Polígonos de Reuleaux e a generalização de π

José Luiz Pastore Mello

Um mecanismo muito conhecido desde os tempos antigos para o transporte de blocos de pedra consiste em apoiá-los sobre cilindros rolantes. Tal método, usado, por exemplo, pelos antigos egípcios durante a construção das pirâmides, permitia que imensos monolitos fossem deslocados de maneira relativamente estável por conta de que cilindros são sólidos formados por figuras de diâmetro constante (círculos) ao longo do seu comprimento, e isso assegura que o bloco arrastado fique sempre à mesma distância do chão durante o transporte. A figura 1 mostra, em vista lateral, um monolito sendo transportado sobre cilindros de diâmetro da base igual a 1 m.

A pergunta que proponho ao leitor, para início da nossa investigação, é a seguinte: além da forma circular, existe alguma outra que, ao «rolar», também preserve fixa a distância do bloco transportado até o solo?

Por estranho que pareça, além do círculo, existem infinitas outras formas geométricas planas de diâmetro constante e, sendo assim, qualquer sólido reto com secções paralelas à base (e que seguem seu comprimento) com uma mesma dessas formas geométricas planas de diâmetro constante será um substituto do cilindro no problema em questão.

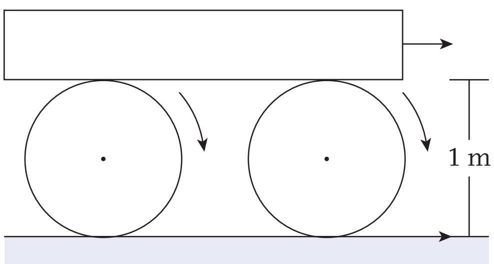


Figura 1

O triângulo de Reuleaux é um exemplo simples de forma geométrica plana não circular de diâmetro constante. O nome desse triângulo foi dado em homenagem ao engenheiro alemão Franz Reuleaux que, no século 19, projetou mecanismos envolvendo essa forma geométrica. Reuleaux é considerado por muitos historiadores da ciência como sendo o pai da cinemática por suas contribuições a essa área da física.

Apesar do nome, o triângulo de Reuleaux não é propriamente um triângulo, mas, sim, uma curva formada a partir de um triângulo equilátero da seguinte maneira: partindo de um triângulo equilátero ABC de lado L, fazemos três arcos de circunferência de raio L, centrados em A, B e C, conforme indica a figura 2; a figura obtida é chamada de triângulo de Reuleaux.

Não é difícil imaginar um sólido reto — com triângulos de Reuleaux nas secções paralelas — substituindo o cilindro no problema do transporte do bloco. Ao «rolar» esse sólido sobre o chão, a distância entre o ponto do bloco em contato com o sólido e o chão será sempre de 1 m (figura 3)

Normalmente os textos de matemática se referem às figuras como o círculo e o triângulo de Reuleaux como formas de largura constante, porém, por razões particulares que ficarão claras ao final deste artigo estamos dizendo que são formas de diâmetro constante. Neste caso, é importante que seja esclarecido o que estamos chamando de diâmetro de uma figura plana.

Sem apelo ao rigor matemático, imaginemos a seguinte situação: sejam r e s retas paralelas girando em torno de uma curva fechada convexa λ de forma que λ sempre fique «perfeitamente espremida» entre r e s, sendo P e Q os pon-

