

Da secção de ouro ao pentágono regular⁽¹⁾

Eduardo Veloso

Introdução

Numa Nota anterior (*Secção de ouro — primeiros passos*, E&M n.º 121) mostrámos como Euclides introduz a construção da secção de ouro de um segmento AB , ou seja a divisão de AB , por meio de um ponto C , em dois segmentos AC e CB , de tal modo que o quadrado de lado AC tem área igual à do rectângulo de lados AB e CB . Mantivémo-nos escrupulosamente no âmbito dos *Elementos* de Euclides, e assim *área* de uma figura significa «região do plano ocupada pela figura» e não medida numérica, e a *comparação de áreas* entre duas figuras faz-se por meios puramente geométricos (de preferência, leia essa Nota anterior antes de prosseguir). E revelámos que a secção de ouro (embora sem este nome) foi incluída nos *Elementos* como preparativo para a construção do pentágono regular.

O objectivo da presente Nota é precisamente mostrar como Euclides se serve da razão de ouro para construir o pentágono regular. No entanto, embora nos mantenhamos no âmbito da geometria euclidiana, os pressupostos e recursos que iremos utilizar não são apenas os de Euclides ao escrever os *Elementos*, como fizemos na Nota anterior. 2300 anos depois, e sobretudo depois da construção dos números irracionais por Dedekind e outros matemáticos, é possível hoje partir de axiomáticas da geometria euclidiana diferentes da de Euclides, que foi revista por Hilbert no início do séc. XX. Na axiomática proposta por Moise, em 1982, os postulados não são os de Euclides nem de Hilbert, mas sim os postulados métricos, «que envolvem a ideia de medida, em números reais, de distâncias, ângulos e áreas»^[2]

Entendemos que os professores de matemática do ensino básico e secundário têm hoje estas duas vias à sua disposição, quando estão a propor actividades em geometria euclidiana aos seus alunos. De acordo com os objectivos de natureza cultural que defendemos para a educação matemática, a experiência dos alunos deve desenvolver-se em diferentes contextos históricos

— como são por exemplo o contexto dos *Elementos* e o contexto de uma abordagem moderna de tópicos incluídos, ou não, nos *Elementos*. O essencial é que o professor — e não necessariamente os alunos, antes de terem maturidade para isso — esteja consciente do contexto axiomático em que está a trabalhar, pois disso dependem o significado dos conceitos e os métodos utilizados. Por esta razão, esta segunda nota, embora trate da utilização da secção de ouro na construção do pentágono regular — um tópico do livro IV dos *Elementos* — será apresentada no contexto moderno dos postulados métricos da geometria euclidiana. Isso significa por exemplo que no enunciado da proposição II.11, que em linguagem moderna se escreve

Dado um segmento AB , determinar um ponto C em AB tal que a área do rectângulo de lados AB e CB seja igual à área do quadrado de lado AC

a palavra *área* significa *valor numérico da área*, ou seja o produto dos comprimentos de AB e CB ou o quadrado do comprimento de AC .

O leitor não deixará de constatar outras diferenças de terminologia e processos entre as duas notas.

Do rectângulo de ouro ao triângulo de ouro

Seja $ABFG$ um rectângulo verificando a seguinte propriedade (figura 1):

Se construirmos sobre o lado AG o quadrado $ACDG$, então os rectângulos $ABFG$ e $BFDC$ são semelhantes.

É quase imediato que o ponto C que assim obtemos em AB tem exactamente a propriedade exigida por Euclides para o ponto C na proposição II.11 referida acima. Na realidade, se os rectângulos $ABFG$ e $BFDC$ são semelhantes, então $AB/BF = AG/CB$. Mas

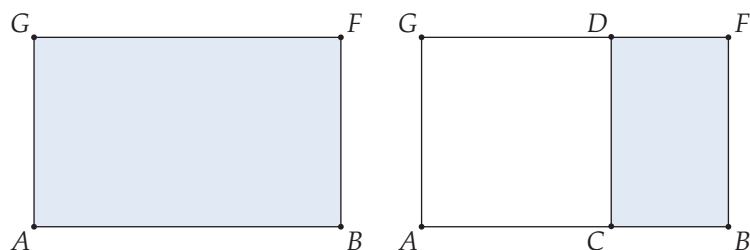


Figura 1

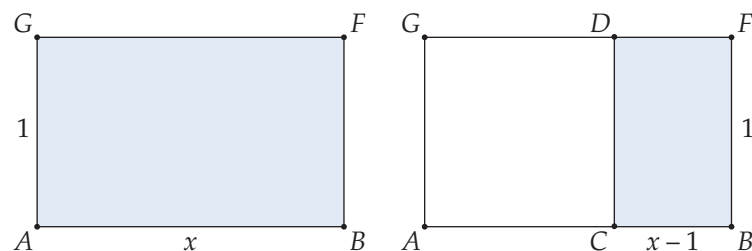


Figura 2

como $BF = AG$, da proporção anterior resulta que $AG^2 = AB \cdot CB$, ou seja, a igualdade das áreas do quadrado e do rectângulo referidos por Euclides. A um rectângulo verificando aquela propriedade passou no séc. XIX a designar-se por *rectângulo de ouro*.

