemáticas de Lucio Saffaro.
- A quarta dimensão: das formulações iniciais em *Flatland* aos politopes a quatro dimensões de Coxeter às arquitecturas virtuais. A influência sobre a pintura e sobre a arquitectura do séc. XX. Buckminster Fuller.
- A importância da topologia. Partindo da banda de Moebius e dos primeiros exemplos de superfícies topológicas, até chegar às aplicações na arte (Max Bill, Bruno Munari), na arquitectura (Eiseman, van Berkel, Ghery), nas artes gráficas, no cinema.
- A técnica de animação: da animação tridimensional com objectos reais até à técnica da animação 2D no cinema, com aplicações à geometria (em colaboração com Gian Marco Todesco, da Digital Video).
- A simetria, os grupos cristalográficos, células elementares e elementos geradores.
- Pavimentações possíveis e classificação. Aplicações a diversos tipos de mosaicos em diferentes épocas.
- As estruturas matemáticas na obra de Escher: as simetrias, as geometrias não euclidianas.
- A animação e os desenhos de Escher, os modelos matemáticos, as formas impossíveis.
- As superfícies mínimas, as bolas de sabão. O problema matemático, o problema de Plateau. Aplicações dos modelos em arquitectura e história da evolução dos problemas, com referências à história da arte no séc. XV em paralelo com a evolução dos problemas científicos.
- As relações entre a matemática e o cinema, entre a matemática e o teatro, com exemplos. Projecção de excertos de filmes e de espetáculos teatrais.

- Um caso interessante: as curvas. História das descobertas dos diversos tipos de curvas. A importância, nos diversos períodos históricos dos tipos de curvas. Estudo em rede das suas equações e propriedades.
- Os fractais, dos algoritmos de Mandelbrot ao estudos das diferentes formas.
- Matemática e literatura. Como a matemática influenciou alguns escritores a partir do séc. XIX. Os modelos e sua utilização.

Seguem-se, como textos recomendados, alguns dos livros que escrevi nos últimos anos, além de muitos outros de diversos autores que são referidos nas diversas lições:

- M. Emmer, *Architettura topologica fluida*, in C. Bartocci, *La Matematica*, vol. 3, Einaudi, Torino, 2011
- M. Emmer, *Numeri immaginari: Cinema e matematica*, Bollati Boringhieri, Torino, 2011
- M. Emmer, editor, *Flatlandia* con DVD, 2009, casa editrice Bollati Boringhieri, anno 2008
- M. Emmer, *Visibili armonie: arte, cinema, teatro, matematica*, Bollati Boringhieri, 2006
- M. Emmer, *Le bolle di sapone*, Bollati Boringhieri, 2009
- M. Emmer, *Mathland: dal mondo piatto alle ipersuperfici*, Birkhauser, 2004.
- M. Emmer, M. Manaresi, «*Matematica, arte, tecnologia, cinema*», Springer, 2001
- Os volumes da coleção M. Emmer, editor, *Matematica e cultura*, Springer, em italiano e em inglês. Os volumes da coleção *Imagine Math*, Srpinger, em inglês.
- Os filmes da série *Art and Mathematics*.

## ALGUMAS OBSERVAÇÕES FINAIS

Desde há quase dez anos que tenho vindo a fazer estes cursos completamente novos no panorama universitário italiano. Devo dizer que estou muito satisfeito com as reacções dos estudantes. O curso de mestrado em matemática está dividido em três ramos principais: matemática pura, matemática aplicada, didáctica e história da matemática. No meu curso participam estudantes de todos os três ramos, e são muitos os estudantes que escolhem teses interdisciplinares. Inicialmente houve uma certa desconfiança da parte dos outros professores do departamento, mas também na sequência do bom acolhimento por parte dos estudantes o curso tem sido retomado todos os anos sem qualquer objecção. Naturalmente, um dos problemas é que não é con-

cebível, pelo menos nos nossos dias, que exista alguma possibilidade de uma carreira académica dedicada a temas realmente interdisciplinares. É uma enorme limitação, não sendo possível criar cursos de doutoramento, nem bolsas de estudo, e no entanto, mesmo no curso para professores que darei também no próximo ano, verificou-se existir um grande interesse por um modo totalmente novo de apresentar a matemática e o seu papel na cultura. Muitos professores elaboraram lições-piloto para testarem com os estudantes nas suas escolas dando continuidade a alguns dos temas estudados, o que poderá seguramente facilitar o despertar de interesse por parte dos estudantes.

Numa palavra, parece-me que a experiência se pode considerar bem sucedida.

Acredito assim que este é um facto importante e um momento favorável e penso também que a iniciativa de publicar um número da revista *Educação e Matemática* dedicado a este tema é um facto importante e significativo. E que o confronto entre as diversas experiências nos diferentes países, pelo menos a nível europeu, possa ser de grande interesse para o futuro. Estamos sempre a ouvir falar dos problemas económicos da Europa como se a principal motivação para a reunificação europeia não devesse ser, depois de tantos séculos de guerras e destruições, o empenhamento comum em melhorar cada vez mais a vida das populações do continente. E ninguém duvida que uma maior difusão da cultura científica e humanista seja um dos principais meios de contribuir para o crescimento da Europa.