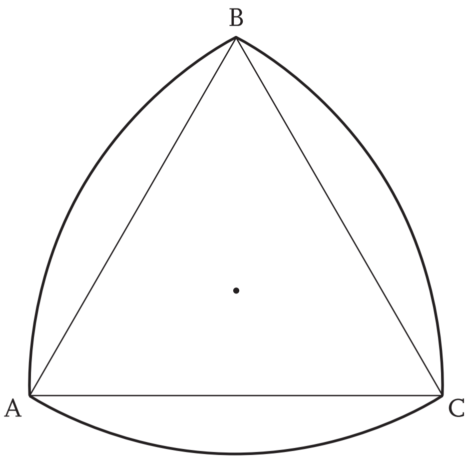


Figura 2

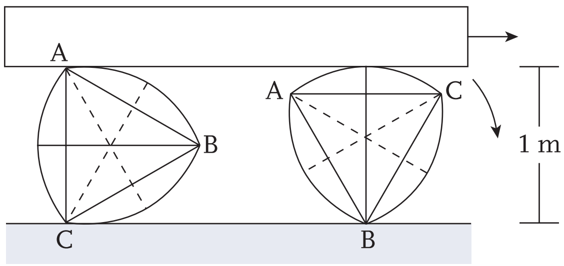


Figura 3

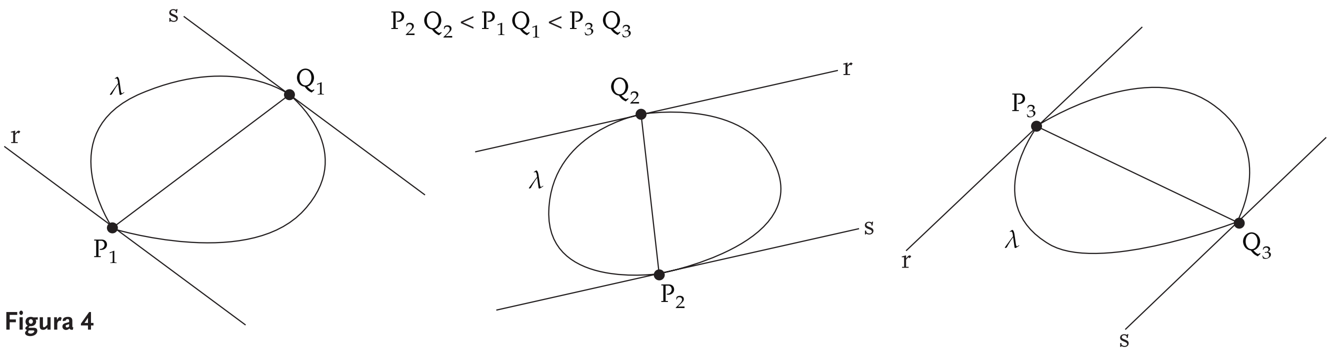


Figura 4

tos de intersecção de r e s com λ (assuma que esses pontos sejam únicos). Nesse caso, chamaremos a distância entre P e Q de um diâmetro de λ. Ao girarmos r e s na condição estabelecida, podemos verificar «intuitivamente» que o diâmetro de λ poderá ser constante, como no caso do círculo e do triângulo de Reuleaux, ou não, como no caso da figura 4.

Aos leitores interessados em uma definição precisa de curvas de largura (diâmetro) constante envolvendo conhecimentos elementares de cálculo recomenda-se a referência [1].

A título de ilustração, na figura 5 indicamos o maior diâmetro de três curvas fechadas convexas.

De forma geral, chamamos de polígono de Reuleaux a uma curva particular do universo das curvas de diâmetro constante, obtida a partir de um polígono convexo com a regra descrita a seguir. O polígono de Reuleaux tem que ser formado por arcos circulares, de mesmo raio, centrados nos vértices opostos aos lados do polígono. Algumas consequências e desdobramentos da definição dada são:

