

O presente número da secção tem dois conteúdos distintos. Um deles procura reforçar a divulgação de algumas iniciativas relacionadas com o Statistics2013, o outro é um artigo da autoria de Marisa Gregório, da EB. E,3 da Pontinha. Queremos no entanto chamar a atenção para a secção dos Materiais para a sala de aula incluídos na secção Matemática do Planeta Terra 2013, apresentada por Sónia Barbosa e intitulada *Vamos ajudar a salvar as tartarugas caretas*, que constitui um excelente recurso para trabalhar em modelação estatística no ensino secundário.

Entre as iniciativas relacionadas com o Statistics2013 — que, relembramos, tem um site <http://www.statistics2013.org/> com diversos recursos que podem ser mobilizados para trabalhar com alunos de diversas idades, sublinhamos a disponibilização das *estatísticas do dia*, que, para além do seu carácter informativo, podem inspirar investigações estatísticas para a aula de Matemática.

Já o artigo de Marisa Gregório, com o título *Média: O procedimento e a compreensão*, discute o conceito de média e a sua utilização pelos alunos, sublinhando a necessidade de estes aprenderem a usá-lo com espírito crítico. Corresponde a um bom prolongamento e aprofundamento das ideias que o *Pense Nisto*, publicado nesta secção na EM122, quis interpellar, ao desafiar as metas curriculares no que diz respeito à estatística.

Divulgamos ainda a ICOTS 2014, a maior conferência internacional sobre o ensino da Estatística.

Ana Paula Canavarro, Universidade de Évora [apc@uevora.pt]

## Estatísticas do dia

No site do ano internacional da Estatística são diariamente disponibilizadas estatísticas por diversas entidades oficiais que produzem estatística um pouco por todo o mundo. Essas estatísticas referem-se em geral a aspetos da sociedade de um país ou do mundo, e algumas delas podem ser bons pontos de partida para tarefas de investigação ou projetos mais alargados e até interdisciplinares com interesse para os alunos. Pode consultar-se em <http://www.statistics2013.org/statistic-of-the-day/> o arquivo das estatísticas já publicadas.

Nos dias 19 e 20 de Outubro foram dadas a conhecer as seguintes:

**19/10/2013** O século 20 assistiu ao maior crescimento que alguma vez se tinha verificado na população mundial durante um século. No início, existiam 1.6 biliões de pessoas; no final, o número era de 6.1 biliões. Fonte: Human Population Growth and International Migration.

**20/10/2013** Espera-se que a população mundial aumente outro bilião em 12 anos, criando necessidades sem precedentes a nível de alimentação, água, energia e emprego. Fonte: The Millennium Project.

Deixamos aqui o desafio de usar estas estatísticas para trabalhar com os seus alunos — quem sabe poderá elaborar uma tarefa e devolver à revista Educação Matemática...



A ICOTS — *International Conference on Teaching Statistics* — iniciou-se em 1982 e desde aí teve oito edições. De alguma forma, corresponde aos «Jogos Olímpicos» das conferências no domínio, não só porque se realiza apenas de 4 em 4 anos, como porque reúne os maiores especialistas e um enorme número de participantes. A próxima, ICOTS 9, realiza-se em Flagstaff, no Arizona, entre 13 e 18 de Julho, e tem como tema «A sustentabilidade da Educação em Estatística». A quem possa interessar: <http://icots.net/9/>

# Média: O procedimento e a compreensão

MARISA GREGÓRIO

O conceito de média é largamente utilizado pelos mais variados meios de comunicação, jornais, revistas, televisão, internet. Este conceito estatístico é usado na vida quotidiana bem como em outras disciplinas e o seu conhecimento é necessário em muitas profissões. Conhecer bem o conceito de média, saber o que significa e quando se deve ou não usar é muito importante para o desenvolvimento do espírito crítico.

## A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE MÉDIA

O simples conhecimento de conceitos e procedimentos não é sinónimo da sua compreensão. Isso acontece com todos os conceitos, incluindo, naturalmente, o de média. Muitas vezes, o primeiro contacto dos alunos com informação e com conceitos estatísticos não é feito na escola mas sim fora desta, mas isso não é garantia da compreensão do seu significado. O conceito de média, como muito outros, é mais complexo do que pode parecer à primeira vista, razão pela qual é necessário um cuidado especial ao trabalho desenvolvido na sala de aula a seu respeito.