## Bibliografia

- [1] Le Corbusier, *Le Modulor. Essai sur une mesure harmonique à l'échelle humaine applicable universellement à l'architecture et à la mécanique*, Éditions de l'Architecture d'Aujourd'hui, coll. Ascoral, 1949,
- [2] M. C. Escher, *Regelmatige vlakverdeling*, Stichting De roos, Utrecht, 1958, em francês F. H. Bool, J. R. Kist, J. L. Locher, F. Wierda, Bruno Ernst, *La Vie et L'oeuvre de M. C. Escher*, Chene-Hachette, Paris, 1981, p. 156.
- [3] M. C. Escher, *The Graphic Work of M. C. Escher*, Macdonald and Co, London, 1961, pp. 8.
- [4] *Donald Duck in Mathmagic Land*, realização Hamilton Luske, director artístico Stan Jolley, argumento Milt Banta, Bill Berg e Heinz Haber, Walt Disney Production, USA, 1959.
- [5] M. Kline, *Mathematics in Western Culture*, Oxford University Press, Oxford, 1953.
- [6] R. Musil, *Die Verwirrungen des Zöglings Törleß*, 1906.
- [7] M. Bill, *The Mathematical Way of Thinking in the Visual Art of Our Time*, in M. Emmer, ed. *The Visual Mind*, MIT

- Press, 1993, p. 5–9. Publicado originalmente em alemão in *Werke 3*, 1949.
- [8] FORMES, *mathématiques, peintres, sculpteurs contemporains*, catálogo da exposição na Universidade de Paris, Palais de la Découverte, 2 Janeiro–17 Fevereiro 1963. Exposição Palais de la Découverte.
- [9] C. P. Snow, *The Two Cultures*, Cambridge University Press, 1959, adição da segunda parte 1964.
- [10] SEAD project: [http://sead.viz.tamu.edu/projects/LE\\_studychart.html](http://sead.viz.tamu.edu/projects/LE_studychart.html)
- [11] L. D. Henderson, *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art*, Princeton University Press, 1983.
- [12] L. D. Henderson, *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art*, edição revista, MIT Press, 2013.
- [13] E. A. Abbott, *Flatland*, 1884; nova edição com texto em italiano e em inglês, M. Emmer, ed, Bollati Boringhieri, Torino, 2008, com inclusão do DVD do filme *Flatland*, realização M. Emmer, edições inglesa e italiana, música de Ennio Morricone.
- [14] J. Mayorga, *Teatro*, Ubulibri, Milano, 2008
- [15] *Dans la maison*, realização e argumento de François Ozon, a partir do texto teatral *Il ragazzo dell'ultimo banco*, de Juan Mayorga, com Fabrice Lucini, Ernst Umhauer, Kristin Scott Thomas, Emmanuelle Seigner, Denis Menochet, Bastien Ughetto, França (2012).
- [16] M. Emmer, realização e argumento, *Art and Mathematics*, 18 film, DVD, 30 m., 1984–2000, info: [emmer@mat.uniroma1.it](mailto:emmer@mat.uniroma1.it).
- [17] H. S. M. Coxeter, M. Emmer, R. Penrose, M. Teuber, eds., *M. C. Escher: Art and Science*, North-Holland Elsevier, Amsterdam, 1986.
- [18] *The Fantastic World of M. C. Escher*, regia di M. Emmer, con H.S.M. Coxeter, R. Pernose, B. Ernst, C. Macgillavry, 50m, DVD em italiano, inglês, francês, castelhano. M. Emmer prod & Film 7 Int, Escher film, info: [emmer@mat.uniroma1.it](mailto:emmer@mat.uniroma1.it).
- [19] M. Emmer, D. Schatschneider, eds. *M. C. Escher's Legacy*, Springer verlag, 2003.
- [20] M. Emmer, ed. *The Visual Mind: Art and Mathematics*, MIT Press, 1993. \_\_\_\_\_, ed. *The Visual Mind II: Art and Mathematics*, MIT Press, 2005

#### Notas de tradução

- 1 «que partilhará resultados e procurará reacções a partir da exploração de desafios e de oportunidades para a investigação transdisciplinar e para o trabalho criativo, com o suporte de 200 participantes internacionais. Depois tomaremos em consideração métodos para trocas inovadoras apoiando a aprendizagem interdisciplinar em ambientes educativos formais ou informais». Em inglês no original.
- 2 Tradução de Eduardo Veloso (revista por José Ferreira de Lima). O tradutor escreve de acordo com a antiga grafia.

MICHELE EMMER

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA LA SAPIENZA

## MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

A tarefa que aqui apresentamos tem por base uma das peças de Sol LeWitt, descrita no artigo de Eliana Pinho, também desta revista. Trata-se de uma proposta com muito potencial no que respeita ao desenvolvimento do raciocínio espacial e que pode ser trabalhada em todos os ciclos do ensino básico até ao ensino secundário, com diferentes níveis de discussão e aprofundamento. Por exemplo, no que respeita à primeira pergunta, o número mínimo de arestas será três, no entanto, para se manter uma estrutura tridimensional, será necessário que as arestas sejam não coplanares, uma ideia que para alunos mais novos pode ser traduzida por não pertencerem à mesma face. Um outro aspeto sensível nesta proposta, diz respeito à distinção entre casos diferentes. Se no plano consideramos que duas figuras que se obtêm uma a partir da outra por reflexão são

congruentes, no espaço duas figuras ou sólidos nestas condições são considerados enantiomórficos. Não se trata evidentemente de introduzir este conceito, ou ter a preocupação de estabelecer esta regra, mas sim criar oportunidades para a discussão de ideias matemáticas com os alunos que são muito pertinentes. Por este motivo, propomos que a tarefa seja realizada numa fase inicial em pequenos grupos e, posteriormente, seja discutida em grande grupo. Também será fundamental utilizar materiais que podem ser simplesmente palitos e pedaços de plasticina para os alunos unirem as arestas e representarem as suas estruturas.

LINA BRUNHEIRA

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO DE LISBOA