

À volta da mesa ou como resolver problemas de probabilidades

José Paulo Viana

Quase todos os problemas de probabilidades podem ser resolvidos de várias maneiras diferentes, resultantes de abordagens ou formas de raciocinar diferentes. Como, perante um problema, o objetivo é chegar à solução, é evidente que todos esses processos de resolução são bons. No entanto, alguns deles podem ser mais vantajosos do que outros por cinco motivos:

- envolvem raciocínios mais simples ou menos rebuscados,
- têm menos cálculos ou passagens intermédias;
- são mais fáceis de perceber (por quem ouve ou lê);
- são mais fáceis de explicar (por quem ensina);
- permitem generalizações e posterior aplicação a outros problemas.

O que nos propomos aqui fazer é, perante cada problema, vermos diferentes formas de o abordar, analisar diferentes estratégias e discutir as suas vantagens e inconvenientes.

Questões prévias

- Se quisermos usar a lei de Laplace, devemos começar sempre por calcular o número de Casos Possíveis (CP). Depois, para determinar o número de Casos Favoráveis (CF), é obrigatório seguir o mesmo método usado para o cálculo dos casos possíveis.
- Quando empregamos o cálculo combinatório, é muitas vezes possível seguir duas vias diversas: tendo em conta a ordem (arranjos) ou não (combinações).
- Em vez de usarmos a Lei de Laplace, pode ser conveniente subdividir o problema, aplicando a Lei do Produto (primeiro tem de acontecer isto, depois aquilo, etc.).
- Há várias situações onde, em vez de calcular a probabilidade pedida, pode ser mais fácil determinar a probabilidade do acontecimento contrário.

Ponto de Partida

Oito amigos (Ana, Brás, Carla, Dinis, Eva, Filipe, Graça e Hugo) vão jantar juntos. A mesa do jantar é retangular, com quatro lugares de cada lado, e os lugares vão ser distribuídos ao acaso (figura 1).

Podemos começar por determinar de quantas maneiras diferentes se podem sentar à mesa estas oito pessoas, ou seja, calcular o número de casos possíveis para uma situação genérica. Como são oito amigos (diferentes entre si), temos:

$$CP = 8! = 40320$$

No entanto, como veremos, há problemas em que nem sempre é preciso trabalhar com estes casos todos, ou porque não interessam todas as pessoas ou porque não interessam todos os lugares.

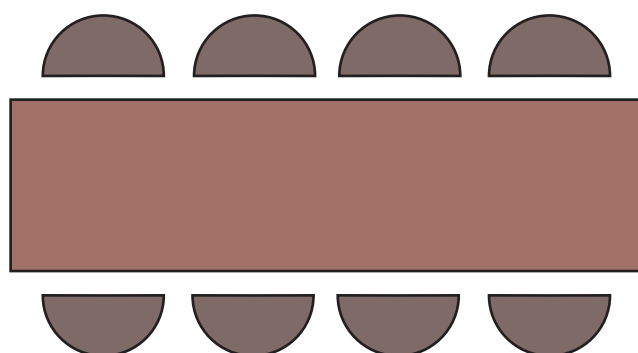


Figura 1

Problema 1.—Qual é a probabilidade de a Graça e o Hugo ficarem um em frente ao outro?

1º Método

Tendo toda a gente em conta, temos:

$$CP = 8! = 40320$$

Para os casos favoráveis, há 8 lugares possíveis para a Graça, 1 para o Hugo (em frente a ela), e os restantes amigos podem trocar entre si.

$$CF = 8 \times 1 \times 6! = 5760$$

$$\text{Probabilidade pedida} = 5760/40320 = 1/7$$

2º Método

Não precisamos de considerar as oito pessoas. Só nos interessam a Graça e o Hugo, as outras seis irão ficar nos lugares que sobram.

$CP = 8 \times 7 = 56$ porque a Graça tem 8 lugares disponíveis e o Hugo 7 (ou 8A_2 porque eles vão ocupar 2 dos 8 lugares, interessando a ordem).

$CF = 8 \times 1$ (a Graça tem 8 possibilidades e depois o Hugo já só tem uma, em frente a ela).

$$\text{Probabilidade pedida} = 8/56 = 1/7.$$

3º Método

Vamos pensar apenas nos dois lugares que eles vão ocupar, não interessando a ordem com que eles os ocupam (isto é, não nos preocupando em qual dos dois lugares se irá sentar a Graça):

$$CP = {}^8C_2 = 8 \times 7/2 = 28.$$

$CF = 4$ (4 pares de lugares frente a frente).

$$\text{Probabilidade pedida} = 4/28 = 1/7.$$



4º Método

Pode ser feito mentalmente, sem cálculos, «sentando» uma pessoa de cada vez.

A Graça pode ficar num lugar qualquer, porque todos são equivalentes entre si (os lugares são do mesmo tipo, visto que cada uma das cadeiras tem outra em frente). Dos 7 lugares que restam para o Hugo, só um é em frente ao da Graça, logo:

$$\text{Probabilidade pedida} = 1/7.$$

Como vemos, estão aqui quatro maneiras diferentes de resolver o problema (todas boas, claro, e portanto aceitáveis), mas a quarta é a mais «simples». Nas aulas, é provável que os alunos cheguem à solução seguindo diversas vias. Depois, valerá então a pena apresentá-las todas para que eles se apercebam da variedade de raciocínios, se habituem aos vários métodos de resolução e, eventualmente, escolham o que melhor se adapte à sua forma de pensar.

