

A secção de ouro – primeiros passos^[1]

Eduardo Veloso

Introdução

A *secção de ouro* — objecto matemático que também poderia ser introduzido pelas expressões *número de ouro*, *razão de ouro*, *triângulo de ouro*, *rectângulo de ouro*, *divisão de um segmento em média e extrema razão*, e mesmo *divina proporção* — é um termo inventado no séc. XIX para designar a solução de um problema, proposto e resolvido por Euclides há cerca de 2300 anos, nos *Elementos de Geometria*. São possíveis múltiplas abordagens deste tema, tendo por objecto as conexões com outros conceitos matemáticos, a suposta relação directa do número de ouro com certas obras de arte da antiguidade, como a pirâmide de Keops, a fachada do Partenon e obras do escultor grego Fídias — relação não documentada e cada vez mais posta em questão —, a utilização da secção de ouro por artistas e arquitectos modernos, como Corbusier, e ainda as suas conexões com fenómenos da natureza vegetal e animal.

Nesta nota trataremos apenas do referido problema dos *Elementos*, não obviamente como material pronto para utilizar na aula de matemática mas sim como um meio de acedermos aos interessantes e elementares processos geométricos utilizados por Euclides, sem a facilidade tantas vezes enganadora das formulações e resoluções algébricas. Estudaremos o início da longa história matemática do número de ouro, magnificamente contada por Roger Herz-Fischler (Figura 1). Esperamos em futuras notas sobre este mesmo tema apresentar exemplos de propostas para a sala de aula.

Proposição 11 do livro II

O enunciado desta proposição é o seguinte:

Seccionar um segmento dado de tal modo que o rectângulo contido pelo todo e por um dos segmentos seja igual ao quadrado sobre o restante segmento.

Se designarmos por AB o segmento dado e por C o ponto que secciona AB (ver Figura 2), o «todo» será o segmento AB e os dois segmentos resultantes serão AC e CB . Em vez de rectângulo «contido por AB e por CB » diríamos hoje *rectângulo de lados AB e CB* e em vez de «quadrado sobre AC » diríamos hoje *quadrado de lado AC* . Na Figura 2 o segmento BD é perpendicular a AB e é igual a AB . Euclides quer portanto encontrar um ponto C tal que o quadrado $ACHG$ «seja igual» ao rectângulo $CIDB$. A principal questão na compreensão deste enunciado é esta: *que significa para Euclides a palavra «igual»?*

Não será certamente o sentido vulgar que lhe damos na frase «a figura \mathcal{F} é igual à figura \mathcal{G} », pois aqui queremos significar que podemos levar \mathcal{F} a coincidir (ponto a ponto, por assim dizer) com \mathcal{G} . Ou seja, no sentido habitual, mesmo em Euclides

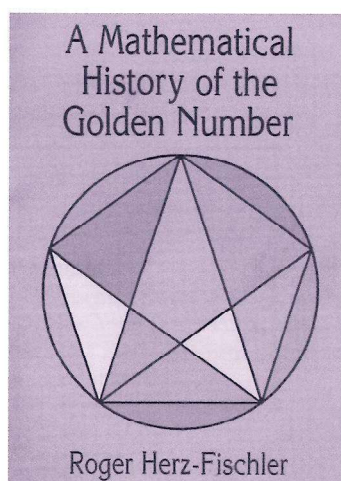


Figura 1.

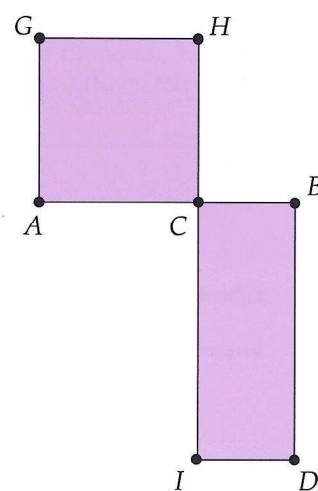
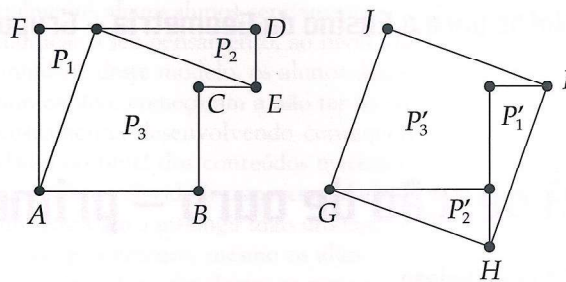


Figura 2

Figura 3. O hexágono $ABCDEF$ foi decomposto em dois triângulos P_1 e P_2 e num pentágono P_3 . Os polígonos congruentes (neste caso translações) P_1 , P'_1 e P'_3 , convenientemente justapostos, formam o quadrado $GHIJ$. Então, o hexágono e o quadrado têm áreas iguais.



quando por exemplo refere a *igualdade de triângulos* em inúmeras proposições do livro I), está subjacente um movimento que leva à sobreposição exacta das duas figuras. Esta operação de sobreposição apenas ficou inteiramente resolvida quando a palavra *igual* — neste sentido — foi substituída pela palavra *congruente* com o seguinte significado: duas figuras \mathcal{F} e \mathcal{G} são congruentes quando existe uma isometria que transforma \mathcal{F} em \mathcal{G} .

