Rebuscando no sótão

Já vos aconteceu ir à procura de uma coisa (*rebuscar*) e aparecer outra? Pois essa outra coisa (Lei do paralelogramo), por ser antiga (*fez-me lembrar o sótão*), despertou-me (*tinha acabado de completar o Curso de Teaching Geometry with The Geometer's Sketchpad (GSP versão 5)*) o desafio de apresentar uma demonstração geométrica/algébrica. Como para demonstrar há que reconhecer o objeto, assim surge o enunciado:

A lei do paralelogramo

A soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das diagonais do mesmo.

Hipótese: Dadas as áreas dos quadrados dos lados (A_1 e A_2) de um paralelogramo bem assim como as áreas dos quadrados cujos lados são as diagonais do paralelogramo (A_3 e A_4)

Tese: Provar que $2(A_1 + A_2) = A_3 + A_4$

Nota: Atende-se que $D^2 = A_3$ e $d^2 = A_4$ e que $a^2 = A_1$ e $b^2 = A_2$

Geometricamente:
As Figuras 1,2 e 3 são o que chamo de pré-requisitos.

São construções de quadrados (8), com compasso, duas perpendiculares, uma paralela e uma intersecção.

Como poderão verificar, (*sketch* dinâmico feito em GSP 5 e apresentado no *you tube* (original)), na demonstração não aparece o quadrado da diagonal maior (D^2) do paralelogramo, mas sim a sua decomposição (pitagórica) ($(a+c)^2 + h^2$) (figura 1); o mesmo se passa com o quadrado da diagonal menor (d^2) que será substituído por ($(a-c)^2 + h^2$) (figura 3).

Na Figura 2 construíram-se quadrados dos lados maior (lado a) e menor (lado b) do paralelogramo.

As Figuras 4,5 e 6 representam a decomposição de $(a+c)^2$ em fases sucessivas.

Na Figura 4, decomposição de $(a+c)^2$ em a^2 e numa peça em L.

Na Figura 5, decomposição de a^2 em $(a-c)^2$ e outra peça em L.

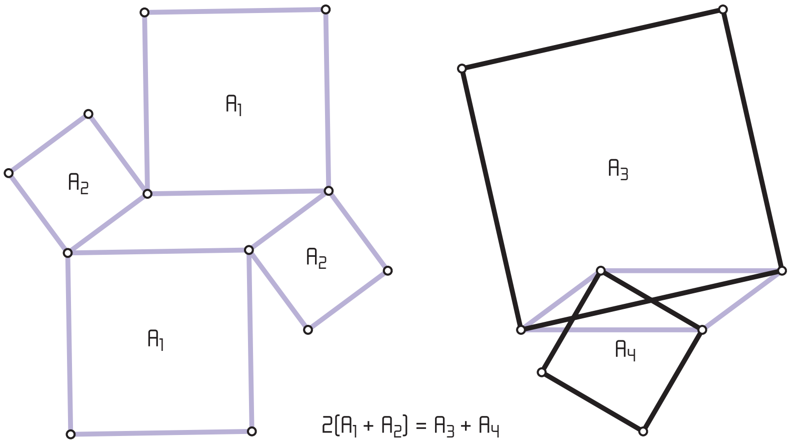
Na Figura 6, utilizando peças anteriores e/ou arcos de circunferência perpendiculares e interseções ficou assim decomposto o quadrado de lado a +c em quatro retângulos, em dois quadrados de lado a-c e dois quadrados de lado c.

Na figura 6, $(a-c)^2 + R_1 + R_2 = a^2$ e $(a-c)^2 + R'_1 + R'_2 = a^2$.

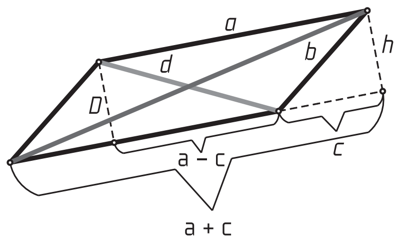
A Figura 7 mostra a decomposição do quadrado do lado menor do paralelogramo em $h^2 + c^2$, pelo que os quadrados que sobram na figura 6 correspondem à decomposição dos dois quadrados do lado menor do paralelogramo.

Pronto está aqui tudo o que é preciso para demonstrar esta Lei. Agora é só «juntá-las» e dar-lhes movimento. Veja-o em

http://www.youtube.com/watch?v=w5TxWJboOPw



Demonstração:



$$
\begin{aligned}
A_{(\text{soma dos quadrados das diagonais})} &= D^2+d^2\\
&= (a+c)^2 + h^2 + (a-c)^2 + h^2\\
&= a^2 + 2ac + c^2 + a^2 - 2ac + c^2 + 2h^2\\
\text{Como } h^2 = b^2 - c^2, \quad &= 2a^2 + 2c^2 + 2(b^2 - c^2)\\
&= 2a^2 + 2c^2 + 2b^2 - 2c^2\\
&= 2(a^2 + b^2)\\
&= A_{(\text{soma dos quadrados dos lados do paralelogramo})}
\end{aligned}
$$

