# O problema de Monty Hall e as probabilidades condicionadas

Susana Fernandes
Mónica Martins Pinto

## O Problema de Monty Hall

O problema de Monty Hall, também conhecido como o problema das 3 portas, surgiu a partir de um concurso televisivo dos Estados Unidos apresentado por Monty Hall na década de 1970. O concurso chamava-se «Let's Make a Deal» e incluía o seguinte jogo:

São apresentadas ao concorrente três portas fechadas e este é informado que atrás de uma das portas existe um bom prémio (automóvel) e atrás das outras duas estão prémios sem valor. Numa primeira etapa o concorrente deverá escolher uma das portas para ficar com o prémio que esta oculta. Na segunda etapa, após a escolha do concorrente, o apresentador, que sabe onde está o bom prémio, abre uma das portas não escolhidas, que não esconda o automóvel. Na terceira etapa do jogo o concorrente pode optar por manter a porta que escolheu no início ou trocar a sua escolha para a outra porta não aberta.

Coloca-se a questão: O que será mais vantajoso para o concorrente, manter a escolha que fez na primeira etapa ou trocar a porta escolhida para abrir?

Intuitivamente somos levados a pensar que, em termos probabilísticos, será indiferente trocar ou não a porta escolhida, mas na verdade o concorrente tem mais hipóteses de ganhar se decidir trocar a sua escolha inicial.

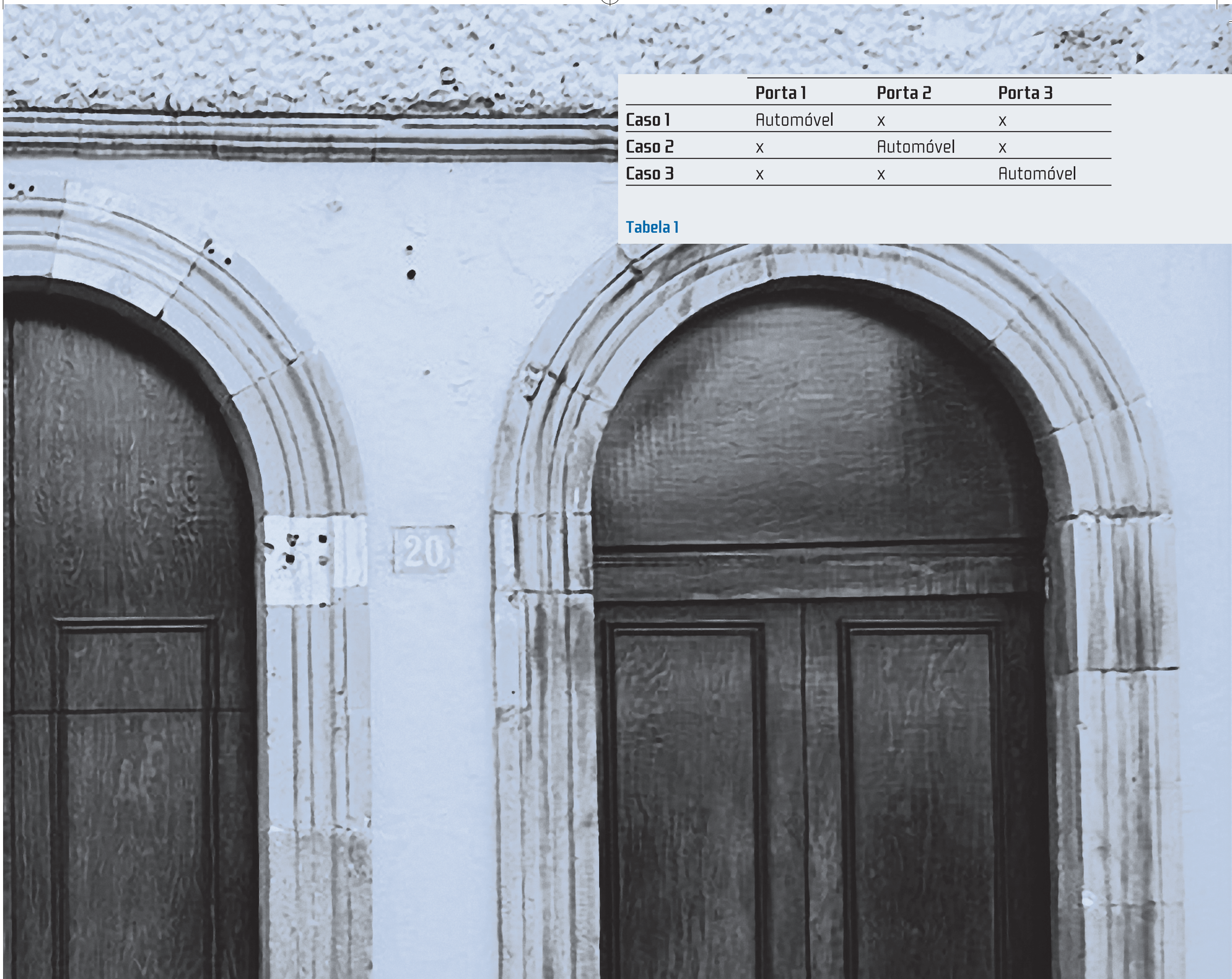
A ideia da igualdade de hipóteses de ganhar trocando ou não de porta «esquece-se» que o apresentador não abre uma das portas não escolhidas ao acaso, mas sim garantido que não mostra o automóvel escondido.