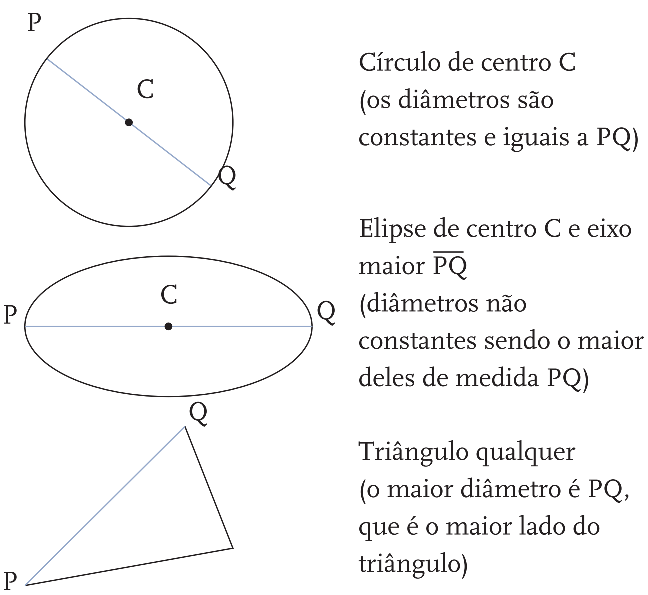
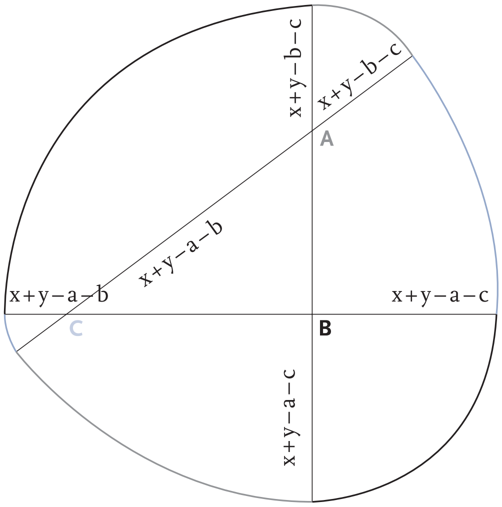


Figura 5



x = soma dos maiores lados do triângulo ABC (no caso da figura, x=a+b)

Figura 6

1. Só existem polígonos de Reuleaux obtidos a partir de polígonos com número ímpar de lados.
2. É possível construir curvas de diâmetro constante a partir de triângulos irregulares, porém, para que um triângulo possa ser usado como referência para a construção de um triângulo de Reuleaux ele tem que ser regular (isso porque polígonos de Reuleaux têm que ser formados por arcos circulares de mesmo raio). Veja na figura 6 uma curva que, apesar de ter diâmetro constante, e de ter sido obtida a partir da referência de um triângulo, não é denominada de triângulo de Reuleaux.

Observe que a figura 6 descreve um procedimento geral para construção de curvas de diâmetro constante a partir de triângulos quaisquer. No caso particular em que o triângulo ABC é regular, com a=b=c, a construção descrita produzirá três arcos de mesmo raio, formando um triângulo de Reuleaux.

Encontramos curvas de diâmetro constante e, em particular, polígonos de Reuleaux em vários contextos aplicados como, por exemplo, nas moedas britânicas de 20 e de 50 pence, que são aproximadamente heptágonos de Reuleaux. No caso dessas moedas, consegue-se uma estética diferente do padrão circular mantendo-se o diâmetro bem determinado, que é um imperativo para o seu uso em máquinas de refrigerantes ou de jogos. Uma curiosa aplicação do triângulo de Reuleaux se deve ao engenheiro inglês Harry James Watt, que, em 1914, aproveitando as propriedades da curva, concebeu uma broca de furadeira com eixo flexível para fazer furos com a forma aproximada de um quadrado. A forma aproximada do triângulo de Reuleaux também é usada na fabricação de algumas palhetas de violão, e em alguns tipos de lápis e lapiseiras. Em ambos os casos o que se supõe é que curvas de diâmetro constante são mais ergonômicas para o manuseio.

Atividades com curvas de diâmetro constante no Ensino Fundamental[1]

Nós, professores, frequentemente nos vemos diante de temas matemáticos de grande potencial para mobilizar o interesse matemático do aluno e, por vezes, desperdiçamos a oportunidade em mergulhar no assunto por julgá-lo complexo. Em alguns casos, esse receio está associado ao fato de que o professor de matemática não se sente confortável em contextos onde tem que abrir mão da precisão da linguagem, do rigor conceitual ou das demonstrações. Outro ponto de vista, do qual compartilho, é o de que não devemos perder a oportunidade de abordar temas complexos se por meio deles for possível fazer matemática interessante e desafiadora com nossos alunos. Nesse caso, é decisivo para o êxito da aula que o professor faça uma boa seleção dos problemas que serão propostos aos alunos, e que faça uma escolha cuidadosa da escala de aprofundamento, abrangência e rigor que irá utilizar.

