

## Rebuscando no sôtão

Já vos aconteceu ir à procura de uma coisa (*rebuscar*) e aparecer outra? Pois essa outra coisa (Lei do paralelogramo), por ser antiga (*fez-me lembrar o sôtão*), despertou-me (*tinha acabado de completar o Curso de Teaching Geometry with The Geometer's Sketchpad [GSP versão 5]*) o desafio de apresentar uma demonstração geométrica/algébrica. Como para demonstrar há que reconhecer o objeto, assim surge o enunciado:

*A lei do paralelogramo*

A soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das diagonais do mesmo.

*Hipótese:* Dadas as áreas dos quadrados dos lados ( $A_1$  e  $A_2$ ) de um paralelogramo bem assim como as áreas dos quadrados cujos lados são as diagonais do paralelogramo ( $A_3$  e  $A_4$ )

*Tese:* Provar que  $2(A_1 + A_2) = A_3 + A_4$

*Nota:* Atende-se que  $D^2 = A_3$  e  $d^2 = A_4$  e que  $a^2 = A_1$  e  $b^2 = A_2$

*Geometricamente:*

As Figuras 1, 2 e 3 são o que chamo de pré-requisitos.

São construções de quadrados ( $\square$ ), com compasso, duas perpendiculares, uma paralela e uma intersecção.

Como poderão verificar, (*sketch* dinâmico feito em GSP 5 e apresentado no *you tube* (original)), na demonstração não

aparece o quadrado da diagonal maior ( $D^2$ ) do paralelogramo, mas sim a sua decomposição (pitagórica)  $[(a+c)^2 + h^2]$  (figura 1); o mesmo se passa com o quadrado da diagonal menor ( $d^2$ ) que será substituído por  $[(a-c)^2 + h^2]$  (figura 3).

Na Figura 2 construíram-se quadrados dos lados maior (lado  $a$ ) e menor (lado  $b$ ) do paralelogramo.

As Figuras 4, 5 e 6 representam a decomposição de  $(a+c)^2$  em fases sucessivas.

Na Figura 4, decomposição de  $(a+c)^2$  em  $a^2$  e numa peça em L.

Na Figura 5, decomposição de  $a^2$  em  $(a-c)^2$  e outra peça em L.

Na Figura 6, utilizando peças anteriores e/ou arcos de circunferência perpendiculares e intersecções ficou assim decomposto o quadrado de lado  $a+c$  em quatro retângulos, em dois quadrados de lado  $a-c$  e dois quadrados de lado  $c$ .

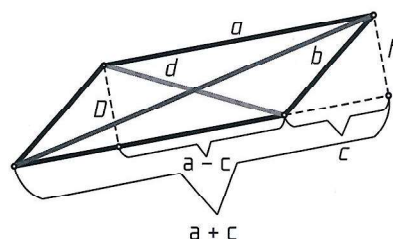
Na figura 6,  $(a-c)^2 + R_1 + R_2 = a^2$  e  $(a-c)^2 + R'_1 + R'_2 = a^2$ .

A Figura 7 mostra a decomposição do quadrado do lado menor do paralelogramo em  $h^2 + c^2$ , pelo que os quadrados que sobram na figura 6 correspondem à decomposição dos dois quadrados do lado menor do paralelogramo.

Pronto está aqui tudo o que é preciso para demonstrar esta Lei. Agora é só «juntá-las» e dar-lhes movimento. Veja-o em

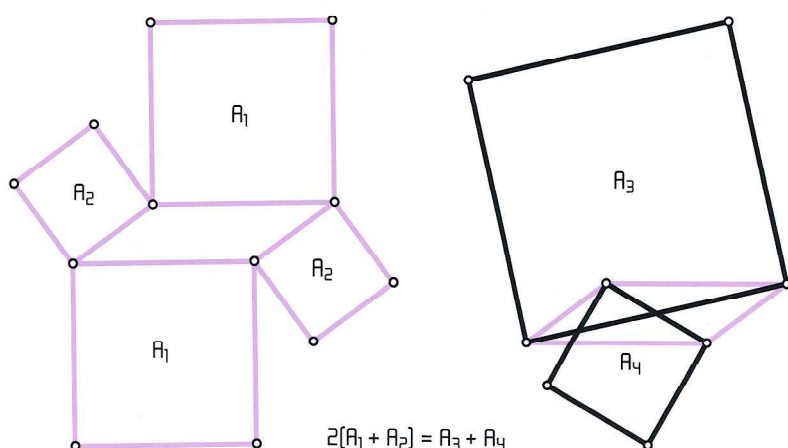
<http://www.youtube.com/watch?v=WSTxWJboOPw>

*Demonstração:*



$$\begin{aligned}
 A_{\text{(soma dos quadrados das diagonais)}} &= D^2 + d^2 \\
 &= (a+c)^2 + h^2 + (a-c)^2 + h^2 \\
 &= a^2 + 2ac + c^2 + a^2 - 2ac + c^2 + 2h^2 \\
 \text{Como } h^2 &= b^2 - c^2, &= 2a^2 + 2c^2 + 2(b^2 - c^2) \\
 &= 2a^2 + 2c^2 + 2b^2 - 2c^2 \\
 &= 2(a^2 + b^2) \\
 &= A_{\text{(soma dos quadrados dos lados do paralelogramo)}}
 \end{aligned}$$