## O Problema de Monty Hall nos manuais de matemática

Este problema (na sua forma original ou com pequenas variações) é apresentado em alguns manuais de matemática, quer do 3.º ciclo do ensino básico quer do ensino secundário, embora nem sempre apresentem a resolução e um deles sugira uma solução que não é a correcta.

O manual *XeqMat*, 12.º ano, Volume 1 apresenta o problema e sugere a seguinte resolução:

Sem perda de generalidade, suponha-se que o concorrente escolhe a porta 1. Na tabela 1 encontram-se todas as possibilidades existentes.



| | Porta 1 | Porta 2 | Porta 3 |
|---|---|---|---|
| **Caso 1** | Automóvel | x | x |
| **Caso 2** | x | Automóvel | x |
| **Caso 3** | x | x | Automóvel |

**Tabela 1**

Se o concorrente mantém a sua escolha, só ganha no caso 1 enquanto que, se trocar, ganha nos casos 2 e 3. Assim, as probabilidades de sucesso mantendo ou trocando a escolha inicial são 1/3 e 2/3, respetivamente.

No manual *PI9*, do 9.º ano, o problema surge com uma variação e é apresentada uma solução errada.

O enunciado trata também de um concurso em que um concorrente tem de escolher uma das três portas, onde apenas uma esconde um automóvel. Após a escolha da porta e supondo que o concorrente escolhe a porta 3, o apresentador do concurso abre a porta 1, mostrando que esta nada escondia.

Ele pergunta ao concorrente se pretende trocar esta montra por outra com 5 portas, onde duas delas escondem um automóvel, mas as restantes três escondem um espaço vazio. A questão final é qual a decisão mais acertada a tomar pelo concorrente.

A solução apresentada pelo manual é que o concorrente não deve trocar de montra. Ora tal não está correto pois a probabilidade de ganhar dado que não troca de montra é a mesma, isto é 1/3, e a probabilidade de ganhar ao trocar de montra passa a ser 2/5, sendo por isso mais vantajoso trocar de montra.

Este problema de probabilidades, por ter uma solução contra-intuitiva, gera alguma confusão e a resolução apresentada (em tabela) muitas vezes «vence mas não convence» algumas mentes, quer de alunos quer de professores.

O manual *Projeto Desafios, Matemática 12.º ano*, Volume 1 também apresenta este problema (na versão original) mas com uma resolução diferente. O livro foi editado recentemente (ano 2012) e é o único, de que temos conhecimento, a referir as probabilidades condicionadas na resolução do problema.

De seguida apresentamos uma resolução do problema utilizando as probabilidades condicionadas e a regra das probabilidades totais. Será talvez útil recordar estes conceitos antes de apresentar a resolução.

## Revisão de conceitos de probabilidades

Dados dois acontecimentos não impossíveis $A$ e $B$ a probabilidade condicionada de $A$ sabendo $B$ representa-se $P(A/B)$ e é dada por

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

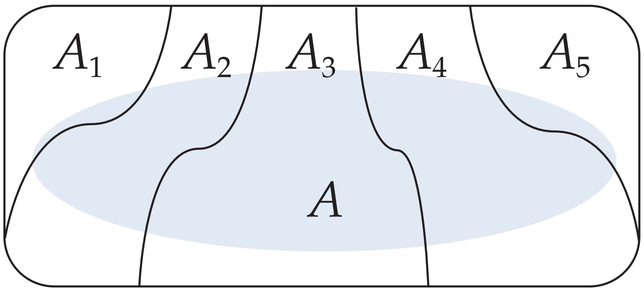



**Figura 1.** Ilustração de uma partição.

Repare-se que a equação pode ser escrita na forma $P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$.