Saber construir um gráfico não é garantia da sua compreensão, assim como saber calcular a média não é prova do reconhecimento do seu significado. Quando questionamos os alunos acerca da média, muitos irão indicar o procedimento para calcular a média de dois valores. Muitos dirão até corretamente que para calcular a média de um grupo de valores somam-se todos os seus elementos e divide-se o resultado da soma pelo número de elementos. Mas terão dificuldade em responder a questões como: O que significa esse procedimento? Que informação nos dá? O que é que podemos saber através dele? Será sempre possível calcular a média de um conjunto de dados? É sempre um bom indicador acerca das características de um grupo de dados?

A média é a medida de localização mais vulgarmente utilizada para sintetizar informação contida num conjunto de dados. É um bom representante de um conjunto de da-

dos quando estes se distribuem de forma aproximadamente simétrica com uma zona central de maior concentração e sem valores muito grandes ou muito pequenos relativamente à maior parte dos dados. No entanto é necessário ter alguns cuidados quer na sua utilização e na sua interpretação, pois existe o risco da informação que ela traduz não ter qualquer utilidade ou ser enganadora.

Este artigo relata uma sequência de aprendizagem sobre o tema da Organização e Tratamento de Dados que visou a exploração do conceito de média privilegiando a sua compreensão e não apenas a aprendizagem do procedimento para a sua determinação. Tratou-se de uma experiência de ensino no âmbito do Mestrado de Educação, tendo por base diversas tarefas cujo objetivo era contribuir para desenvolvimento da literacia estatística em alunos do 2.º ciclo. Pretendia-se fomentar o sentido crítico dos alunos e promover o desenvolvimento de capacidade de argumentação para as suas tomadas de posição e fundamentação das suas opiniões sobre os mais variados temas relacionados com a sua vida cívica ativa atual e futura.

## DINÂMICA DAS AULAS

A atividade realizada na sala de aula envolveu diferentes modos de trabalho dos alunos, em especial o trabalho de grupo e o trabalho individual, tendo sempre por base a abordagem de ensino exploratório. O trabalho em grupo, já familiar aos alunos, por ter sido implementado desde o início do ano e frequentemente utilizado em todos os temas lecionados incidu em tarefas de introdução e consolidação. Esta opção teve como objetivo possibilitar aos alunos a aquisição dos conhecimentos e procedimentos matemáticos com significado e desenvolver capacidades como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática. O trabalho individual ocorreu nos momentos de aplicação e verificação da aprendizagem dos conceitos, o que permitiu dar visibilidade aos progressos ou dificulda-

des dos alunos, uma vez que o trabalho em grupo pode diluir as fragilidades individuais e realçar as capacidades dos elementos com melhor desempenho.

As aulas decorreram em quatro fases: (i) Apresentação da tarefa; (ii) Trabalho autónomo dos alunos, (iii) Discussão coletiva e (iv) Síntese final (Ponte, 2005). Nas discussões coletivas, os alunos apresentavam aos colegas o seu trabalho. Com estas discussões pretendia não só que os alunos conhecessem, discutissem e validassem os processos utilizados na resolução da tarefa, mas também que argumentassem as conclusões retiradas, de modo a fomentar a participação crítica de todos os alunos, desenvolvendo desta forma processos de comunicação. A dinamização destas discussões procurou seguir as indicações do modelo apresentado por Stein, Engle, Smith, & Hughes (2008). Este

modelo é constituído por cinco práticas: (1) antecipar as resoluções dos alunos; (2) monitorizar o trabalho dos alunos e o seu envolvimento nas tarefas; (3) selecionar determinados alunos para apresentarem o seu trabalho; (4) sequenciar as resoluções dos alunos que serão apresentadas; (5) estabelecer conexões entre resoluções e ideias matemáticas. De realçar este último momento como primordial para a reorganização das ideias preconcebidas dos alunos e para a formalização dos conceitos e construção de novos conhecimentos.

