

O problema de Monty Hall e as probabilidades condicionadas

Susana Fernandes
Mónica Martins Pinto

O Problema de Monty Hall

O problema de Monty Hall, também conhecido como o problema das 3 portas, surgiu a partir de um concurso televisivo dos Estados Unidos apresentado por Monty Hall na década de 1970. O concurso chamava-se «Let's Make a Deal» e incluía o seguinte jogo:

São apresentadas ao concorrente três portas fechadas e este é informado que atrás de uma das portas existe um bom prémio (automóvel) e atrás das outras duas estão prémios sem valor. Numa primeira etapa o concorrente deverá escolher uma das portas para ficar com o prémio que esta oculta. Na segunda etapa, após a escolha do concorrente, o apresentador, que sabe onde está o bom prémio, abre uma das portas não escolhidas, que não esconda o automóvel. Na terceira etapa do jogo o concorrente pode optar por manter a porta que escolheu no início ou trocar a sua escolha para a outra porta não aberta.

Coloca-se a questão: O que será mais vantajoso para o concorrente, manter a escolha que fez na primeira etapa ou trocar a porta escolhida para abrir?

Intuitivamente somos levados a pensar que, em termos probabilísticos, será indiferente trocar ou não a porta escolhida, mas na verdade o concorrente tem mais hipóteses de ganhar se decidir trocar a sua escolha inicial.

A ideia da igualdade de hipóteses de ganhar trocando ou não de porta «esquece-se» que o apresentador não abre uma das portas não escolhidas ao acaso, mas sim garantido que não mostra o automóvel escondido.

O Problema de Monty Hall nos manuais de matemática

Este problema (na sua forma original ou com pequenas variações) é apresentado em alguns manuais de matemática, quer do 3.º ciclo do ensino básico quer do ensino secundário, embora nem sempre apresentem a resolução e um deles sugira uma solução que não é a correcta.

O manual *XeqMat*, 12.º ano, Volume 1 apresenta o problema e sugere a seguinte resolução:

Sem perda de generalidade, suponha-se que o concorrente escolhe a porta 1. Na tabela 1 encontram-se todas as possibilidades existentes.

	Porta 1	Porta 2	Porta 3
Caso 1	Automóvel	x	x
Caso 2	x	Automóvel	x
Caso 3	x	x	Automóvel

Tabela 1

Se o concorrente mantém a sua escolha, só ganha no caso 1 enquanto que, se trocar, ganha nos casos 2 e 3. Assim, as probabilidades de sucesso mantendo ou trocando a escolha inicial são $1/3$ e $2/3$, respetivamente.

No manual *PI9*, do 9.º ano, o problema surge com uma variação e é apresentada uma solução errada.

O enunciado trata também de um concurso em que um concorrente tem de escolher uma das três portas, onde apenas uma esconde um automóvel. Após a escolha da porta e supondo que o concorrente escolhe a porta 3, o apresentador do concurso abre a porta 1, mostrando que esta nada escondia.

Ele pergunta ao concorrente se pretende trocar esta montra por outra com 5 portas, onde duas delas escondem um automóvel, mas as restantes três escondem um espaço vazio. A questão final é qual a decisão mais acertada a tomar pelo concorrente.

A solução apresentada pelo manual é que o concorrente não deve trocar de montra. Ora tal não está correto pois a probabilidade de ganhar dado que não troca de montra é a mesma, isto é $1/3$, e a probabilidade de ganhar ao trocar de montra passa a ser $2/5$, sendo por isso mais vantajoso trocar de montra.

Este problema de probabilidades, por ter uma solução contra-intuitiva, gera alguma confusão e a resolução apresentada (em tabela) muitas vezes «vence mas não convence» algumas mentes, quer de alunos quer de professores.

O manual *Projeto Desafios, Matemática 12.º ano*, Volume 1 também apresenta este problema (na versão original) mas com uma resolução diferente. O livro foi editado recentemente (ano 2012) e é o único, de que temos conhecimento, a referir as probabilidades condicionadas na resolução do problema.

De seguida apresentamos uma resolução do problema utilizando as probabilidades condicionadas e a regra das probabilidades totais. Será talvez útil recordar estes conceitos antes de apresentar a resolução.

Revisão de conceitos de probabilidades

Dados dois acontecimentos não impossíveis A e B a probabilidade condicionada de A sabendo B representa-se $P(A/B)$ e é dada por

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

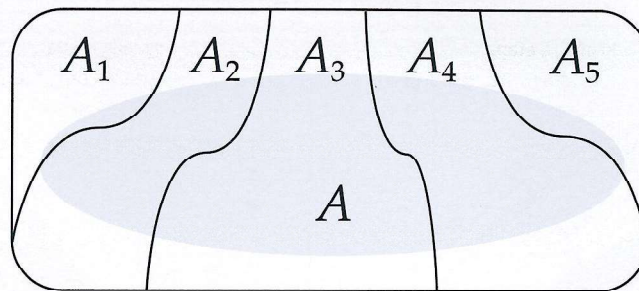


Figura 1. Ilustração de uma partição.