Analogamente, considerando a probabilidade condicionada de $B$ sabendo $A$, podemos escrever $P(A \cap B) = P(B/A) \times P(A)$.

A regra das probabilidades totais diz que dada uma partição $(A_1, A_2, \ldots, A_n$ com $A_i \cap A_j = \varnothing\ \forall i \neq j$ e $\bigcup A_i = \sigma)$ do espaço de resultados $\Omega$, a probabilidade de qualquer acontecimento $A \subseteq \Omega$ é dada por

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/A_i) \times P(A_i).$$

A Figura 1 apresenta um exemplo de um espaço de resultados onde existe uma partição com 5 elementos.

O teorema de Bayes estabelece que dados dois acontecimentos não impossíveis $A$ e $B$ a probabilidade condicionada de $A$ sabendo $B$ pode ser escrita recorrendo à probabilidade condicionada de $B$ sabendo $A$ da seguinte forma:

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) \times P(A)}{P(B)}.$$

## Resolução do problema de Monty Hall

Admitamos, sem perda de generalidade, que *o automóvel está por detrás da porta 1*. Consideremos o esquema do jogo que se apresenta na Figura 2, onde $(E\ Pi)$ representa o concorrente escolhe a porta $i$ e $(A\ Pi)$ representa o apresentador abre a porta $i$.

Repare-se que a decisão do apresentador sobre qual a porta a abrir na segunda etapa do jogo é condicionada pela escolha feita pelo concorrente na primeira etapa. Quando o concorrente escolhe uma porta que não esconde o automóvel, o apresentador só pode abrir uma das restantes portas sem o mostrar. Repare-se também que a decisão do concorrente na terceira etapa do jogo é condicionada pelo fato de se ter aberto uma das portas. Mas a probabilidade de decidir trocar (ou não) é sempre a mesma, sejam quais forem as portas escolhida e aberta nas etapas anteriores.

Para responder à questão «O que será mais vantajoso para o concorrente, manter a escolha que fez na primeira etapa ou trocar a porta escolhida para abrir?» vamos comparar a probabilidade do concorrente ganhar o automóvel se trocar de porta escolhida $P(\text{GANHAR/TROCA})$ com a probabilidade do concorrente ganhar o automóvel se não trocar a porta escolhida $P(\text{GANHAR/NÃO TROCA})$.

Comecemos por calcular a probabilidade do concorrente ganhar o automóvel se trocar de porta escolhida utilizando a definição de probabilidade condicionada

$$P(\text{GANHAR/TROCA}) = \frac{P(\text{GANHAR} \cap \text{TROCA})}{P(\text{TROCA})}.$$

Relembrando que assumimos que *o automóvel está ocultado por detrás da porta 1* e usando os conceitos de probabilidades já revistos e os valores das probabilidades apresentados no esquema da Figura 2 temos:

$$\begin{aligned}
P(\text{GANHAR} \cap \text{TROCA}) &= P((EP2 \cap AP3) \cap \text{TROCA}) + \\
&+ P((EP3 \cap AP2) \cap \text{TROCA}) \\
&= P(\text{TROCA}/(EP2 \cap AP3)) \times P(EP2 \cap AP3) + \\
&+ P(\text{TROCA}/(EP3 \cap AP2)) \times P(EP3 \cap AP2) \\
&= \frac{1}{2} \times P(AP3/EP2) \times P(EP2) + \frac{1}{2} \times P(AP2/EP3) \times P(EP3) \\
&= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Obviamente, a probabilidade do concorrente trocar de porta é 1/2 mas apresentemos os cálculos, apenas para, mais uma vez, ilustrar o uso da regra das probabilidades totais.

$$\begin{aligned}
&P(\text{TROCA}) = P(\text{TROCA} \cap (EP1 \cap AP2)) + \\
&+ P(\text{TROCA} \cap (EP1 \cap AP3)) + \\
&P(\text{TROCA} \cap (EP2 \cap AP3)) + P(\text{TROCA} \cap (EP3 \cap AP2)) = \\
&P(\text{TROCA}/(EP1 \cap AP2)) \times P(EP1 \cap AP2) + \\
&+ (\text{TROCA}/(EP1 \cap AP3)) \times P(EP1 \cap AP3) + \\
&P(\text{TROCA}/(EP2 \cap AP3)) \times P(EP2 \cap AP3) + \\
&+ P(\text{TROCA}/(EP3 \cap AP2)) \times P(EP3 \cap AP2) = \\
&\frac{1}{2} \times P(AP2/EP1) \times P(EP1) + \frac{1}{2} \times P(AP3/EP1) \times P(EP1) + \\
&\frac{1}{2} \times P(AP3/EP2) \times P(EP2) + \frac{1}{2} \times P(AP2/EP3) \times P(EP3) = \\
&\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Assim