Neste artigo serão apresentadas algumas tarefas trabalhadas ao longo da sequência de aprendizagem que teve início no 5.º ano e seguimento no 6.º ano. Elas pretendem exemplificar a tipologia de tarefas e o trabalho desenvolvido pelos alunos.

### TAREFA: POUPAR PARA PARTILHAR

A primeira tarefa (Poupar para partilhar) teve como objetivo introduzir o conceito de média explorando a compreensão da sua representação num gráfico de barras. A tarefa procurava salientar que no cálculo da média intervêm todos os valores da amostra e que esta é o número que «equilibra» os grandes valores com os pequenos valores.

Em relação ao item 1.1. os alunos não revelaram qualquer dificuldade. Os valores em causa eram simples, pelo que, nas suas resoluções os alunos recorreram ao algoritmo da divisão da soma de todos os valores pelos cinco amigos. O item 1.2.1. também não suscitou dificuldade, tendo todos os grupos assinalado corretamente uma linha horizontal representando o valor pedido (20€).

Em resposta ao último item (1.2.2.), os alunos fizeram diferentes distribuições das quantias pelos cinco amigos e todos os grupos chegaram ao valor correto (20 euros). Este item tinha por objetivo levar os alunos a compreenderem a dinâmica subjacente ao conceito de média. Da discussão resultante da apresentação das resoluções dos diversos grupos, os alunos revelam a compreensão da média como distribuição equitativa dos valores da amostra. Atribuindo o seguinte significado: «Se todos os alunos tivessem obtido a mesma quantia, cada um teria obtido 20 euros.»

Durante a síntese da tarefa foi apresentado aos alunos o significado matemático desse valor e apresentada a designação de média.

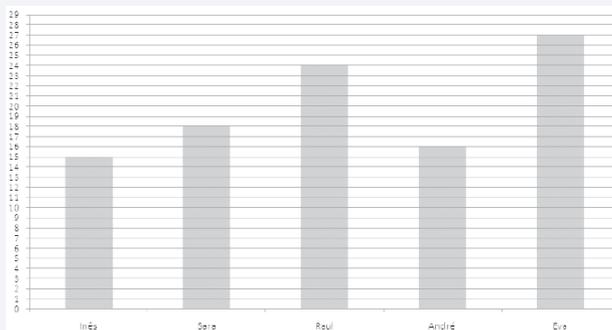
### OUTRAS TAREFAS

Ao longo da sequência didática foram trabalhadas várias tarefas com o objetivo de explorar as propriedades e o signi-

A Inês, a Sara, o Raul, o André e a Eva estão a angariar dinheiro para uma viagem de estudo. Observa as quantias que cada uma das crianças conseguiu angariar.

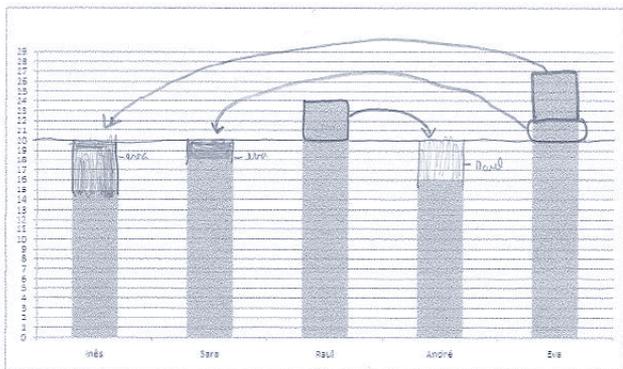


- 1.1. Os cinco amigos decidiram juntar todo o dinheiro obtido e dividir igualmente pelos cinco. Com que dinheiro ficou cada uma das crianças?
- 1.2. Observa o gráfico que representa a quantia que cada uma das crianças tinha no seu mealheiro.



- 1.2.1. Assinala a vermelho a linha correspondente à quantia com que cada uma das crianças ficou no final da divisão.
- 1.2.2. Explica uma possível forma de distribuir a quantia existente em cada um dos mealheiros para que cada criança ficasse exatamente com a mesma quantia.

