Sobre o quadrado mágico de Dürer

O nosso leitor e colaborador, engenheiro Alberto Canelas, aceitou o desafio de descobrir, no quadrado mágico de Durer (Fig. 1), todos os quadriláteros cujos vértices têm por soma 34.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Figura 1

Publicamos de seguida a sua resposta.

(...)

«Vamos representar esquematicamente, e identificar, os vértices:

.1	.5	.9	.13
.2	.6	.10	.14
.3	.7	.11	.15
.4	.8	.12	.16

Figura 2

Consideremos, ainda, que 4 pontos, desde que 3 não sejam colineares, definem um, e um só, quadrilátero. O número total de quartetos não ordenados e sem repetições é dado por:

$$^{16}C_4 = 1820$$

São muitos quadriláteros a testar! Mesmo excluindo os casos de colinearidade ($10 + {}^4C_3 \times 10 \times 12 + 4 \times 13 = 542$), ficamos com 1278 quadriláteros a testar, o que é ainda muito! Vamos, então, utilizar um programa de computador em GW-BASIC através do qual determinaremos todos os quartetos não ordenados e sem repetições cuja soma é 34 (dos quais excluiremos posteriormente os casos de colinearidade). O programa é o seguinte:

```
 5 LET A=0: LET B=0
10 DIM A(16)
15 LET A(1)=16: LET A(2)=5: LET A(3)=9:
   LET A(4)=4: LET A(5)=3: LET A(6)=10:
   LET A(7)=6: LET A(8)=15: LET A(9)=2:
   LET A(10)=11: LET A(11)=7: LET A(12)=14:
   LET A(13)=13: LET A(14)=8: LET A(15)=12:
   LET A(16)=1
20 FOR I=1 TO 16
25 FOR J=I+1 TO 16
30 FOR K=J+1 TO 16
35 FOR L=K+1 TO 16
40 LET X=A(I)+A(J)+A(K)+A(L): LET A=A+1
45 IF X=34 THEN LPRINT I; " "; J; " "; K;
   " "; L,: LET B=B+1
50 NEXT L: NEXT K: NEXT J: NEXT I
55 LPRINT
60 LPRINT
65 LPRINT A; "CASOS TOTAIS"
70 LPRINT
75 LPRINT B; "CASOS FAVORÁVEIS"
```

o qual conduz aos seguintes dados de saída:

(1)	1	2	3	4	(44)	3	6	9	13
(2)	1	2	9	10	(45)	3	7	10	14
(3)	1	3	9	11	(46)	3	9	10	15
(4)	1	4	7	14	(47)	4	5	12	13
(5)	1	5	9	13	(48)	4	6	14	15
(6)	1	6	7	9	(49)	4	8	11	14
(7)	1	8	9	16	(50)	5	6	7	8
(8)	2	3	14	15	(51)	5	7	10	12
(9)	2	4	13	15	(52)	5	10	11	13
(10)	2	6	7	13	(53)	6	8	9	11
(11)	2	7	8	14	(54)	6	10	15	16
(12)	2	8	13	16	(55)	7	9	12	15
(13)	3	4	6	10	(56)	8	10	11	16
(14)	3	4	13	14	(57)	9	11	13	15
(15)	3	5	12	14	(58)	13	14	15	16
(16)	3	6	12	16	(59)	1	2	7	11
(17)	3	8	9	14	(60)	1	3	5	7
(18)	4	5	8	15	(61)	1	4	5	10
(19)	4	6	11	13	(62)	1	4	13	16
(20)	4	8	9	13	(63)	1	5	12	16
(21)	4	10	11	15	(64)	1	7	10	16
(22)	5	6	13	14	(65)	2	3	11	13
(23)	5	8	9	12	(66)	2	4	10	12
(24)	6	7	10	11	(67)	2	5	12	15
(25)	6	9	12	14	(68)	2	6	11	15
(26)	7	8	15	16	(69)	2	8	9	15
(27)	7	12	13	16	(70)	2	11	12	14
(28)	9	10	13	14	(71)	3	4	11	12
(29)	11	12	15	16	(72)	3	5	8	11
(30)	1	2	5	6	(73)	3	6	11	14
(31)	1	2	15	16	(74)	3	7	11	15
(32)	1	3	14	16	(75)	3	10	13	16
(33)	1	4	9	15	(76)	4	6	7	12
(34)	1	5	11	14	(77)	4	7	10	13
(35)	1	6	11	16	(78)	4	8	12	16
(36)	2	3	7	12	(79)	5	6	11	12
(37)	2	4	6	8	(80)	5	7	13	15
(38)	2	5	8	10	(81)	5	10	14	15
(39)	2	6	10	14	(82)	6	8	14	16
(40)	2	7	10	15	(83)	7	8	9	10
(41)	2	9	12	13	(84)	7	11	13	14
(42)	3	4	7	8	(85)	9	10	11	12
(43)	3	5	6	15	(86)	10	12	14	16