Repare-se que a equação pode ser escrita na forma $P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$.

Analogamente, considerando a probabilidade condicionada de B sabendo A , podemos escrever $P(A \cap B) = P(B/A) \times P(A)$.

A regra das probabilidades totais diz que dada uma partição (A_1, A_2, \dots, A_n com $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$ e $\bigcup A_i = \Omega$) do espaço de resultados Ω , a probabilidade de qualquer acontecimento $A \subseteq \Omega$ é dada por

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A/A_i) \times P(A_i).$$

A Figura 1 apresenta um exemplo de um espaço de resultados onde existe uma partição com 5 elementos.

O teorema de Bayes estabelece que dados dois acontecimentos não impossíveis A e B a probabilidade condicionada de A sabendo B pode ser escrita recorrendo à probabilidade condicionada de B sabendo A da seguinte forma:

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) \times P(A)}{P(B)}.$$

Resolução do problema de Monty Hall

Admitamos, sem perda de generalidade, que o automóvel está por detrás da porta 1. Consideremos o esquema do jogo que se apresenta na Figura 2, onde (E_i) representa o concorrente escolhe a porta i e (A_i) representa o apresentador abre a porta i .

Repare-se que a decisão do apresentador sobre qual a porta a abrir na segunda etapa do jogo é condicionada pela escolha feita pelo concorrente na primeira etapa. Quando o concorrente escolhe uma porta que não esconde o automóvel, o apresentador só pode abrir uma das restantes portas sem o mostrar. Repare-se também que a decisão do concorrente na terceira etapa do jogo é condicionada pelo fato de se ter aberto uma das portas. Mas a probabilidade de decidir trocar (ou não) é sempre a mesma, sejam quais forem as portas escolhida e aberta nas etapas anteriores.

Para responder à questão «O que será mais vantajoso para o concorrente, manter a escolha que fez na primeira etapa ou trocar a porta escolhida para abrir?» vamos comparar a probabilidade do concorrente ganhar o automóvel se trocar de porta escolhida $P(\text{GANHAR}/\text{TROCA})$ com a probabilidade do concorrente ganhar o automóvel se não trocar a porta escolhida $P(\text{GANHAR}/\text{NÃO TROCA})$.

Começemos por calcular a probabilidade do concorrente ganhar o automóvel se trocar de porta escolhida utilizando a definição de probabilidade condicionada

$$P(\text{GANHAR}/\text{TROCA}) = \frac{P(\text{GANHAR} \cap \text{TROCA})}{P(\text{TROCA})}.$$

Relembrando que assumimos que o automóvel está oculto por detrás da porta 1 e usando os conceitos de probabilidades já revistos e os valores das probabilidades apresentados no esquema da Figura 2 temos:

$$\begin{aligned} P(\text{GANHAR} \cap \text{TROCA}) &= P((EP_2 \cap AP_3) \cap \text{TROCA}) + \\ &\quad + P((EP_3 \cap AP_2) \cap \text{TROCA}) \\ &= P(\text{TROCA}/(EP_2 \cap AP_3)) \times P(EP_2 \cap AP_3) + \\ &\quad + P(\text{TROCA}/(EP_3 \cap AP_2)) \times P(EP_3 \cap AP_2) \\ &= \frac{1}{2} \times P(AP_3/EP_2) \times P(EP_2) + \frac{1}{2} \times P(AP_2/EP_3) \times P(EP_3) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Obviamente, a probabilidade do concorrente trocar de porta é $1/2$ mas apresentemos os cálculos, apenas para, mais uma vez, ilustrar o uso da regra das probabilidades totais.

$$\begin{aligned} P(\text{TROCA}) &= P(\text{TROCA} \cap (EP_1 \cap AP_2)) + \\ &\quad + P(\text{TROCA} \cap (EP_1 \cap AP_3)) + \\ &\quad + P(\text{TROCA} \cap (EP_2 \cap AP_3)) + P(\text{TROCA} \cap (EP_3 \cap AP_2)) = \\ &= P(\text{TROCA}/(EP_1 \cap AP_2)) \times P(EP_1 \cap AP_2) + \\ &\quad + P(\text{TROCA}/(EP_1 \cap AP_3)) \times P(EP_1 \cap AP_3) + \\ &\quad + P(\text{TROCA}/(EP_2 \cap AP_3)) \times P(EP_2 \cap AP_3) + \\ &\quad + P(\text{TROCA}/(EP_3 \cap AP_2)) \times P(EP_3 \cap AP_2) = \\ &= \frac{1}{2} \times P(AP_2/EP_1) \times P(EP_1) + \frac{1}{2} \times P(AP_3/EP_1) \times P(EP_1) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \times P(AP_3/EP_2) \times P(EP_2) + \frac{1}{2} \times P(AP_2/EP_3) \times P(EP_3) = \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Assim

$$P(\text{GANHAR}/\text{TROCA}) = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Primeira etapa
Concorrente escolhe uma porta