Algebricamente provado

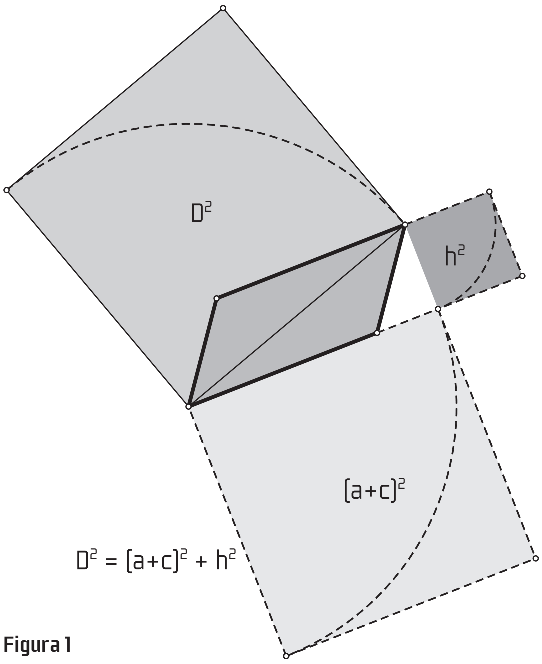


Figura 1

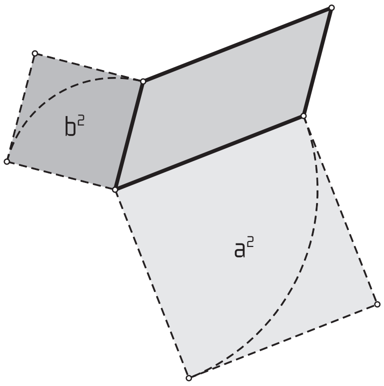


Figura 2

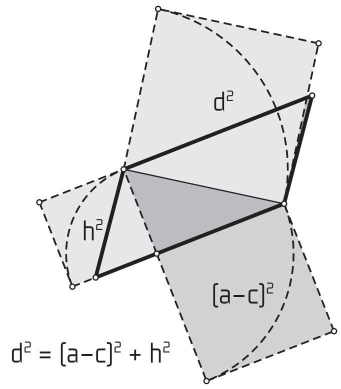


Figura 3

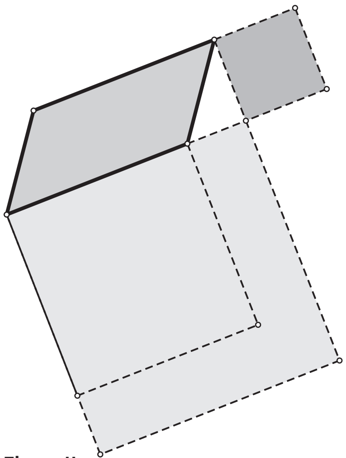


Figura 4

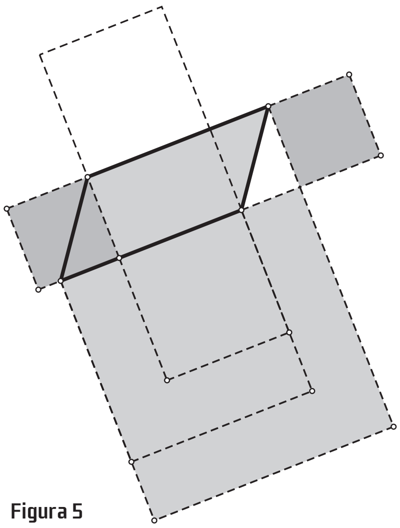


Figura 5

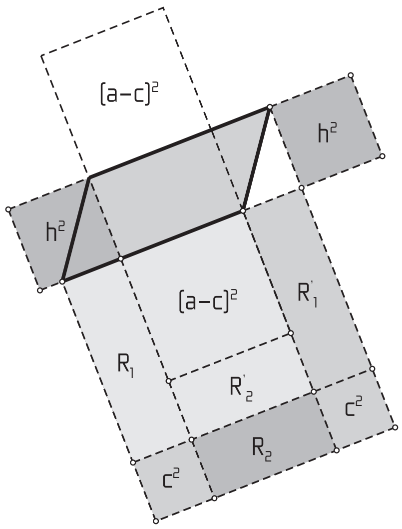


Figura 6

Decomposição do lado menor do paralelogramo

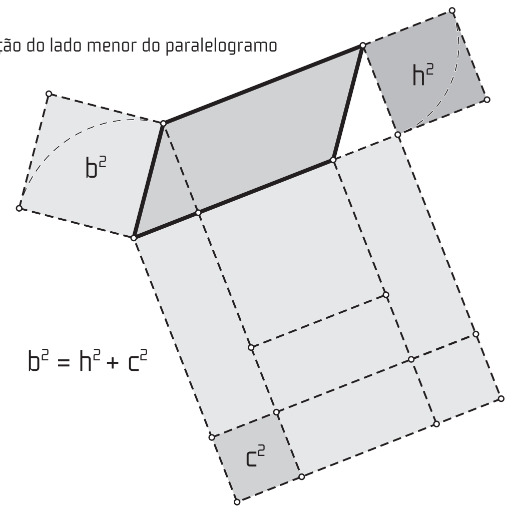


Figura 7

Geometricamente provado

Querendo ver a prova geométrica em movimento indico *youtube* (jotapecaldas) ou http://www.youtube.com/watch?v=J-VcEScj4xo, onde faço uma apresentação na horizontal, para mim mais elucidativa porque apresenta «o todo».

João de Jesus Pereira
jjesusp@gmail.com