1820 CASOS TOTAIS
86 CASOS FAVORÁVEIS

Nos 86 casos favoráveis há 14 casos de colinearidade. Portanto existem 72 quadriláteros cujos vértices «somam» 34.

Alberto Canelas

Os 14 casos de colinearidade, identificados por Alberto Canelas, correspondem aos quartetos: (1), (5), (35), (36), (39), (44), (49), (50), (58), (74), (77), (78), (81), e (85).

Dos 72 quadriláteros que cumprem a condição especificada, são côncavos os que correspondem aos quartetos: (4), (6), (10), (11), (21), (43), (46), (52), (56), (70), (75) e (76). Destes destacamos o (56) e o (76) por terem uma forma curiosa que lembra um boomerang (fig. 3).

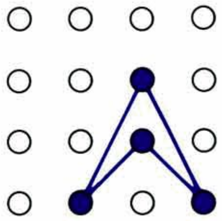
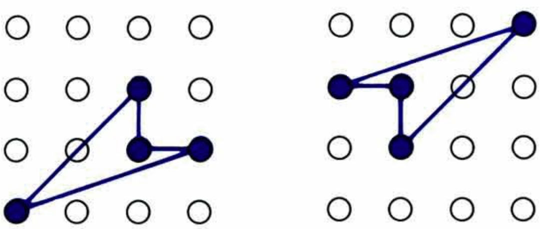


Figura 3

De notar, ainda, uma certa regularidade na sua distribuição. De facto, são simétricos a uma das mediatrizes do quadrado, o mesmo se passando com os quadriláteros (43) e (46).

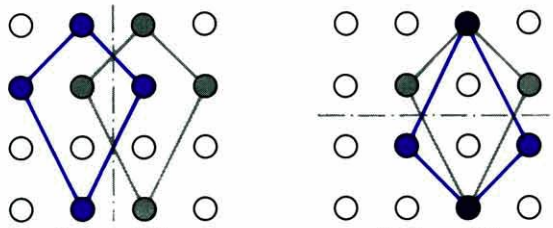
Já os quadriláteros (4) e (75), congruentes entre si, podem resultar um do outro por uma rotação de 180° em torno do centro do quadrado mágico. O mesmo se pode dizer de (10) e (21) (fig. 4).



(21) (10)

Figura 4

São também 12 os quadriláteros convexos não trapézios: (12), (16), (18), (25), (27), (33), (38), (41), (48), (55), (61), (72). Também, entre estes, temos os que resultam um do outro por rotação de 180°. Veja-se os casos dos quadriláteros (18) e (41) ou dos quadriláteros (12) e (33). Um caso curioso é o dos *papagaios*, (25), (38), (55), e (72), cada um dos quais tem um simétrico, relativamente a cada uma das mediatrizes (fig. 5).



