

# Construção de polígonos regulares com régua (não graduada) e compasso:

Um problema com séculos de história

Ricardo Ferreira

Os polígonos regulares destacam-se pelas inúmeras simetrias que apresentam. Por exemplo, na Grécia Antiga, o pentágono regular assumia uma grande importância para os pitagóricos, visto que o pentagrama regular era o símbolo da confraria pitagórica. A construção de polígonos é algo que é ensinado nas disciplinas de matemática e de educação visual, mas muitas vezes, passa ao lado a sua riqueza histórica, por ser algo desconhecido por muitos. Este artigo faz referência à história da construção de polígonos regulares com régua e compasso, um problema que demorou séculos a ser resolvido.

## 1. Síntese histórica sobre as construções geométricas com régua e compasso

Uma construção geométrica com régua (não graduada) e compasso é todo o desenho geométrico que pode ser construído usando apenas uma régua não graduada e um compasso.

Tanto quanto se sabe, as construções geométricas com régua e compasso tiveram origem na Grécia Antiga, por volta do século V A.C.. A reta e a circunferência eram consideradas as curvas perfeitas, daí que régua e compasso fossem os instrumentos ideais para as traçar. Desde cedo, os gregos se depararam



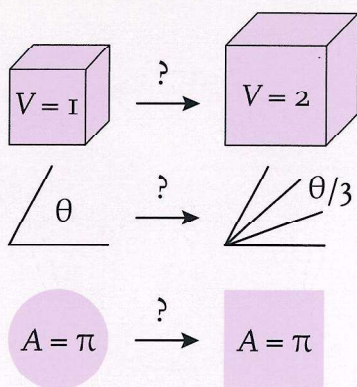


Figura 1

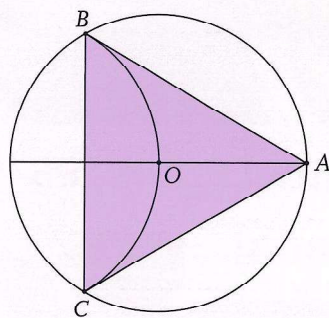


Figura 2

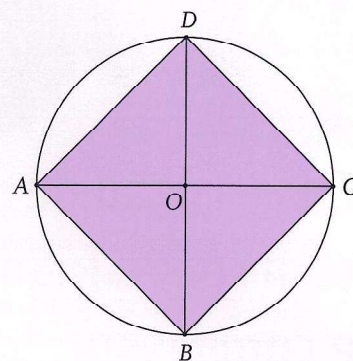


Figura 3

com a dificuldade de fazer algumas construções com régua e compasso tais como (figura 1):

- Duplicação do cubo
- Trisseção do ângulo
- Quadratura do círculo

Estes são chamados de problemas clássicos da matemática grega, tendo sido alvos de estudo por mais de 2000 anos. Apenas no século XIX, com o desenvolvimento da matemática se provou que eram impossíveis.

Os gregos ao tentarem arranjar construções para os polígonos regulares, aperceberam-se que havia problemas na construção de certos polígonos. A resposta ao problema surge quase 20 séculos depois de sua origem.

## 2. Polígonos regulares

Um *polígono* diz-se regular se todos os seus lados forem iguais entre si e os ângulos internos também. Um *polígono* regular diz-se inscrito numa circunferência quando todos os seus vértices pertencem a essa circunferência. Neste caso, a circunferência diz-se circunscrita ao polígono e o seu centro chama-se circuncentro do polígono.

Num polígono regular, inscrito numa circunferência, podemos notar que:

- os lados são cordas da circunferência geometricamente iguais.
- a cordas iguais correspondem ângulos ao centro iguais.
- a ângulos ao centro iguais correspondem arcos geometricamente iguais.

Assim, a inscrição de um polígono regular com  $n$  lados numa circunferência é equivalente à divisão da circunferência em  $n$  partes iguais.

Nos *Elementos*, obra de grande importância na matemática, Euclides apresenta-nos as construções para inscrever numa circunferência polígonos regulares com 3, 4, 5 e 15 lados. Acresce que os gregos, partindo de um polígono com  $n$  lados sabiam construir o polígono com  $2n$  lados bisetando os ângulos ao centro do polígono com  $n$  lados, a este processo chamavam duplicação do número de lados. Assim tinham facilmente a construção de polígonos regulares com 6, 8, 10, 12, 16, 24, 30, ... lados.

Um polígono regular diz-se *construtível* se existir uma construção exata desse polígono que use apenas régua (não graduada) e compasso.