### TAREFA: POUPAR PARA PARTILHAR



O Raúl dá 0 e o André  
 A Sara deu 4 e a Sara  
 e deu 5 e a Inês

ficado da média em contexto concreto:

- (i) A média é um valor compreendido entre os valores extremos dos dados, nunca podendo ser menor que o mínimo nem maior que o valor máximo;
- (ii) Que o valor médio é influenciado por todos os valores dos dados;
- (iii) Que não tem de ser igual a um dos valores dos dados;
- (iv) Que o valor da média pode ser um número fracionário que não tenha sentido no contexto;
- (v) Que há que ter em conta os valores nulos no cálculo da média;
- (vi) Que o conhecimento da média permite determinar a soma de todos os valores da amostra.

Os exemplos que seguem ilustram tarefas onde foram trabalhadas algumas das propriedades enunciadas.

### TAREFA: TEMPERATURAS NA SERRA

Esta tarefa tinha como objetivo verificar se os alunos eram capazes de identificar os extremos e a moda de um conjunto de dados e detetar a média bem como possíveis dificuldades dos alunos no seu cálculo, tendo em conta a existência de um valor nulo no conjunto de dados. Pretendia-se, também, perceber qual a sua compreensão do conceito de média e que significado e adequação lhe atribuem num dado contexto. Esta tarefa foi realizada individualmente.

Os alunos revelaram alguma dificuldade na interpretação do enunciado do item 1.1., associada ao significado da palavra «variação» no contexto da linguagem corrente e ignorando parte do enunciado, obtendo-se as seguintes res-

**Item 1.** As temperaturas mínimas que se verificaram durante a primeira semana de janeiro na Serra de Monchique estão registadas na tabela seguinte:

dom	2.ª f	3.ª f	4.ª f	5.ª f	6.ª f	sáb
4°	4°	0°	1°	4°	5°	3°

**Item 1.1.** Entre que valores variou a temperatura mínima na Serra de Monchique nesta semana?

**Item 1.2.** Qual foi a temperatura mínima mais frequente, nesta semana, na Serra de Monchique?

**Item 1.3.** Calcula a média das temperaturas durante esta semana, na Serra de Monchique. Explica o seu significado.

### TAREFA: TEMPERATURAS NA SERRA

postas: «Subiu e desceu», «Variou 21°» (que corresponde à soma de todos os dados), outros apresentaram todos os elementos do grupo de dados e outros ainda ignoraram o valor nulo justificando uma razão intencional durante a discussão da resolução da tarefa. Para estes alunos o valor nulo seria em si uma razão plausível para o rejeitar. Esta situação repetiu-se no cálculo da média (item 1.3.). Em relação ao item 1.2. os alunos não revelaram grande dificuldade, contudo, alguns associaram o conceito «moda» ao maior valor (5° C) ou à categoria que apresenta maior temperatura (sexta-feira).

Relativamente ao item 1.3. os alunos mostraram facilidade no procedimento, mas apenas alguns apresentaram significado válido no contexto da questão:

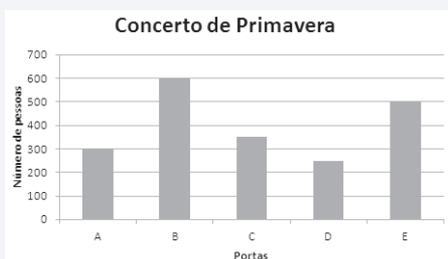
$4 + 4 + 0 + 1 + 4 + 5 + 3 = 21$   
 $\frac{21}{7} = 3$   
 A média é de 3°C, significa que  
 se todos os dias tiver a mesma  
 temperatura tinha estado 3°C.

Esta tarefa mostra a importância e o cuidado que os professores devem de ter ao introduzir os conceitos matemáticos e à sua associação a termos utilizados no contexto da linguagem corrente. Tornando-se premente a explicitação da dualidade das expressões amplitude/variação e moda/valor mais frequente. Revela também a insistência que deve ser dada à exigência do significado na formulação das questões associadas ao conceito de média e não apenas ao pedido da sua determinação. As dificuldades e erros aqui apresentados foram identificados como erros comuns por Batanero (2001).