Do ponto de vista didáctico, no entanto, não vem mal ao mundo que nos primeiros anos os alunos utilizem a palavra «igual» com o sentido corrente que já conhecem, e que pode ser descrito, para figuras, como possibilidade de «levar à coincidência».

Mas na proposição II.11 não pode ser este o significado de «igual», pois o quadrado $ACHG$ não pode obviamente ser levado à coincidência com o rectângulo $CIDB$! Na realidade, quando Euclides utiliza a palavra igual referindo-se a dois polígonos *não congruentes*, como aqui, a palavra igualdade diz respeito às áreas dos dois polígonos, em que área significa região do plano ocupada pelo polígono (e não medida *numérica* da área, ideia totalmente alheia aos *Elementos*).

Resta portanto a importante questão histórica e pedagógica: sem utilizar a medida numérica da área, como compara Euclides as áreas de dois polígonos não congruentes? Como pode afirmar que são iguais? De uma leitura cuidada dos *Elementos*, conclui-se que a comparação das áreas, em Euclides, é feita através da ideia da decomposição e composição de polígonos.

Sejam \mathcal{F} e \mathcal{G} dois polígonos. Se for possível decompor \mathcal{F} num conjunto finito de polígonos P_1, P_2, \dots, P_n de tal modo que \mathcal{G} possa ser formado por um conjunto de polígonos congruentes P'_1, P'_2, \dots, P'_n convenientemente justapostos, então \mathcal{F} e \mathcal{G} têm áreas iguais. (Figura 3)

Dois polígonos nestas circunstâncias dizem-se *equidecomponíveis*. Pensando um pouco, o leitor poderá chegar ao significado que teria para Euclides um polígono ter área maior do que outro.

Construção e demonstração da Prop. II.11

Compreendido o significado do enunciado de Euclides da Prop. II.11, vejamos agora como Euclides determina o ponto C pedido e demonstra que C verifica as condições do enunciado.

Construção do ponto C

Partindo do segmento AB (Figura 4a), constrói o quadrado $AEDB$ e o ponto médio F de AE (Figura 4b). Depois encontra a intersecção G da circunferência de centro F e passando por B (designada por $F(B)$) com a semirecta EA (Figura 4c). Finalmente constrói o quadrado de lado AG , $ACHG$ (Figura 4d): o ponto C é o ponto de AB procurado, como será demonstrado a seguir.