Além disso, a secção do segmento AB de acordo com a proposição II.11 passou a chamar-se *secção de ouro* e à razão entre o lado maior e menor do rectângulo de ouro chama-se agora *razão de ouro*. Um pouco de álgebra permite-nos encontrar o valor numérico da razão de ouro.

Tomemos para unidade de medida o lado menor do rectângulo de ouro, e designemos por x o lado maior (figura 2).

Então teremos $x/1 = 1/(x-1)$ ou $x(x-1) = 1$ e a raiz positiva desta equação é $(1 + \sqrt{5})/2$, ou seja o irracional, habitualmente designado pela letra grega ϕ ,

$$\phi = 1.61803\dots$$

Este número é habitualmente designado por *número de ouro*.

Como iremos ver, uma das construções que Euclides pretende fazer, no livro IV dos Elementos, é a do pentágono regular. Foi para isso que enunciou a prop. II.11 e chegou ao que hoje chamamos razão de ouro. Para ter tudo o que precisa para construir o pentágono regular, apenas lhe falta construir um triângulo isósceles especial a que hoje chamamos *triângulo de ouro*. É o objectivo da proposição IV.10:

Construir um triângulo isósceles em que cada um dos ângulos da base seja duplo do restante ângulo.

Nota. Como dissemos na Introdução, iremos realizar esta construção no contexto dos postulados métricos, e portanto afastamo-nos da construção descrita por Euclides nos *Elementos*.

Seja AB um segmento qualquer e seja C um ponto que divide o segmento AB na secção de ouro (figura 3a). Construamos o ponto D , intersecção da mediatriz do segmento CB com a circunferência de centro C e raio CA . Se unirmos os pontos A, C e B com D , como o ângulo ABD é comum aos triângulos ABD e DCB e se verifica (pela razão de ouro) a proporção $AB/BD = BD/CB$, aqueles triângulos são semelhantes e portanto têm os ângulos iguais dois a dois. Logo, o ângulo BCD , externo do triângulo isósceles ACD , é igual ao dobro do ângulo CDB , como pretendíamos. Construámos assim um triângulo nas condições da proposição IV.10.

Do triângulo de ouro ao pentágono regular

Euclides pretende em seguida construir um pentágono regular; é a proposição IV.11:

Inscrever um pentágono regular numa dada circunferência.

Seja dada então a circunferência c_1 . O primeiro passo a dar é inscrever nessa circunferência um triângulo de ouro. Para isso construámos um qualquer triângulo de ouro, por exemplo PQR . E depois construámos a respectiva circunferência circunscrita, seja c_2 . Como duas circunferências são sempre homotéticas, determinamos o centro de homotetia construindo a semirecta