## 3. Construções de alguns polígonos regulares

*Construção de um triângulo equilátero inscrito numa circunferência (figura 2)*

- Desenha-se uma circunferência e traça-se um diâmetro.
- Traça-se um arco com raio igual à metade do diâmetro desenhado e com centro num dos extremos desse diâmetro.
- Marcam-se os pontos  $B$  e  $C$ , que são os pontos de interseção da circunferência com o arco desenhado anteriormente.

Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os vértices de um triângulo equilátero.

*Construção de um quadrado inscrito numa circunferência (figura 3)*

- Desenha-se uma circunferência de centro  $O$  e traça-se um diâmetro  $[AC]$ .
- Traça-se um diâmetro perpendicular ao diâmetro desenhado. Seja o segmento  $[BD]$  esse diâmetro.

Os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são os vértices de um quadrado.

*Nota:* Cada ângulo ao centro é reto.

*Construção de um pentágono regular inscrito numa circunferência (figura 4)*

- Desenha-se uma circunferência de centro  $O$ .
- Traçam-se dois diâmetros perpendiculares,  $[AB]$  e  $[CD]$ .
- Determina-se  $M$ , o ponto médio do segmento  $[OD]$ .
- Com centro em  $M$ , traça-se um arco de raio  $\overline{MA}$  que intersece o diâmetro  $[CD]$  no ponto  $N$ .
- Com centro em  $A$ , traça-se um arco de raio  $\overline{AN}$  e determina-se o ponto  $H$ .
- O segmento  $[AH]$  é o lado do pentágono regular.
- Constrói-se o pentágono regular de vértices  $A$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$  e  $H$ .

*Construção de um hexágono regular inscrito numa circunferência (figura 5)*

- Desenha-se uma circunferência de centro  $O$  e traça-se um diâmetro  $[AB]$ .



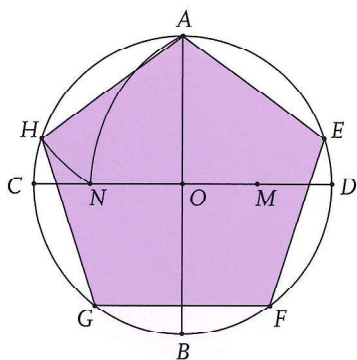


Figura 4

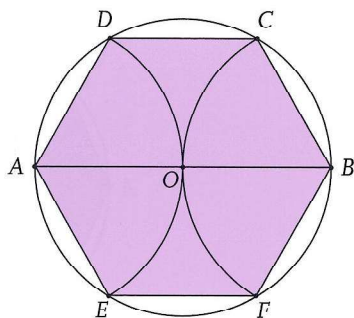


Figura 5

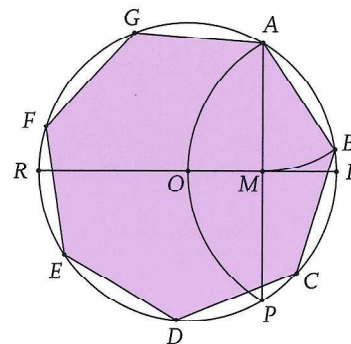


Figura 6

- Com centro em A, traça-se o arco  $DE$  que passe por  $O$ .
- Com centro em B, traça-se o arco  $CF$  que passe por  $O$ .

Os pontos A, B, C, D, E e F são os vértices de um hexágono regular.

*Construção de um heptágono inscrito numa circunferência (figura 6)*

- Desenha-se uma circunferência de centro O e traça-se um diâmetro  $[RL]$ .
- Traça-se um arco com centro em L, que passe por O e marcam-se os pontos A e P.
- Une-se os pontos A e P e marca-se M, o ponto médio do segmento  $[OL]$ .
- Com centro em A traça-se um arco de raio  $\overline{AM}$  e marca-se o ponto B, interseção do arco desenhado com a circunferência.
- Tomando como medida o arco AB, utilizando o compasso determina-se os pontos C, D, E, F, G.

Os pontos A, B, C, D, E, F e G, são vértices de um heptágono.

Utilizando a construção acima, consegue-se obter um heptágono inscrito numa circunferência. Contudo este heptágono não é regular, pois os lados não têm o mesmo comprimento. Vejamos os dois heptágonos (figura 7) que foram construídos usando o processo descrito anteriormente.