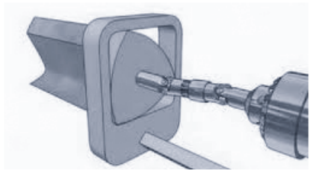
A seguir são sugeridas algumas atividades com curvas de diâmetro constante no Ensino Fundamental que, se por um lado abrem mão do aprofundamento que o tema exigiria no escopo de uma pesquisa matemática, por outro tem o mérito de colocar o aluno na linha de frente de interessantes problemas matemáticos. Ao final de cada problema segue a resposta e um comentário para aprofundamento do professor no assunto em questão.

1) Calcule e compare as áreas de um triângulo de Reuleaux (A_T), formado a partir de um triângulo equilátero de lado 1, e de um círculo (A_C) de diâmetro 1.

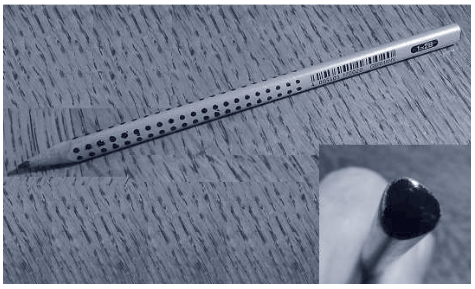
   Resposta: $A_T = \dfrac{\pi - \sqrt{3}}{2} < A_C = \pi$

Comentário: Das curvas planas fechadas convexas de uma dada largura constante, o triângulo de Reuleaux é a de menor área, o que é conhecido como teorema de Blaschke-Lebesgue. Na terceira dimensão, dentre todos os sólidos de uma mesma largura constante dada, ainda não se sabe qual é o de menor volume. Curiosamente, o tetraedro de Reuleaux (ou tetraedro esférico), que seria o sólido obtido a par-

(a) Moeda inglesa de 50 pence
(heptátogo de Reuleaux)



(b) Broca com a forma de triângulo de Reuleaux para fazer furos «quadrados» (o eixo é flexível devido ao fato de que não há um centro em posição fixa)



(c) Lápis cujas secções transversais têm a forma aproximada de um triângulo de Reuleaux

(d) Palheta em forma aproximada de um triângulo de Reuleaux

Figura 7

tir da intersecção de quatro esferas de raio r centradas nos vértices de um tetraedro regular de aresta r, sequer é um sólido de largura constante. Tal resultado foi demonstrado em 1911 pelo matemático suíço Ernest Meissner, que também propôs os ajustes necessários ao tetraedro de Reuleaux para transformá-lo em um sólido de largura constante (sólido de Meissner). Um caso particular do problema em questão cuja solução já é conhecida é: dentre os *sólidos de revolução* que têm uma mesma largura constante dada, o de menor volume é aquele obtido por meio da rotação do triângulo de Reuleaux em torno de um de seus eixos de simetria. Para mais detalhes, ver referência [2].

2) Calcule e compare os perímetros de um triângulo de Reuleaux (P_T), formado a partir de um triângulo equilátero de lado 1, e de um círculo (P_C) de diâmetro 1.

   Resposta: $P_T = P_C = \pi$

Comentário: curvas de mesmo diâmetro, como no caso das figuras deste problema, apresentam sempre o mesmo perímetro. Esse resultado é conhecido como teorema de Barbier.

3) Construa com régua e compasso um pentágono de Reuleaux.

   Resposta: o procedimento é análogo ao do triângulo de Reuleaux, partindo de um pentágono regular.

Comentários: É possível construir curvas de diâmetro constante (formas de Reuleaux) a partir de qualquer polígono, desde que ele tenha um número ímpar de lados (figura 8).

