Raciocínio proporcional: uma perspetiva atual

Ana Isabel Silvestre • João Pedro da Ponte

O raciocínio proporcional é essencial no desenvolvimento matemático dos alunos. Esta capacidade é importante não só na resolução de problemas do quotidiano mas também na aprendizagem de outras noções matemáticas e de outras áreas do saber como a Física. Porém, os alunos revelam com frequência dificuldades na resolução de problemas envolvendo, por exemplo, a identificação da relação de proporcionalidade direta e o cálculo do valor omisso.

A investigação sobre o raciocínio proporcional tem vindo a delinear os vários aspetos de que este se reveste, salientando a importância da compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta. Ao mesmo tempo, a investigação tem alertado para a morosidade e a forte influência da experiência escolar no seu desenvolvimento. Contudo, a perspetiva simplista que associa o raciocínio proporcional ao uso eficiente da regra de três simples continua a prevalecer nos manuais escolares, configurando um aspeto problemático no ensino da Matemática (Norton, 2005). Neste artigo abordamos vários aspetos do raciocínio proporcional evidenciados pela investigação.

RACIOCÍNIO PROPORCIONAL: DE QUE FALAMOS?

Nos últimos anos temos procurado enunciar os aspetos que caraterizam o raciocínio proporcional. Na nossa opinião, este raciocínio envolve três aspetos principais: (i) capacidade para distinguir situações que têm subjacentes relações de proporcionalidade direta de situações que não o têm; (ii) compreensão da natureza multiplicativa das relações proporcionais: e (iii) capacidade para resolver vários tipos de problemas, revelando a flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens sem ser afetado pelo contexto, dados e estrutura numérica, grandezas e as representações (texto, gráficos, tabelas, razões) (Silvestre & Ponte, 2011; Silvestre, 2012). Ao indicar estes diferentes aspetos que envolvem o raciocínio proporcional, pretendemos contribuir para uma configuração de indicadores capazes de orientar o ensino-aprendizagem, de modo a desenvolver o raciocínio proporcional dos alunos.

SER OU NÃO SER UMA RELAÇÃO PROPORCIONAL

Ser capaz de distinguir uma relação de proporcionalidade direta de outras relações que não o são é um aspeto fundamental do raciocínio proporcional. Para isso, durante a aprendizagem formal da proporcionalidade direta os alunos devem trabalhar também com problemas que não envolvem a relação de proporcionalidade direta. Em particular, o trabalho de sala de aula deve envolver problemas pseudoproporcionais, isto é, problemas que não envolvem uma relação de proporcionalidade direta mas geram nos alunos uma forte tendência para assumir a sua existência. Estes problemas apresentam uma relação aditiva, uma relação de proporcionalidade inversa ou outras situações em que não existe uma relação de proporcionalidade direta. A semelhança da estrutura sintática dos problemas pseudoproporcionais e de valor omisso (o tipo mais comum de problema de proporcionalidade direta) é responsável pelo evocar a proporcionalidade direta. «Um pianista precisa de 5 minutos para executar uma peça musical. Quanto tempo precisam três pianistas para executar o mesmo tema?» é um exemplo de um problema pseudoproporcional em que não existe relação de proporcionalidade direta entre as variáveis do problema, ou seja, o número de pianistas não está relacionado de forma proporcional com o tempo de execução da peça musical.

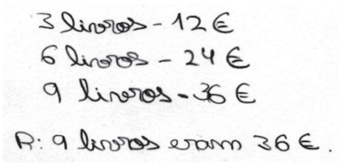
A NATUREZA MULTIPLICATIVA DA RELAÇÃO DE PROPORCIONALIDADE DIRETA

Os alunos lidam no seu quotidiano com situações que envolvem a relação de proporcionalidade direta. Antes do seu ensino formal, até mesmo antes de aprenderem a multiplicação, resolvem problemas que envolvem esta relação, por exemplo, quando calculam o preço de bens ou serviços. No entanto, aquando da aprendizagem formal da proporcionalidade direta, os alunos devem compreender a relação multiplicativa que que lhe está subjacente.

Nos primeiros anos de escolaridade os alunos usam estratégias de composição/decomposição, frequentemen-

A Margarida comprou 3 livros da coleção «Era uma vez» por 12 euros. Quanto custam 9 livros?

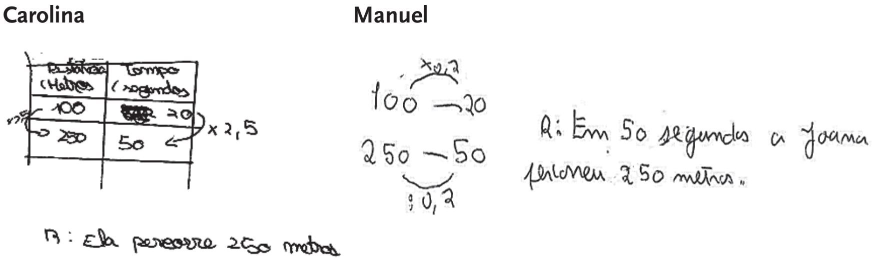
Carolina: Se fossem 6 livros era o do dobro do dinheiro, 24. E se fossem 9 livros era 24 mais 12 euros. (Escreve a resposta falando baixinho.)