Ambos os heptágonos têm 6 lados iguais e um que difere dos outros, assim estes heptágonos não são regulares. A construção do heptágono regular inscrito numa circunferência foi um problema para os gregos. Estes não conseguiam encontrar uma construção exata que usasse apenas régua e compasso, daí a sua construção não aparecer nos *Elementos* de Euclides. Encontrar uma construção exata para um heptágono regular foi algo que intrigou não só os geómetras, mas também físicos, padres, funcionários das finanças, etc. Todos arranjaram construções para o heptágono regular, contudo eram aproximadas ou utilizavam outros instrumentos para além da régua e do compasso. De facto, não é possível dividir a circunferência em 7 partes iguais, logo é

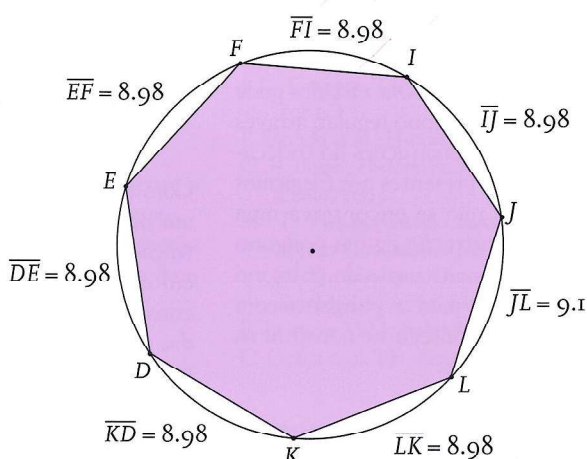
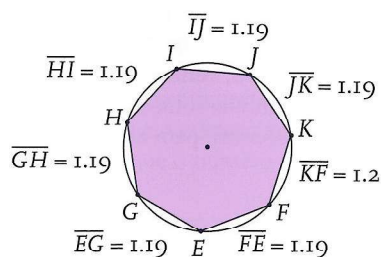


Figura 7

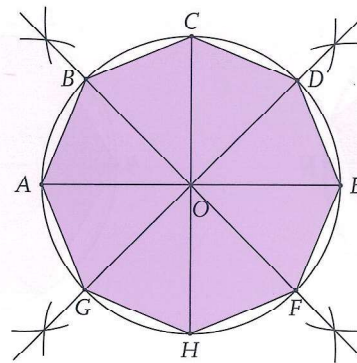


Figura 8

impossível, como veremos mais à frente, construir o heptágono regular usando apenas os dois instrumentos de desenho. O heptágono regular é o polígono com menor número de lados que não é construível, a construção dada anteriormente é apenas uma construção aproximada.

*Construção de um octógono regular inscrito numa circunferência (figura 8)*

- Desenha-se uma circunferência de centro  $O$ .
- Divide-se a circunferência em 4 partes iguais e marcam-se os pontos  $A, C, E$  e  $G$ .
- Traça-se a bissetriz de cada ângulo reto obtido no passo anterior.
- Marcam-se os pontos  $B, D, F$  e  $H$ , interseção da circunferência com as bissetrizes desenhadas.

Os pontos  $A, B, C, D, E, F, G$  e  $H$ , são vértices de um octógono regular.

Depois do heptágono regular, surgiu dificuldade em se arranjar uma construção exata para o eneágono. A construção do decágono pode ser feita bisetando os 5 ângulos ao centro do pentágono regular. Seguiu-se a construção do undecágono, que ao longo de anos foi alvo de estudo, para se encontrar uma construção exata. A construção do polígono regular com 12 lados pode ser obtida utilizando a construção do hexágono regular, através da duplicação do número de lados. As construções do tridecágono e do tetradecágono, não estavam presentes nos *Elementos* de Euclides, e ao longo dos tempos não se encontrava uma construção exata. Uma vez que a construção de um polígono de  $2n$  lados pode ser feita a partir da construção do polígono de  $n$  lados, a inexistência de construção para os polígonos com 7, 9, 11 e 13 lados, levou a que não se conseguisse construir os polígonos regulares com os seguintes lados:

7, 14, 28, 56, ...  
9, 18, 36, 72, ...  
11, 22, 44, 88, ...  
13, 26, 52, 104, ...

Existem polígonos regulares que podem ser construídos usando a construção de dois outros polígonos regulares, como mostra o seguinte resultado.

Se os polígonos regulares com  $m$  e  $n$  lados forem construtíveis e o  $\text{m.d.c.}(m, n) = 1$  então o polígono regular com  $mn$  lados também é construtível.

Este resultado pode ser usado para a construção do pentadecágono regular. Como o  $\text{m.d.c.}(3, 5) = 1$ , o polígono com 15 lados pode ser construído utilizando o triângulo equilátero e o pentágono regular, como veremos a seguir.