**Algebricamente provado**



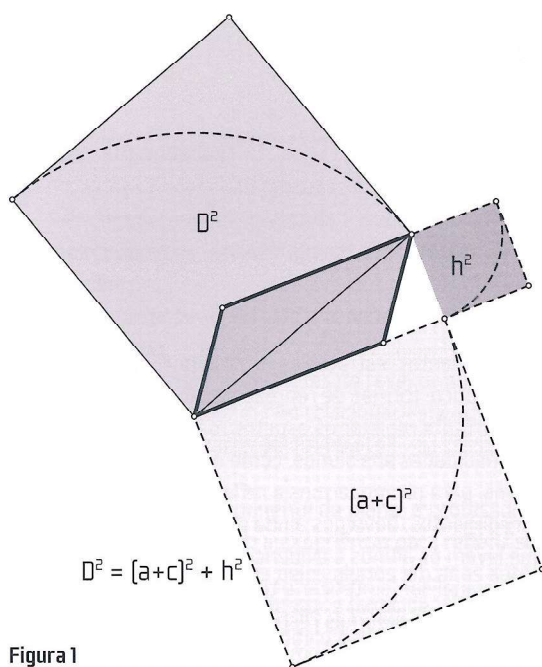


Figura 1

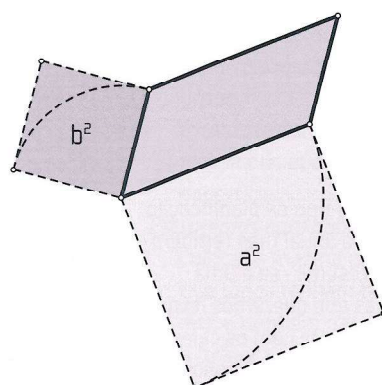


Figura 2

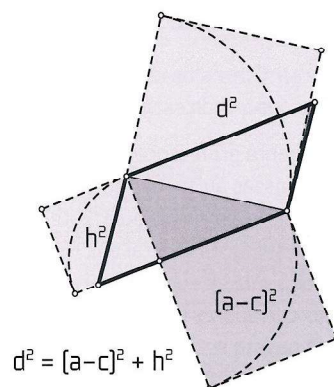


Figura 3

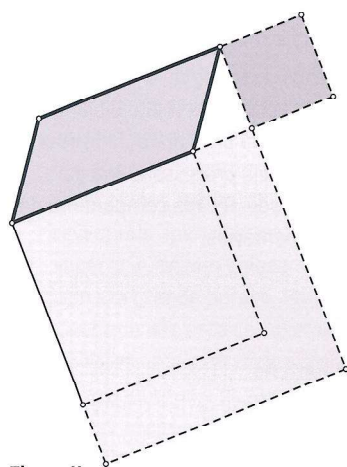


Figura 4

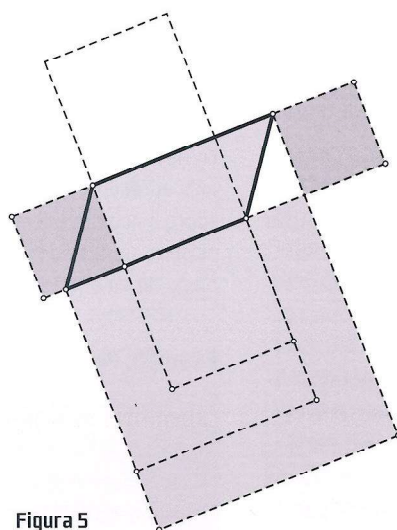


Figura 5

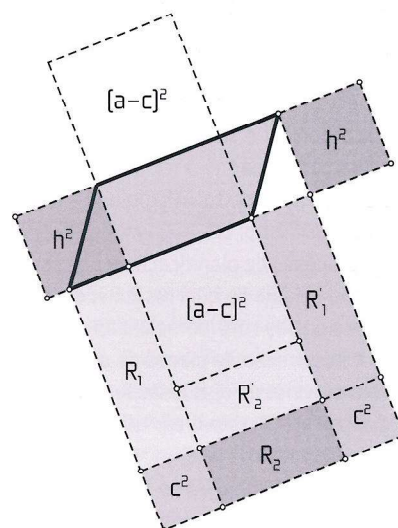


Figura 6

## Geometricamente provado

Querendo ver a prova geométrica em movimento indico *youtube* [jotapecaldas] ou <http://www.youtube.com/watch?v=J-VcEScj4xo>, onde faço uma apresentação na horizontal, para mim mais elucidativa porque apresenta «o todo».

João de Jesus Pereira  
jjesuspl@gmail.com

Decomposição do lado menor do paralelogramo

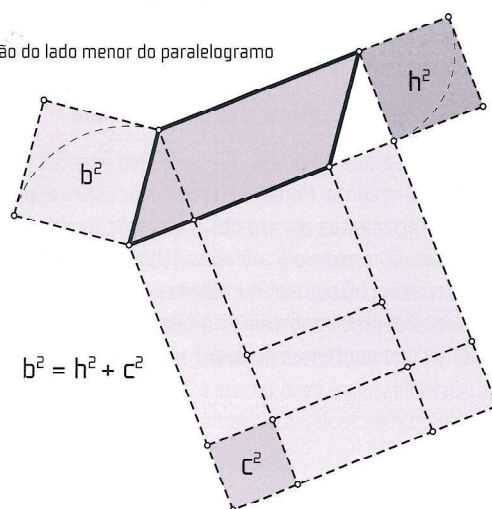


Figura 7