Segunda etapa
Apresentador abre uma porta

Terceira etapa
Concorrente decide trocar ou não de porta

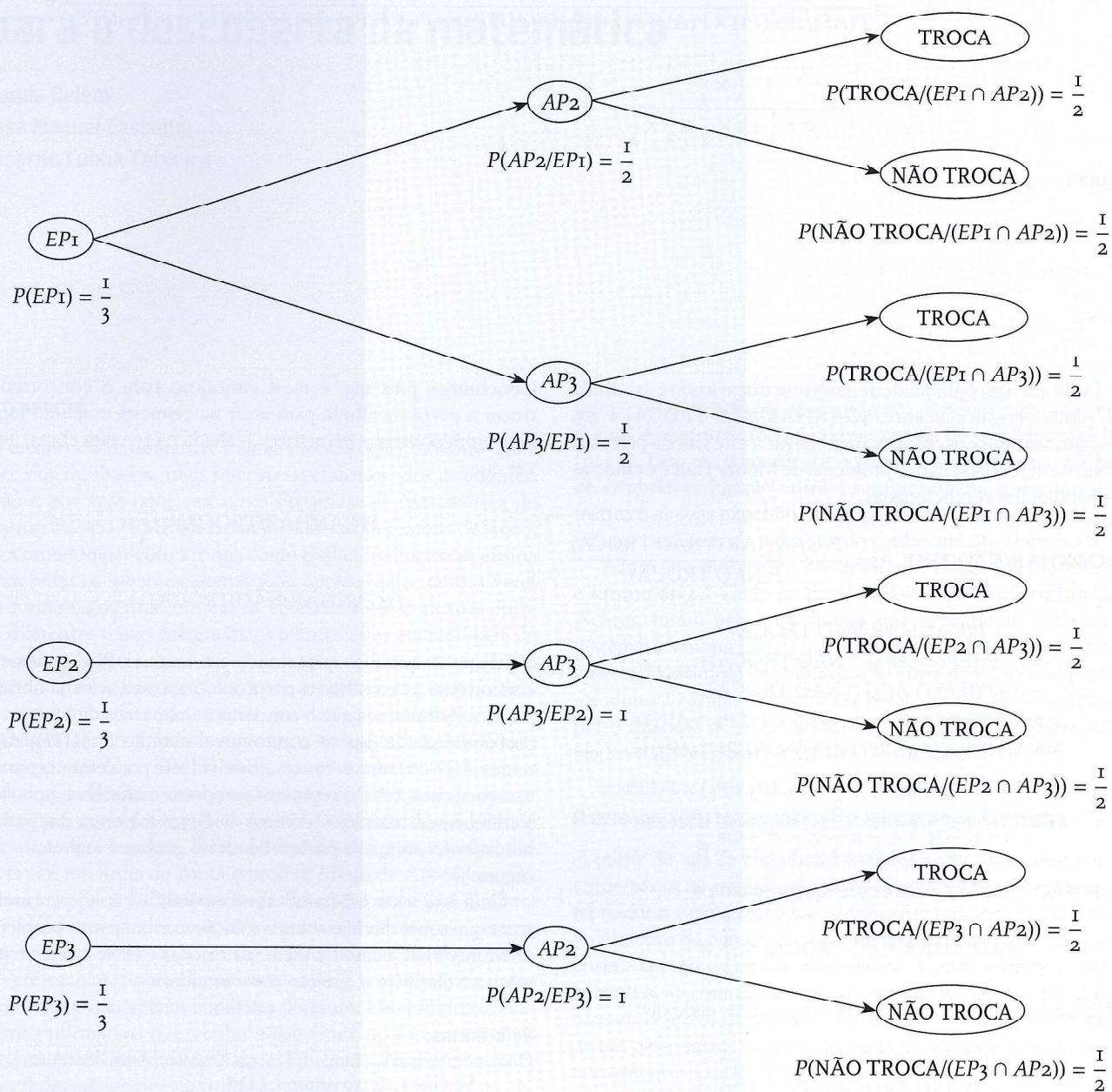


Figura 2. Esquema do problema de Monty Hall

Repare-se que uma vez que

$$\begin{aligned}
 P(TROCA/(EP_1 \cap AP_2)) &= P(TROCA/(EP_1 \cap AP_3)) = \\
 &= P(TROCA/(EP_2 \cap AP_3)) = \\
 P(TROCA/(EP_3 \cap AP_2)) &= \frac{1}{2} = P(TROCA)
 \end{aligned}$$

temos então, de forma simplificada,

$$\begin{aligned}
 P(GANHAR/TROCA) &= P(AP_3/EP_2) \times P(EP_2) + \\
 &+ P(AP_2/EP_3) \times P(EP_3) = \\
 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Vejamos agora a probabilidade do concorrente ganhar o automóvel se não trocar a porta escolhida.