*Construção de um pentadecágono regular inscrito numa circunferência, utilizando a construção do triângulo equilátero e do pentágono regular (figura 9)*

- Desenha-se uma circunferência de centro  $O$ .
- Desenha-se um pentágono regular de vértices  $A, D, G, J, M$  inscrito na circunferência desenhada.
- Desenha-se um triângulo equilátero de vértices  $A, F, K$ , tal que um vértice seja comum ao pentágono, neste caso o ponto  $A$ .
- O segmento de reta  $[FG]$  é o lado do pentadecágono regular.
- Constrói-se o pentadecágono regular de vértices  $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N$  e  $P$ .

Com a construção do octógono, facilmente se pode construir um hexadecágono. A procura de soluções exatas para a construção de certos polígonos regulares durou quase 2000 anos, em que imensos matemáticos e não só, tentaram encontrar construções precisas, mas apenas obtinham soluções aproximadas ou que precisavam de outros materiais, para além dos dois instrumentos básicos de desenho.

#### 4. Resposta ao problema

Em 1796, Gauss, matemático alemão, com apenas 19 anos apresentou uma construção para o polígono de 17 lados. Mais



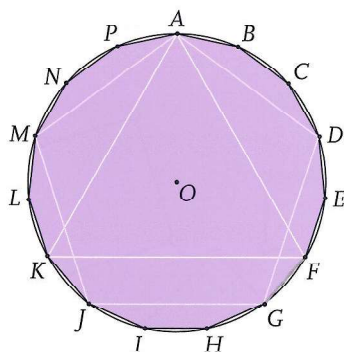


Figura 9

tarde, em 1801, Gauss deu a solução geral, pela qual ficamos a saber que polígonos regulares podem ser construídos usando apenas régua e compasso.

É possível construir, apenas com régua e compasso, um polígono regular com  $n$  lados se e só se,  $n$  for uma potência de 2 (maior ou igual a 4) ou o produto de uma potência de 2 por primos de Fermat distintos.

#### 4.1 Primos de Fermat

Fermat, matemático francês, conjecturou que os termos da sucessão de termo geral,  $u_n = 2^{2^n} + 1$  eram primos. Hoje sabe-se que a conjectura é falsa, pois:

$n = 0$	$u_0 = 3$	primo
$n = 1$	$u_1 = 5$	primo
$n = 2$	$u_2 = 17$	primo
$n = 3$	$u_3 = 257$	primo
$n = 4$	$u_4 = 65537$	primo
$n = 5$	$u_5 = 4294967297$	não é primo

Atualmente, são apenas conhecidos 5 primos de Fermat:

3 | 5 | 17 | 257 | 65537

Utilizando o resultado do Gauss, fica mostrado que realmente o heptágono regular não é construtível com régua e compasso.

Se não houver mais nenhum primo de Fermat, apenas existem 31 polígonos com um número ímpar de lados, que se podem inscrever numa circunferência:

- 5 em que o número de lados é um primo de Fermat.
- 10 em que o número de lados é produto de dois primos de Fermat.
- 10 em que o número de lados é produto de três primos de Fermat.

- 5 em que o número de lados é produto de quatro primos de Fermat.
- 1 em que o número de lados é produto dos cinco primos de Fermat.

Dados todos estes polígonos regulares construtíveis que têm um número ímpar de lados, se a estes se juntar o quadrado, então todos os outros polígonos regulares podem ser obtidos à custa destes, por sucessivas duplicações do número de lados. Existe assim, uma infinidade de polígonos com um número par de lados que são construtíveis.

Os polígonos regulares com menos de 300 lados, que podem ser construídos com régua e compasso são, os que têm:

3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272 lados.

Foram necessários quase 20 séculos para que se conseguisse caracterizar os polígonos regulares construtíveis. Uma vez que o resultado de Gauss depende dos primos de Fermat e só são conhecidos 5, o problema não está completamente resolvido.

#### Referências bibliográficas

- J. C. Carrega, *Théorie des Corps, la règle et le compas*, Hermann, Paris, 1981.
- F. Estrada et al, *História da Matemática*, Universidade Aberta, 2000.
- C. B. Boyer, *História da Matemática*, Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1993.
- M. T. Viegas, *Divisão duma Circunferência em Partes Iguais usando apenas Compasso e Régua não Graduada (Um Problema do Tempo de Euclides que Gauss Colocou nas Mãos de Fermat)*, Atas do ProfMat98, APM, Lisboa, 1998.
- E. Durão e M.M. Baldaque, *Mat 9*, Texto Editora, Lisboa, 2009.
- C. Graça et al, *Ver, Desenhar e Criar*, Lisboa Editora, 2006.

Ricardo Ferreira

ricardoamferreira@hotmail.com