4) Construa em papel cartão um triângulo de Reuleaux e um círculo. As duas figuras têm que ter mesmo diâmetro. Recorte-as com tesoura e mostre experimentalmente que, quando colocadas entre duas réguas

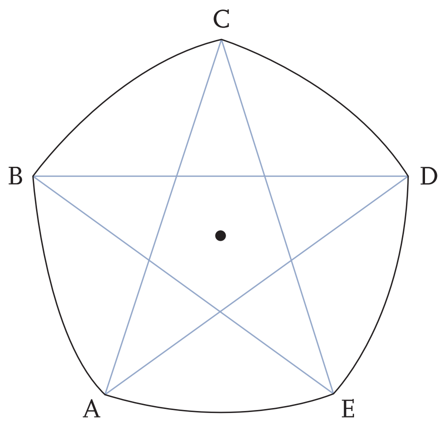


Figura 8

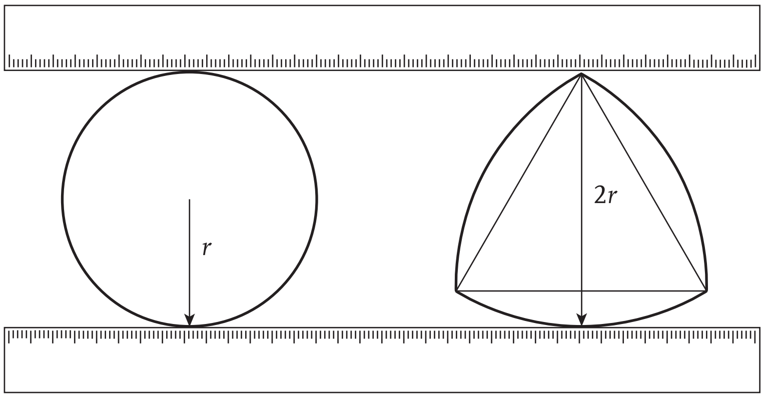
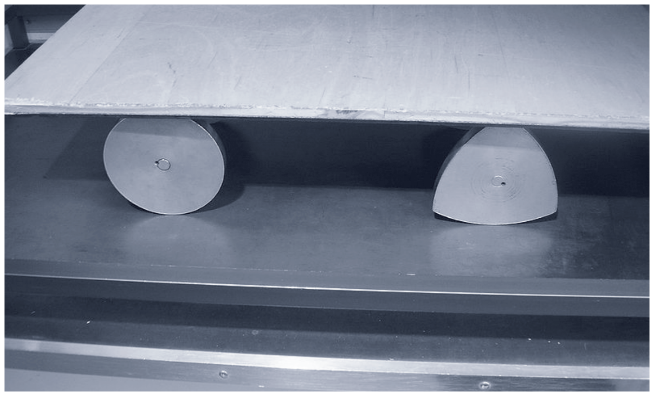


Figura 9



Sólidos em metal construídos a partir de moldes de círculo e de triângulo de Reuleaux.

posicionadas em paralelo, as réguas deslizam suavemente sobre as figuras, seja qual for sua posição.

Resposta: ver figura 9.

Comentário: Havendo possibilidades, recomendo a construção de peças em madeira ou metal a partir dos moldes em papel cartão obtidos pelos alunos. A respeito disso, não deixe de visitar a página-web indicada na referência [3].

Uma generalização de π

No círculo, a razão entre o perímetro e o diâmetro é denotada por π. Agora que ampliamos a definição de diâmetro de uma curva plana, é natural que se tenha interesse em saber se a razão entre o perímetro e o diâmetro é igual para todas as curvas planas fechadas, limitadas e convexas mesmo sem diâmetro constante.

Para essa investigação, a partir de agora denotaremos a generalização dessa razão por pi, e a definiremos da seguinte maneira:

$$pi(curva) = \frac{\text{perímetro da curva}}{\text{diâmetro da curva}}$$

(*) aqui chamaremos de diâmetro da curva ao valor *máximo* dos diâmetros de que havíamos definido anteriormente.