$$P(\text{GANHAR/TROCA}) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

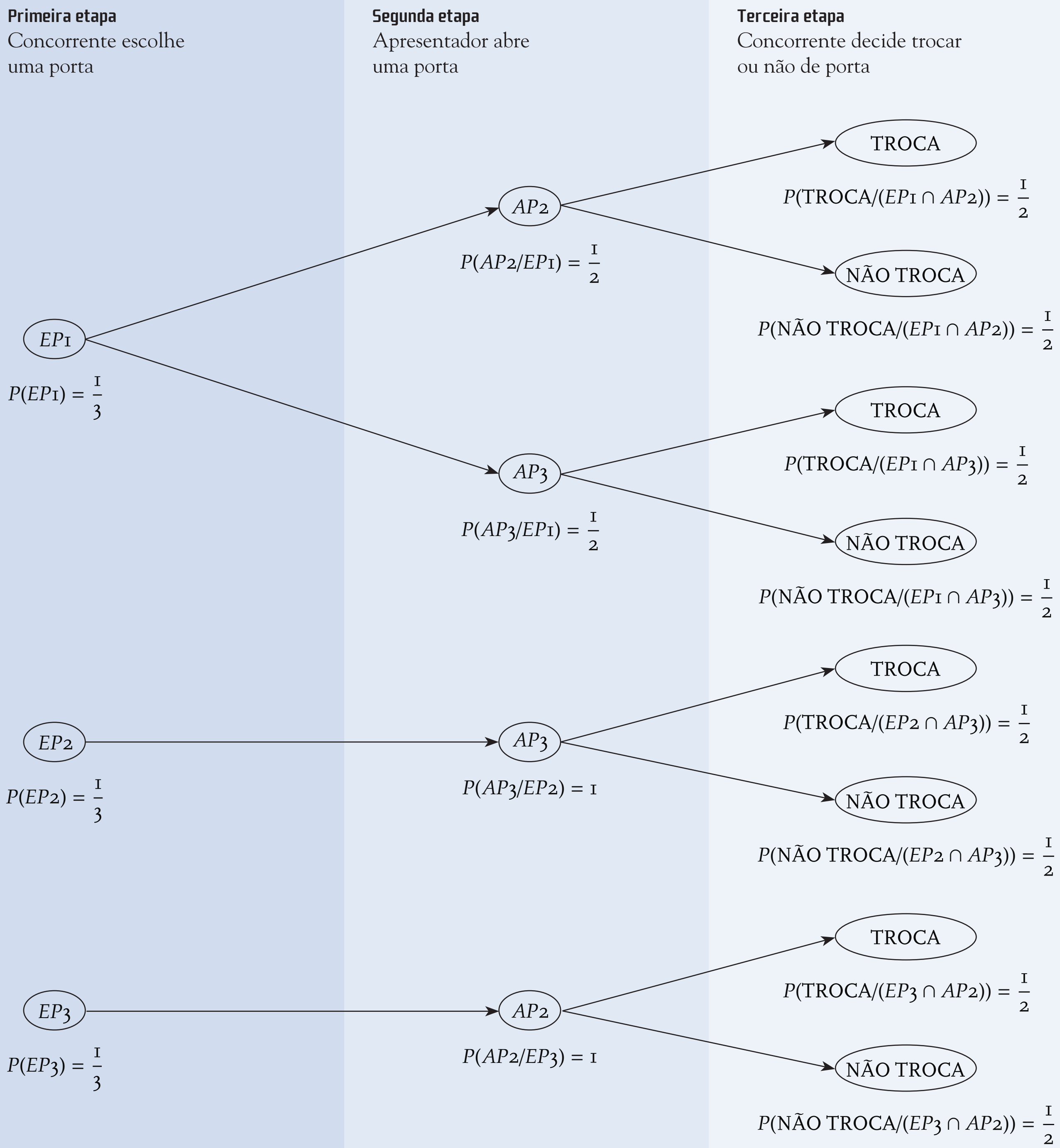



**Figura 2.** Esquema do problema de Monty Hall

Repare-se que uma vez que

$$P(\text{TROCA}/(EP1 \cap AP2)) = P(\text{TROCA}/(EP1 \cap AP3)) = \\ = P(\text{TROCA}/(EP2 \cap AP3)) = \\ P(\text{TROCA}/(EP3 \cap AP2)) = \frac{1}{2} = P(\text{TROCA})$$

temos então, de forma simplificada,

$$P(\text{GANHAR}/\text{TROCA}) = P(AP3/EP2) \times P(EP2) + \\ + P(AP2/EP3) \times P(EP3) = \\ 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Vejamos agora a probabilidade do concorrente ganhar o automóvel se não trocar a porta escolhida.