## TAREFA: CONCERTO DE PRIMAVERA

Esta tarefa, realizada em grupo, tinha como objetivo consolidar as aprendizagens dos alunos sobre o conceito de média e verificar de que forma essas aprendizagens são mobilizadas num determinado contexto e ainda identificar a dinâmica subjacente à compreensão e ao procedimento do cálculo da média.

Para assistir ao concerto de Primavera no Estádio Nacional os espectadores podiam escolher entrar por uma das cinco portas possíveis. No gráfico está registado o número de entradas em cada uma das cinco portas existentes no Estádio Nacional.

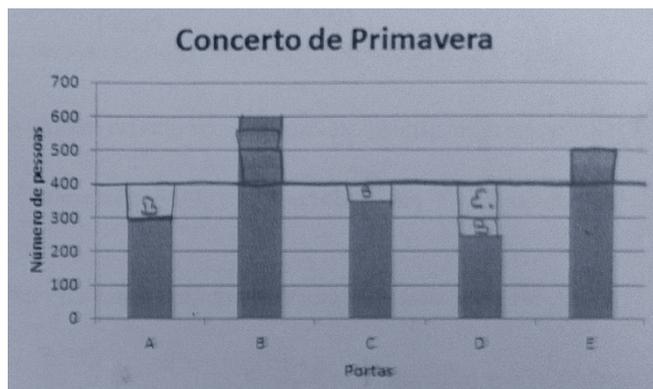


Qual foi a média de entradas registadas nas portas do Estádio? Explica o significado desse valor no contexto do problema.

## TAREFA: CONCERTO DE PRIMAVERA

Muitos dos alunos obtiveram a resposta através do gráfico, operacionalizando a compreensão sem sentir necessidade de realizar mecanicamente o seu cálculo.

«A média de entradas registadas é de 400, porque se a média é para dividir igualmente, tiramos, 100 do B e pusemos no A, depois voltamos a tirar 50 e pusemos no C, a seguir retiramos mais 50 e pusemos no D, e por fim, tiramos 100 no E e pusemos no D.».



Estes alunos não atribuíram um significado ao valor da média, no entanto a sua resolução dá indicadores da compreensão do mesmo.

Na resolução seguinte os alunos utilizam corretamente o algoritmo e atribuem um significado válido no contexto do problema:

$$\bar{x} = \frac{300 + 600 + 350 + 250 + 500}{5} = \frac{2000}{5} = 400$$

R: A média é de 400, ou seja, se todas as pessoas tivessem entrado em número igual nas 5 portas, teriam entrado 400 pessoas em cada porta.

Na discussão da tarefa foi trabalhado o significado deste valor e qual a sua utilidade, nomeadamente na obtenção do número total de espetadores do concerto: «Ah, então se não tivéssemos os dados do gráfico e apenas a média de entrada nas cinco portas, bastava fazer  $5 \times 400$  para sabermos quantas pessoas tinham ido ao concerto!»

De realçar que durante a discussão, os alunos que utilizaram exclusivamente o gráfico para determinar a média sem apresentar por escrito a explicação do valor obtido no contexto dado, foram capazes de o fazer oralmente.

Este tipo de trabalho tem de ser repetido de forma consistente com vista a resultados na progressão da aprendizagem e no desenvolvimento da literacia estatística. Ao longo do 6.º ano este trabalho foi consolidado e desenvolvido.

Os exemplos que se seguem ilustram alguns exemplos de tarefas realizadas pelos alunos, individualmente, durante o 6.º ano e que tinham por objetivo a aplicação do conceito de média a novas situações:

*O João fez dois testes de Matemática e obteve as seguintes classificações: 58% e 67%.*

*Que nota terá de ter no próximo teste para que a sua média seja exatamente 70%?*

As três resoluções ilustram a aquisição do conceito e da compreensão do conceito de média como valor que equilibra todos os dados da amostra. Gostaria de realçar a última resolução que revela um raciocínio mais elaborado e esclarecedor da aquisição significativa da compreensão do conceito.