Com essa definição, o valor de pi depende apenas da forma da curva, e não do seu tamanho. Por exemplo, verifique você que:

pi (círculo) = π

pi (triângulo equilátero) = 3

pi (triângulo retângulo isósceles) = $1 + \sqrt{2} \approx 2,414$

pi (triângulo qualquer) = $\dfrac{\text{perímetro do triângulo}}{\text{comprimento do maior lado*}}$

(*) Pode-se demonstrar que o diâmetro de um triângulo qualquer sempre será seu maior lado

pi (quadrado) = $2\sqrt{2}$

(no quadrado, o diâmetro é a sua diagonal)

Talvez, neste momento, o leitor esteja levantando a hipótese de que, dentre todas as curvas de mesmo diâmetro, o círculo seja a de maior valor de pi. Isso de fato é verdadeiro, porém, é necessário ressaltar mais uma vez que as curvas permitidas nessa «disputa» devem ser fechadas, limitadas e convexas, caso contrário seria perfeitamente possível encontrar uma curva de mesmo perímetro de um círculo e com valor de pi maior do que π, como se vê na figura 10.

Pode-se demonstrar que, se o domínio de pi estiver restrito às curvas fechadas, limitadas e convexas, então o círculo será a curva que maximiza o valor de pi.

Ao analisarmos pi para os quadriláteros convexos, é fácil demonstrar que os losangos não quadrados têm pi menor do que pi dos quadrados de mesmo perímetro, como se vê na figura 11.

Um pouco mais difícil seria a demonstração do seguinte resultado: dentre todos os retângulos de lados x e y, o de maior pi será aquele com $x = y$, ou seja, o quadrado. Para uma demonstração desse resultado, consulte a referência [4].

Além daquilo tudo que já foi dito, um resultado verdadeiramente surpreendente é o de que o quadrado, que tem o maior pi dentre os quadriláteros usualmente chamados de notáveis, não é o quadrilátero convexo de maior pi. O quadrilátero convexo de maior pi é uma pipa[2], cuja investigação será proposta em um dos exercícios sugeridos a seguir.

Círculo de perímetro 1 e diâmetro AB e curva não convexa de perímetro 1 e diâmetro AB < AB. Segue que:

$$pi = \frac{1}{A'B'} > \frac{1}{AB} = \pi$$

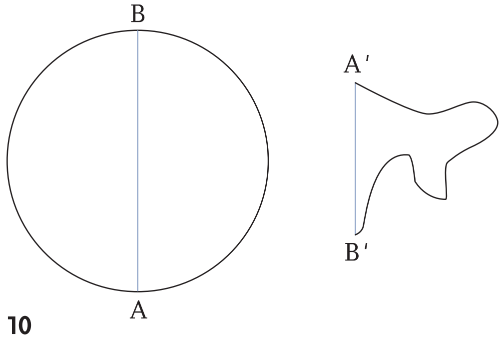


Figura 10

Quadrado de lado ℓ, perímetro 4ℓ e diâmetro $AB = \ell\sqrt{2}$.
Losango de lado ℓ, perímetro 4ℓ e diâmetro $AB > AB$.
Note que $AB < 2\ell$ (condição de existência do triângulo).
Segue que $\ell\sqrt{2} < AB < 2\ell$ e, portanto,
pi(quadrado) > pi(losango).

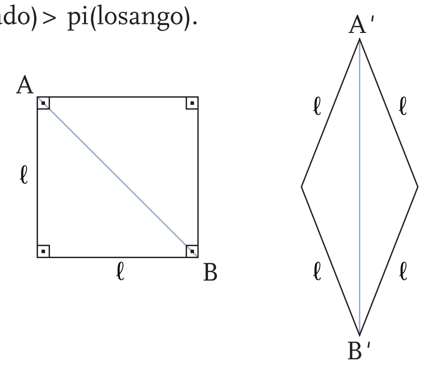


Figura 11

Atividades com a generalização de π no Ensino Médio[3]

Inúmeros problemas interessantes a respeito de curvas de diâmetro constante, e da generalização da razão entre o perímetro e o diâmetro de uma curva, podem ser propostos para alunos do Ensino Médio, seja em aulas regulares do curso, ou em clubes de matemática. A seguir, apresento alguns exemplos.