$$P(AUTP3/AP1) = \frac{P(AUTP3 \cap AP1)}{P(AP1)} =$$

$$= \frac{P(AP1/AUTP3) \times P(AUTP3)}{P(AP1/AUTP1) \times P(AUTP1) + P(AP1/AUTP2) \times P(AUTP2) + P(AP1/AUTP3) \times P(AUTP3)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

**Figura 3**

Dado que a probabilidade de ganhar se trocar a porta escolhida é 2/3 então obrigatoriamente $P(\text{GANHAR/NÃO TROCA}) = 1/3$, mas apresentemos os cálculos para chegar a este valor a partir do esquema desenhado para o problema de Monty Hall e usando as probabilidades condicionadas.

$$P(\text{GANHAR/NÃO TROCA}) = \frac{P(\text{GANHAR} \cap \text{NÃO TROCA})}{P(\text{NÃO TROCA})}$$

$$\begin{gathered} P(\text{GANHAR/NÃO TROCA}) = \\ P((EP1 \cap AP2) \cap \text{NÃO TROCA}) + \\ +P((EP1 \cap AP3) \cap \text{NÃO TROCA}) = \\ P(\text{NÃO TROCA}/(EP1 \cap AP2)) \times P(EP1 \cap AP2) + \\ P(\text{NÃO TROCA}/(EP1 \cap AP3)) \times P(EP1 \cap AP3) = \\ \frac{1}{2} \times P(AP2/EP1) \times P(EP1) + \frac{1}{2} \times P(AP3/EP1) \times P(EP1) = \\ \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \end{gathered}$$

A $P(\text{NÃO TROCA}) = 1/2$ e consequentemente a

$$P(\text{GANHAR/NÃO TROCA}) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Mais uma vez podemos simplificar os cálculos dado que

$$\begin{gathered} P(\text{NÃO TROCA}/(EP1 \cap AP2)) = \\ = P(\text{NÃO TROCA}/(EP1 \cap AP3)) = \\ P(\text{NÃO TROCA}/(EP2 \cap AP3)) = \\ = P(\text{NÃO TROCA}/(EP3 \cap AP2)) = \frac{1}{2} \\ = P(\text{NÃO TROCA}) \end{gathered}$$

E então

$$\begin{gathered} P(\text{GANHAR/NÃO TROCA}) = P(AP2/EP1) \times P(EP1) + \\ +(P(AP3/EP1) \times P(EP1) = \\ \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{gathered}$$

Concluímos pois que é mais vantajoso para o concorrente trocar a porta escolhida para abrir na primeira etapa do jogo, pela outra porta que permanece fechada na terceira etapa, uma vez que

$$P(\text{GANHAR/TROCA}) = \frac{2}{3}$$

e

$$P(\text{GANHAR/NÃO TROCA}) = \frac{1}{3}$$

Voltemos à questão apresentada no manual *PI9*, em que o concorrente já escolheu a porta 3 e o apresentador já abriu a porta 1. Admitamos que o concorrente não troca de montra. A probabilidade de ganhar o automóvel é então $P(AUTP3/AP1)$ onde $(AUT\ Pi)$ representa o automóvel está por detrás da porta $i$ e, como antes, $(A\ Pi)$ representa o apresentador abre a porta $i$. Verifiquemos, usando o teorema de Bayes e a regra das probabilidades totais, que a probabilidade de ganhar é realmente 1/3 (figura 3).

Com este texto esperamos ter contribuído não só para esclarecer quaisquer dúvidas sobre a solução correta para o problema de Monty Hall, como também para ajudar o professor de matemática a clarificar a questão aos seus alunos.

## Referências


Gomes, F., Viegas, C., Lima, Y. (2005). *XeqMat, Matemática A 12.º ano* — Volume 1, Texto editores, LDA

Magro, F., Fidalgo, F., Louçano, P. (2012). *PI9, caderno de atividades*. Edições ASA II, S.A.

Negra, C., Martinho, E. (2012). *Projeto Desafios Matemática A 12.º ano* — Volume1. Santillana Constância.



**Susana Fernandes**

**Mónica Martins Pinto**

Departamento de Matemática, FCT, Universidade do Algarve