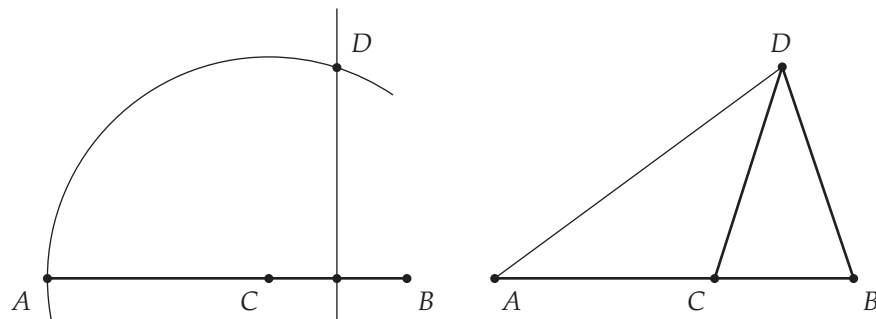


Figura 3

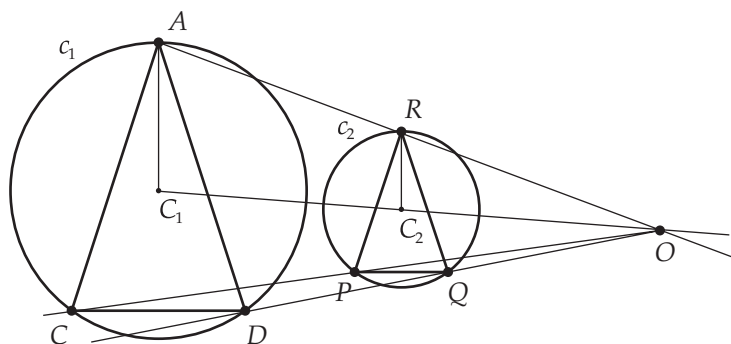


Figura 4

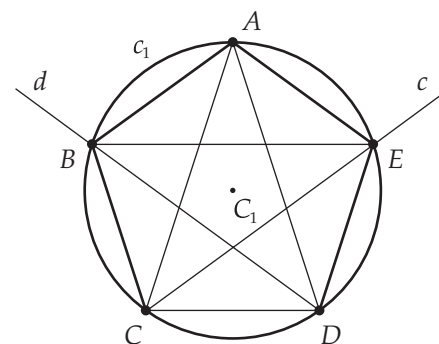


Figura 5

Prop.IV.11. Inscrever um pentágono regular numa circunferência

Prop. I.9. Construir a bissetriz de um ângulo dado.

Prop.III.26. Em circunferências iguais, ângulos iguais subtendem arcos iguais, estejam os vértices nos centros ou sobre as circunferências.

Prop.III.27. Em circunferências iguais, ângulos que subtendem arcos iguais são iguais, estejam os vértices nos centros ou sobre as circunferências.

Prop.III.29. Segmentos de circunferências semelhantes em segmentos de recta iguais são iguais entre si.

Prop.IV.2. Construir uma corda numa dada circunferência igual a um segmento dado que não seja maior do que o

Prop.IV.10. Construir um triângulo isósceles em que cada ângulo interno da base é igual ao dobro do terceiro ângulo.

I.1	I.8	Def 20	Pos 1	I.3	I.4	III 24	Def 11	I.23	I.26	III 20	I.4	III 1	III 27	I.32	III 16	III 32	Def 2	I.5	I.6	I.32	II 11	III 32	III 37	IV 1	IV 5
-----	-----	--------	-------	-----	-----	--------	--------	------	------	--------	-----	-------	--------	------	--------	--------	-------	-----	-----	------	-------	--------	--------	------	------

...

Tabela 1

dos centros, C_1C_2 e a semirecta AR que une as extremidades de dois raios paralelos. AC_1 e RC_2 . O centro de homotetia é a intersecção O dessas duas semi-rectas, e o factor de homotetis é AC_1/RC_2 . O triângulo de ouro procurado é então a imagem por essa homotetia, CDA , do triângulo PQR .

O pentágono regular procurado inscrito na circunferência c_1 é agora de construção imediata (figura 5). Basta determinar as bissetrizes d e c dos ângulos da base do triângulo CDA , e construir as intersecções dessas bissetrizes, B e E , com c_1 , encontrando assim os cinco vértices A, B, C, D, E do pentágono procurado. A prova de que obtivemos assim realmente um pentágono regular é, tendo em conta a construção feita, quase imediata, e fica ao cuidado do leitor. O leitor interessado poderá ver a demonstração de Euclides, recorrendo à tradução dos *Elementos* tal como está apresentada na *web* por David Joyce, <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html>.

É possível, utilizando o *site* de Joyce, e interessante, *para quem gosta de matemática...*, fazer um trabalho (pelo menos iniciá-lo) de reconstituição de todas as proposições, definições

e postulados de Euclides necessários para a construção do pentágono regular dos *Elementos*. A tabela seguinte mostra o início dessa pesquisa.

Na primeira linha vemos a Proposição IV.11 (livro IV, proposição 11) com o pedido de construção de um pentágono regular inscrito numa circunferência. Na segunda linha escrevemos as proposições a que recorre Euclides (I.9, III.26, III.27, III.29, IV.2 e IV.10), na demonstração de IV.11. Na terceira linha, por óbvia falta de espaço, apenas escrevemos os números das proposições, definições e postulados a que Euclides recorre para demonstrar cada proposição da linha 2. E a pesquisa não terminaria aqui, obviamente...

Notas

- (1) O autor escreve segundo a anterior ortografia
- (2) Geometry, Edwin E. Moise e Floyd L. Downs, Jr., Teacher's Edition, pág. 11. O magnífico livro sobre a *Geometria Euclidiana*, de Franco de Oliveira, segue também a via métrica.

Eduardo Veloso