1) Dado um retângulo em que o lado maior mede o dobro do lado menor, calcule pi desse polígono.

   Resposta: pi (retângulo x por 2x) = $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

Comentário: A atividade pode ser repetida para retângulos com lados consecutivos de medidas cada vez mais próximas uma da outra como, por exemplo, x e 3x/2, x e 5x/4, ou x e 9x/8. Em seguida, pode-se conjecturar que, quando o comprimento do retângulo se aproxima de sua largura, pi (retângulo) aumenta e se aproxima, no limite, a pi (quadrado).

2) A pipa PQRS está inscrita no quadrado ABCD de lado ℓ, conforme figura abaixo. Se PQ=PS = ℓ, mostre que pi (pipa) será maior do que pi (quadrado). (Figura 12)

   Resposta: Prove inicialmente que os ângulos internos da pipa medem 60°, 75°, 75° e 150°. Com uso da trigonometria os cálculos conduzem ao seguinte resultado: pi (pipa) = $2 + 2\sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 3,035 >$ pi (quadrado) = $2\sqrt{2} \approx 2,828$.

Comentário: O caminho da demonstração de que pi da pipa analisada nesse problema é o maior valor possível de pi de um quadrilátero convexo pode ser encontrado na referência [4].

3) Mostre que podemos inscrever a pipa do exercício anterior em um triângulo de Reuleaux. Faça essa construção com régua e compasso.

   Resposta: ver figura 13.

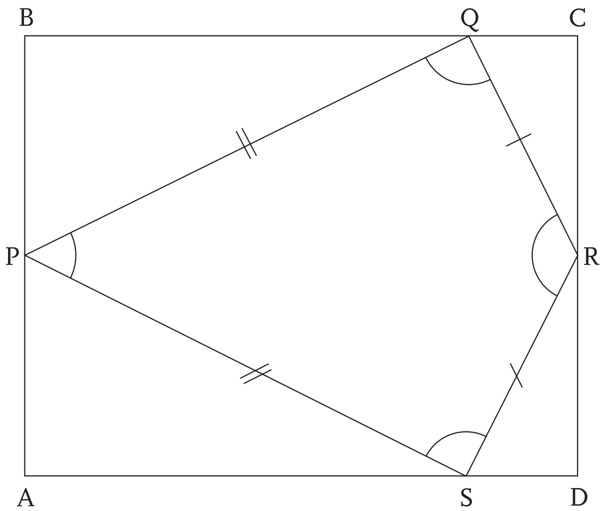


Figura 12

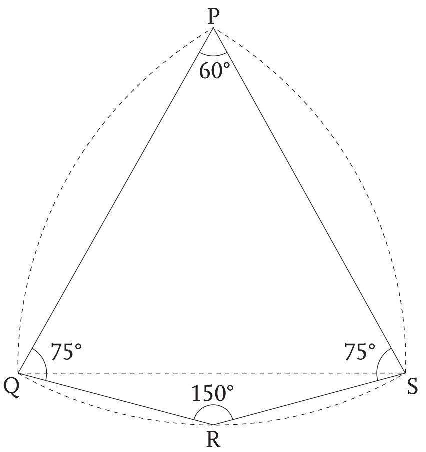


Figura 13

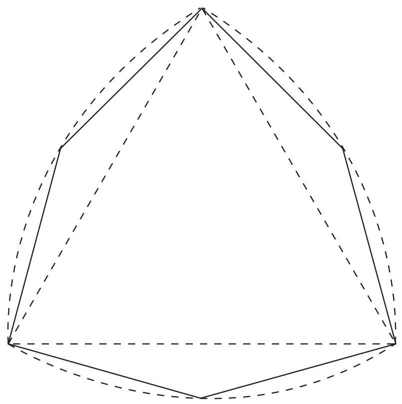


Figura 14

Comentário: Outro exercício interessante seria o da inscrição de um hexágono em um triângulo de Reuleaux. O hexágono obtido dessa maneira não será regular (é equilátero, porém não é equiângulo). Interessantes extensões dessa ideia podem ser encontradas na referência [5]. (Figura 14)