$$\begin{aligned}
 P(AUTP_3/AP_1) &= \frac{P(AUTP_3 \cap AP_1)}{P(AP_1)} = \\
 &= \frac{P(AP_1/AUTP_3) \times P(AUTP_3)}{P(AP_1/AUTP_1) \times P(AUTP_1) + P(AP_1/AUTP_2) \times P(AUTP_2) + P(AP_1/AUTP_3) \times P(AUTP_3)} = \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Figura 3

Dado que a probabilidade de ganhar se trocar a porta escolhida é $2/3$ então obrigatoriamente $P(\text{GANHAR}/\text{NÃO TROCA}) = 1/3$, mas apresentemos os cálculos para chegar a este valor a partir do esquema desenhado para o problema de Monty Hall e usando as probabilidades condicionadas.

$$P(\text{GANHAR}/\text{NÃO TROCA}) = \frac{P(\text{GANHAR} \cap \text{NÃO TROCA})}{P(\text{NÃO TROCA})}$$

$$\begin{aligned}
 P(\text{GANHAR}/\text{NÃO TROCA}) &= \\
 &P((EP_1 \cap AP_2) \cap \text{NÃO TROCA}) + \\
 &+ P((EP_1 \cap AP_3) \cap \text{NÃO TROCA}) = \\
 &P(\text{NÃO TROCA}/(EP_1 \cap AP_2)) \times P(EP_1 \cap AP_2) + \\
 &P(\text{NÃO TROCA}/(EP_1 \cap AP_3)) \times P(EP_1 \cap AP_3) = \\
 &\frac{1}{2} \times P(AP_2/EP_1) \times P(EP_1) + \frac{1}{2} \times P(AP_3/EP_1) \times P(EP_1) = \\
 &\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

A $P(\text{NÃO TROCA}) = 1/2$ e consequentemente a

$$P(\text{GANHAR}/\text{NÃO TROCA}) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Mais uma vez podemos simplificar os cálculos dado que

$$\begin{aligned}
 P(\text{NÃO TROCA}/(EP_1 \cap AP_2)) &= \\
 &= P(\text{NÃO TROCA}/(EP_1 \cap AP_3)) = \\
 &P(\text{NÃO TROCA}/(EP_2 \cap AP_3)) = \\
 &= P(\text{NÃO TROCA}/(EP_3 \cap AP_2)) = \frac{1}{2} \\
 &= P(\text{NÃO TROCA})
 \end{aligned}$$

E então

$$\begin{aligned}
 P(\text{GANHAR}/\text{NÃO TROCA}) &= P(AP_2/EP_1) \times P(EP_1) + \\
 &+ P(AP_3/EP_1) \times P(EP_1) = \\
 &\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Concluimos pois que é mais vantajoso para o concorrente trocar a porta escolhida para abrir na primeira etapa do jogo, pela outra porta que permanece fechada na terceira etapa, uma vez que

$$P(\text{GANHAR}/\text{TROCA}) = \frac{2}{3}$$

e

$$P(\text{GANHAR}/\text{NÃO TROCA}) = \frac{1}{3}$$

Voltemos à questão apresentada no manual *PI9*, em que o concorrente já escolheu a porta 3 e o apresentador já abriu a porta 1. Admitamos que o concorrente não troca de montra. A probabilidade de ganhar o automóvel é então $P(AUTP_3/AP_1)$ onde ($AUT Pi$) representa o automóvel está por detrás da porta i e, como antes, (APi) representa o apresentador abre a porta i . Verifiquemos, usando o teorema de Bayes e a regra das probabilidades totais, que a probabilidade de ganhar é realmente $1/3$ (figura 3).

Com este texto esperamos ter contribuído não só para esclarecer quaisquer dúvidas sobre a solução correta para o problema de Monty Hall, como também para ajudar o professor de matemática a clarificar a questão aos seus alunos.

Referências

- Gomes, F., Viegas, C., Lima, Y. (2005). *XeqMat, Matemática A 12.º ano* — Volume 1, Texto editores, LDA
 Magro, F., Fidalgo, F., Louçano, P. (2012). *PI9, caderno de atividades*. Edições ASA II, S.A.
 Negra, C., Martinho, E. (2012). *Projeto Desafios Matemática A 12.º ano* — Volume 1. Santillana Constância.

Susana Fernandes

Mónica Martins Pinto

Departamento de Matemática, FCT, Universidade do Algarve