3 livros - 12 €
6 livros - 24 €
9 livros - 36 €
R: 9 livros eram 36 €.

Figura 1. Estratégia de composição usada por Carolina

A Joana na aula de educação física corre 100 metros em 20 segundos a uma velocidade constante. Calcula a distância percorrida pela Joana em 50 segundos.



R: Ela percorre 250 metros

R: Em 50 segundos a Joana percorreu 250 metros.

Figura 2. Estratégias de resolução de Carolina e de Manuel

te não proporcionais (aditivas) ou pré-proporcionais (por exemplo, estratégias aditivas e com recurso ao dobro) para resolver problemas de proporcionalidade direta, como mostra a figura 1.

O uso desta estratégia nem sempre permite aos alunos resolver com sucesso o problema.

O ensino formal da proporcionalidade direta tem de dar ênfase à sua natureza multiplicativa, levando os alunos a usar estratégias proporcionais (multiplicativas). Esse trabalho pode passar inicialmente pela mobilização das estratégias usadas anteriormente pelos alunos (não proporcionais), explorando a partir delas a relação multiplicativa, levando-os a apreciar a eficiência das estratégias multiplicativas (escalar e funcional) comparativamente às estratégias aditivas que usavam anteriormente. Deste modo, sugere-se ao aluno o uso da estratégia proporcional escalar (ver a estratégia da Carolina na figura 2) pelo refinamento de estratégia de composição/decomposição (aditiva) e, em simultâneo, a estratégia proporcional funcional (ver a estratégia do Manuel na figura 2).

Os alunos que usam o operador escalar, aplicam $\times b$ (ver a figura 3) dentro do mesmo espaço de medidas ($a \times b = x$), como mostra a estratégia de resolução de Carolina. O operador escalar (b), por se tratar de uma razão entre valores da mesma grandeza, não possui dimensão.

Os alunos usam o operador funcional quando aplicam $\times a$ (ver a figura 4) entre diferentes espaços de medida ($b \times a = x$), como mostra a estratégia de resolução de Manuel.

O desenvolvimento do raciocínio proporcional passa do pensamento qualitativo para estratégias de composição e destas para estratégias que envolvem raciocínio multiplicativo. Estas estratégias são as mais representativas de um elevado nível de sofisticação do raciocínio proporcional. No quadro um apresentamos uma proposta para a análise das estratégias de resolução de problemas de proporcionalidade direta, tendo em vista o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

De salientar que os alunos podem resolver corretamente alguns problemas de proporcionalidade direta sem usar estratégias proporcionais.

TIPOS DE PROBLEMAS E A SUA COMPLEXIDADE

Os problemas de valor omisso e de comparação são os problemas mais comuns de proporcionalidade direta. Os problemas de comparação podem ser numéricos ou não e podem envolver um julgamento qualitativo de acordo com o respetivo contexto (por exemplo, «No recipiente A dissolveram-se 10 gramas de sal em 2 litros de água. No recipiente B dissolveram-se 20 gramas de sal em 10 litros de água. Em qual dos recipientes a água é mais salgada?»). Os problemas de comparação numérica apresentam os quatro valores numéricos da proporção e solicitam ao aluno que indique se uma das razões é maior, menor ou igual à outra. Por sua vez, os problemas de valor omisso apresentam três dos quatro valores da proporção e solicitam ao aluno que determine o valor omisso (por exemplo, «Com 3 euros compro 2 chocolates. Quantas chocolates posso comprar com 21 euros?»).

Os fatores que geram complexidade nos problemas de proporcionalidade direta são o contexto, os números e a estrutura numérica, as grandezas e as representações. O contexto dos problemas diz respeito ao fenómeno exposto, que pode ser um sistema físico complexo (por exemplo, a balança de braços). Os números utilizados nos problemas são mais um fator que influencia a complexidade dos proble-

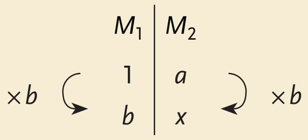


Figura 3. Operador escalar (Vergnaud, 1983, p. 130)

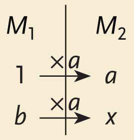


Figura 4. Operador funcional (Vergnaud, 1983, p. 130)

Quadro 1. Estratégias de resolução (Silvestre, 2012, p. 81)