4) Compare os valores de pi de um triângulo de Reuleaux e de um círculo, ambos calculados por meio de uma nova fórmula, indicada por pi*:

$$\text{pi* (curva)} = \frac{4 \times \text{Área da curva}}{(\text{diâmetro da curva})^2}$$

Resposta: Sendo C uma curva fechada, limitada, convexa e de diâmetro constante (largura constante), então pi(C) = π. A fórmula pi*(C) = (4 × área interior a curva)/(diâmetro da curva)^2 é equivalente à pi(C) = perímetro/(diâmetro da curva) para o caso em que C = círculo. No caso do triângulo de Reuleaux (TR), a comparação entre pi e pi* é:

pi(TR) = pi(círculo) = π = pi*(círculo) >
> pi*(TR) = $(2\pi - \sqrt{3})$

Desdobramentos desse resultado podem ser encontrados em [4].

5) Seria possível construir uma bicicleta cujas rodas tenham a forma de triângulos de Reuleaux?

Resposta: Sim. Ver o vídeo de uma bicicleta assim na referência [6].

Comentário: A principal dificuldade nessa construção é a de que, diferentemente de um círculo, o triângulo de Reuleaux não tem um centro fixo. Ver referência [7]. Recomendamos também ao leitor que assista ao episódio de Isto é Matemática , apresentado por Rogério Martins, que trata do tema explorado neste artigo [8]

Agradecimento. O autor agradece ao Prof. Sérgio Alves do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo pelos comentários e sugestões à redação final do artigo.

Notas

1 No Brasil, o Ensino Fundamental corresponde aos primeiros 9 anos de escolaridade do estudante que, em situação normal, conclui esse ciclo escolar com 14/15 anos de idade.

2 No Brasil, o termo pipa é utilizado para designar um papagaio. [Nota do editor]

3 No Brasil, o Ensino Médio corresponde aos 3 últimos anos da escola básica. Em situação normal o estudante conclui esse ciclo escolar com 17/18 anos de idade.

Bibliografia recomendada

[1] Voloch, J. F. *Curvas de largura constante*. Matemática Universitária, no. 5, junho de 1987, IMPA, Rio de Janeiro. (disponível em http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n05/n05_Artigo05.pdf)

[2] Anciaux, H., Georgiou, N. *The Blaschke-Lebesgue problem for Constant width bodies of revolution*. Cornel University Library, 2009. (disponível em http://arxiv.org/pdf/0903.4284.pdf).

[3] http://www.youtube.com/watch?v=OdY9Y-6DsgU

[4] Ball, Derek G. *A generalisation of* π. The Mathematical Gazette, vol. 57, no. 402, December 1973. (pode ser obtido gratuitamente em http://www.jstor.org/ mediante cadastro do visitante).

[5] Griffiths, D., Culpin, D. Pi-Optimal Polygons. *The Mathematical Gazette*, vol. 59, no. 409, October 1975. (pode ser obtido gratuitamente em http://www.jstor.org/ mediante cadastro do visitante).

[6] http://www.youtube.com/watch?v=Xq4fNhtKjus .

[7] http://mathworld.wolfram.com/ReuleauxTriangle.html .

[8] https://www.youtube.com/watch?v=fK_v-hyMrUo (consultado em 17/09/2013)

Todas as restantes referências da internet citadas acima estavam ativas e foram consultadas em 18/03/2013.

José Luiz Pastore Mello

Colégio de Santa Cruz, São Paulo, Brasil