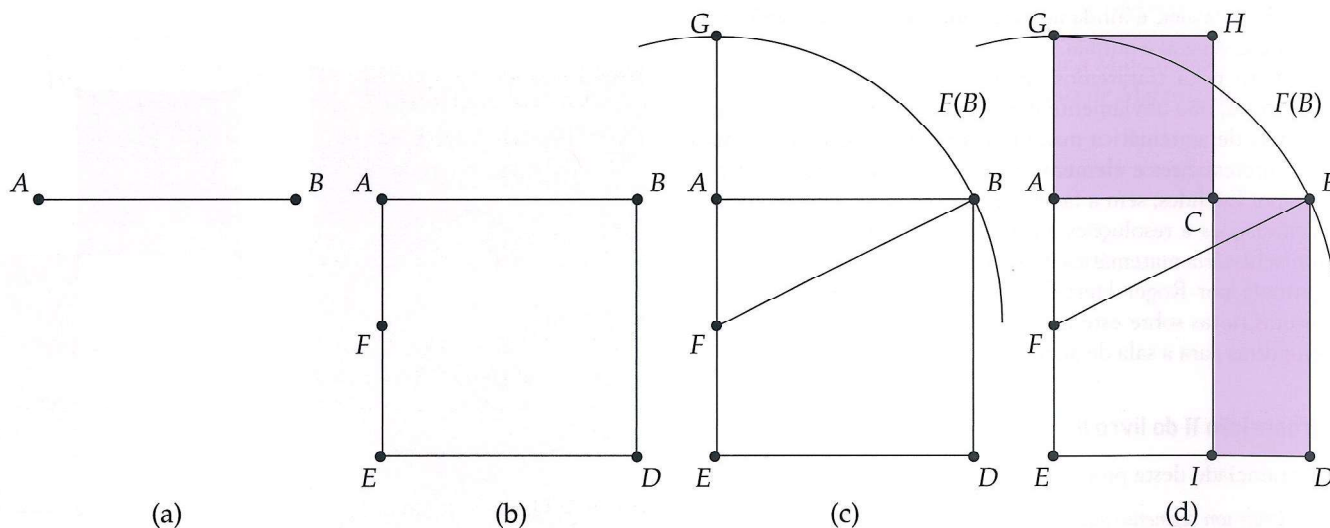


Figura 4

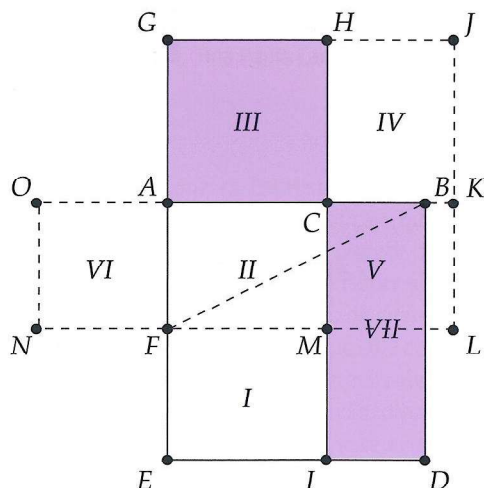


Figura 5

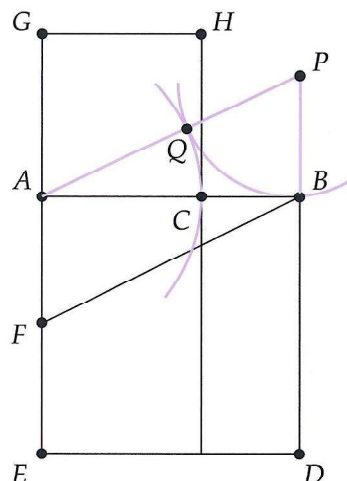


Figura 6

Demonstração

Devemos demonstrar que o ponto C é tal que o quadrado $ACHG$ é igual ao rectângulo $CIDB$ (Figura 5) (a demonstração é adaptada de Euclides, incorporando uma proposição II.6 demonstrada anteriormente no mesmo livro II). Comparando a Figura 5 com a Figura 4d, vemos que foram feitas as modificações seguintes (verifique com cuidado)

- escondemos a circunferência $F(B)$;
- acrescentámos: o quadrado $AONF$, de lado AF ; o rectângulo IV , $HCKJ$, congruente com o rectângulo II ; e o quadrado V , $KCML$, de lado LK igual a FA , e portanto congruente com VI .

Como o segmento FB é a hipotenusa do triângulo rectângulo FBA , e como FB é congruente com FG (ver Figura 4c), então (pelo Teorema de Pitágoras) o quadrado $GFLJ$ de lado GF é igual ao polígono $BONFED$, que resulta da justaposição dos quadrados VI e $AEDB$.

Mas retirando, tanto a $GFLJ$ como a $BONFED$, os polígonos II , IV (congruente com I) e V (congruente com VI), restam os polígonos III e VII , que são portanto iguais, como se queria provar.

Uma variante de Herão de Alexandria [séc. I d. C.]

Apresentamos uma variante de Herão da construção de Euclides, mais simples e directa.

Vamos sobrepor as duas construções o que torna a constatação da equivalência praticamente evidente (Figura 6).

A construção de Herão, a cor, consiste em construir o segmento BP , perpendicular a AB no ponto B e com metade do comprimento de AB e depois intersectar — ponto Q — a circunferência $P(B)$ com o segmento PA . O ponto C será a intersecção com o segmento AB da circunferência $A(Q)$.

A caminho da construção do pentágono regular

Uma das questões que o leitor estará talvez a colocar neste momento é a seguinte: para que introduz Euclides, nos *Elementos*, a «secção de ouro»?

Como veremos numa próxima nota, Euclides irá servir-se deste resultado para construir o triângulo de ouro e depois o pentágono regular. No livro XIII dos *Elementos*, Euclides recorrerá ainda à secção de ouro na prop. XIII.17, relativa ao dodecaedro regular.

Notas

- ⁽¹⁾ O autor escreve de acordo com a antiga ortografia.

Bibliografia

- Herz-Fischler, Roger. *A Mathematical History of the Golden Number*. New York: Dover Publications, 1997.
Euclides. *Elementos*. <http://alepho.clarku.edu/~djoyce/java/elements/Euclid.html>

Eduardo Veloso