	Descrição dos procedimentos dos alunos	Estratégia
Não revela compreensão da relação de covariação e/ou invariância das variáveis	• Utiliza apenas parte dos dados do problema. • Utiliza procedimentos de cálculo sem sentido	Não definida
Revela compreensão da relação de covariação e/ou invariância das variáveis	Não revela compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta: • Utiliza composição/decomposição numérica envolvendo procedimentos aditivos para gradualmente se aproximar dos valores numéricos pretendidos. • Utiliza procedimentos de contagem associados à representação pictórica e/ou contagem unitária.	Não proporcional
	Não revela clara compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta: • Utiliza a composição/decomposição numérica envolvendo procedimentos aditivos e multiplicativos para gradualmente se aproximar dos valores numéricos pretendidos. • Utiliza a razão unitária e procedimentos aditivos para gradualmente se aproximar dos valores numéricos pretendidos. • Determina a razão unitária mas nem sempre sabe explicar o seu significado.	Pré-proporcionais
	Revela clara compreensão da natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta: • Utiliza o fator escalar ou funcional. Compreende e utiliza as propriedades da multiplicação. • Determina a constante de proporcionalidade e descreve o seu significado. Escreve a razão e descreve o seu significado.	Proporcional

mas e, consequentemente, as dificuldades dos alunos. As grandezas discretas e contínuas são ainda outro fator com impacto na complexidade dos problemas, sendo de referir que a natureza das grandezas está estreitamente relacionada com o fenómeno descrito no contexto do problema. As grandezas têm também uma natureza extensiva (referem-se apenas uma única entidade, por exemplo, 6 livros) ou intensiva (envolvem uma razão entre duas entidades, por exemplo, 12 garrafas por caixa) que deve ser tida em consideração. Finalmente, as representações presentes no problema são igualmente um fator que influencia a complexidade dos problemas. O conhecimento por parte dos professores dos fatores que geram complexidade nos problemas de proporcionalidade direta permite a organização estruturada das tarefas a propor aos alunos de modo a desenvolver o seu raciocínio proporcional.

Concluindo, para conhecer a capacidade de raciocínio proporcional dos alunos, o professor deve analisar as estratégias de resolução de problemas de proporcionalidade direta que estes usam. Durante o ensino formal da proporcionalidade direta o professor deve escolher criteriosamente as tarefas a apresentar aos alunos, para que estes compreendam a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade direta e aprendam a resolver problemas progressivamente mais complexos.

Referências

Norton, S. J. (2005). The Construction of Proportional Reasoning. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, p. 17–24). Melbourne, Australia: PME.

Silvestre, A. I., & Ponte, J. P. (2011). Missing value and comparison problems: What pupils know before the teaching of proportion. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 185–192). Ancara, Turquia: PME.

Silvestre, A. I. (2012). O desenvolvimento do raciocinio proporcional: Trajetórias de Aprendizagem de Alunos do 6.º Ano de Escolaridade (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Org.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127–174). New York, NY: Academic Press.

Ana Isabel Silvestre
Escola Básica 2,3 Gaspar Correia
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

A tarefa que aqui propomos é uma possível exploração do Jogo Jenga, apresentado na secção *Vamos Jogar* deste número, que por sua vez tem como base o artigo da secção MPT2013 intitulado: Matemática, pinguins e cadeias alimentares!?

Esta tarefa apresenta uma forte componente interdisciplinar, pelo que aconselhamos vivamente que a exploração resulte de um trabalho conjunto entre professores de Matemática e de Biologia.

As questões apresentadas exploram simultaneamente tópicos de Biologia e Matemática. Na Biologia destacamos a exploração dos conceitos de teia e cadeia alimentar, níveis tróficos, alterações, fatores de perturbação e alterações no equilíbrio dos ecossistemas, conceitos que se podem enquadrar ao nível dos 5.º e 8.º anos de escolaridade na área das Ciências da Natureza (Naturais). A Matemática poderá, através da análise estatística e do estudo de proporções, enfatizar o impacto das alterações do número de cada espécie nas cadeias alimentares. Neste sentido, a Matemática surge como uma forma de fundamentar as conclusões obtidas na área da Biologia.

Antes de iniciar esta exploração, e uma vez que esta é uma tarefa que exige um trabalho conjunto entre professores de Biologia e Matemática, será importante que todos estejamos familiarizados com os conceitos aqui envolvidos. Salientamos, como referência que:

1. Numa cadeia alimentar, quanto mais próximo da base alimentar mais abundante é a espécie em número. Da base para o topo da cadeia, o número de exemplares em cada espécie deve ser menor que o anterior, de forma a garantir alimento disponível e a evitar o possível colapso da cadeia alimentar;
2. Ponto de desequilíbrio verifica-se quando o número de exemplares da espécie seguinte se torna semelhante ou menor que o anterior. Ou seja, uma cadeia alimentar entra em desequilíbrio se uma das espécies, da base para o topo da cadeia, não apresentar consecutivamente um número menor de exemplares que o que estiver no nível seguinte. Quando esse número é bastante inferior a cadeia poderá colapsar;
3. Admitamos que uma cadeia alimentar entra em colapso se uma das espécies presente na cadeia alimentar representar uma percentagem inferior a 5 em relação às outras espécies da cadeia.

Por exemplo, o *krill* do Antártico é uma espécie chave em todas as cadeias alimentares do Oceano Antártico; se for removido do ecossistema, todo o ecossistema poderá colapsar. Já o fitoplâncton é a base da teia alimentar antártica, classificado como produtor (produzem o seu próprio alimento), pelo que deve ser o que mais existe no habitat por ser a base da teia alimentar antártica.

Joana Latas
Projecto Escola+

José Xavier
Instituto do Mar da Universidade de Coimbra

Patrícia Azinhaga
Externato Cooperativo da Benedita