(38) e (25) (25) e (55)

Figura 5

São ainda doze os quadrados: o quadradão (62) coincidente com o quadrado mágico; quatro quadrados, (3), (66), (80), e (82), cada um dos quais com um vértice coincidente com vértice do quadrado mágico (fig. 6); dois quadrados, (15) e (69), com todos os vértices assentes sobre os lados do quadrado mágico (fig. 7); cinco quadradinhos, um coincidente com a quadrícula central, (24), e outro correspondendo às quadriculas com vértices coincidentes com os do quadrado mágico, (28), (29), (30) e (42).

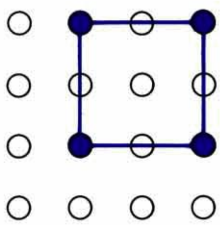


Figura 6

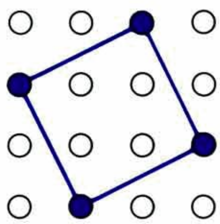
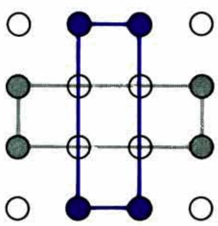


Figura 7

Os rectângulos são, igualmente, 12: dois rectângulos 1x3, (8) e (23), perpendiculares entre si (fig. 8); quatro rectângulos 1x2, (37), (57), (60) e (86), cada um dos quais com um dos vértices coincidente com um dos vértices do quadrado mágico (fig. 9); também quatro rectângulos 2x1, (2), (22), (26) e (71), nas mesmas condições; finalmente, 2 rectângulos (17) e (67) cujos lados maiores são paralelos a uma das diagonais (fig. 10).



(8) e (23)

Figura 8

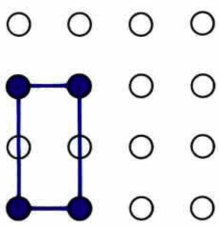
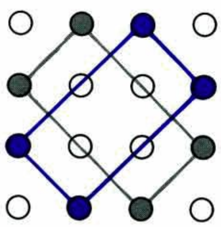


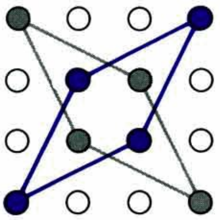
Figura 9



(17) e (67)

Figura 10

Existem, ainda, 2 losangos, cujas diagonais maiores coincidem com as diagonais dos quadrados: (19) e (64) (fig. 11).



(19) e (64)

Figura 11

Trapézios são quatro, (13), (54), (59) e (84), todos eles isósceles e cada um deles com um dos vértices coincidente com um vértice do quadrado de Dürer (fig. 12).

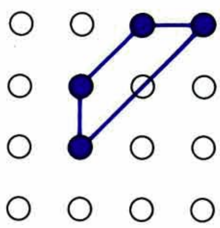
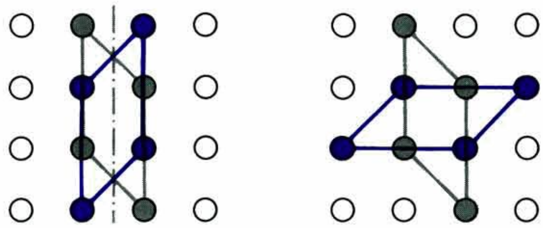


Figura 12

Finalmente, são 18 os paralelogramos obliquângulos. Com a excepção de dois, (34) e (65), todos os outros têm dois sósias congruentes: um é o seu simétrico relativamente a uma das mediatrizes; o outro resulta da rotação em torno do centro do quadrado inicial. Assim, por exemplo, o (51) tem um simétrico relativamente à mediatriz que é o (53) e por rotação do (51) obtém-se o (73); este por sua vez tem um simétrico que é o (40). Rodando, por sua vez, o (40) obtém-se o (53) (fig. 13).



(51) é o simétrico de (53) — (51) e (73)

Figura 13

Idênticas situações se verificam entre os paralelogramos (14), (20), (31) e (63); (7), (9), (32) e (47); (45), (68), (79) e (83).

Trata-se, de facto, de um mágico quadrado mágico!

Leonor Moreira