Problema 2.—Qual é a probabilidade de a Eva e o Filipe ficarem um ao lado do outro?

Dos vários processos de resolução, vejamos dois.

1º Método

No Problema 1, o último método era o mais simples, mas agora, para «sentarmos» uma pessoa de cada vez, temos de ter cuidado. É que os lugares são diferentes: os quatro das pontas só têm um vizinho, os quatro do meio têm dois. A Eva pode ficar na ponta, com probabilidade $1/2$ (e para o Filipe já só serve um dos 7 lugares que restam), ou no meio, com igual probabilidade (e para o Filipe serve 2 dos 7 lugares).

$$\text{Probabilidade pedida} = (1/2) \times (1/7) + (1/2) \times (2/7) = 3/14$$

2º Método

Pensando apenas nos dois lugares que eles vão ocupar, não nos interessando se o Filipe fica à esquerda ou à direita da Eva:

$$CP = {}^8C_2 = (8 \times 7) / 2 = 28.$$

Numerando os lugares de 1 a 4 de um lado e de 5 a 8 do outro, os seis casos favoráveis são 1-2, 2-3, 3-4, 5-6, 6-7 e 7-8.

$$\text{Probabilidade pedida} = 6/28 = 3/14.$$

Problema 3.—Qual é a probabilidade de nenhum rapaz ficar sentado ao lado de outro?

Dos vários métodos, o mais simples parece ser considerar apenas os quatro lugares que vão ser ocupados por rapazes, independente da ordem (depois, as raparigas ocuparão os lugares que sobraem).

$$CP = {}^8C_4 = 70.$$

Os rapazes, para estarem separados, vão ter de ficar dois de um lado da mesa e dois do outro. De um lado da mesa há três possibilidades: 1-3, 1-4 e 2-4. A cada uma destas possibilidades correspondem outras três do outro lado: 5-7, 5-8 e 6-8.

$$CF = 3 \times 3 = 9$$

$$\text{Probabilidade pedida} = 9/70.$$

Problema 4.—O Brás e o Dinis estão de relações cortadas e portanto não querem ficar nem lado a lado nem frente a frente. Qual é a probabilidade de isso acontecer?

1º Método

Para «sentarmos» uma pessoa de cada vez, temos de ter cuidado porque os lugares não são todos equivalentes. Vamos considerar primeiro os lugares das pontas e depois os do meio. Se o Brás ficar numa ponta, há cinco lugares disponíveis para o Dinis, se ficar num do meio, há quatro.

$$\text{Probabilidade pedida} = (1/2) \times (5/7) + (1/2) \times (4/7) = 9/14.$$

2º Método

Pensando apenas nos dois lugares que eles vão ocupar, sem considerar a ordem:

$$CP = {}^8C_2 = 8 \times 7 / 2 = 28.$$

Há dez casos não favoráveis: 1-2, 1-5, 2-3, 2-6, 3-4, 3-7, 4-8, 5-6, 6-7 e 7-8. Logo os favoráveis são 18.

$$\text{Probabilidade pedida} = 18/28 = 9/14.$$

Problema 5.—Qual é a probabilidade de cada pessoa ter ao lado e em frente apenas pessoas do sexo oposto?

Se designarmos pelas letras A e B cada um dos sexos, as pessoas de um lado da mesa ficarão na forma ABAB e do outro lado BABA.

1º Método

Vamos considerar os oito amigos, logo $CP = 40320$.

Como os 4 rapazes podem trocar entre si ($4!$), as quatro raparigas também ($4!$), e em cada caso os rapazes podem trocar de posição com as raparigas, temos:

$$CF = 4! \times 4! \times 2 = 1152$$

$$\text{Probabilidade pedida} = 1152/40320 = 1/35$$

2º Método

Vamos sentar uma pessoa de cada vez, partindo de uma ponta. No 1.º lugar, serve qualquer uma das 8 pessoas. No 2.º, das 7 restantes servem 4. No 3.º, das 6 que restam servem 3. No 4.º, das 5 servem 3, e assim sucessivamente.

$$\text{Probabilidade pedida} = (4/7) \times (3/6) \times (3/5) \times (2/4) \times (2/3) \times (1/2) \times (1/1) = 1/35.$$

A situação complica-se

Agora, aos oito amigos juntaram-se mais dois, a Isabel e o Jorge, e a mesa é circular (figura 2).

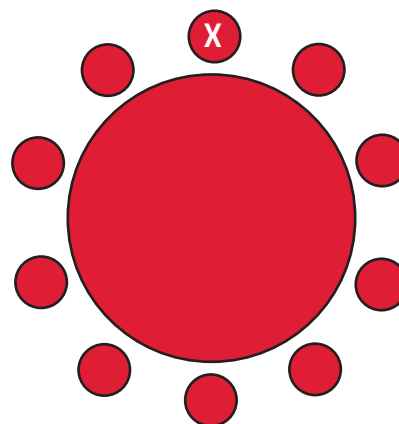


Figura 2



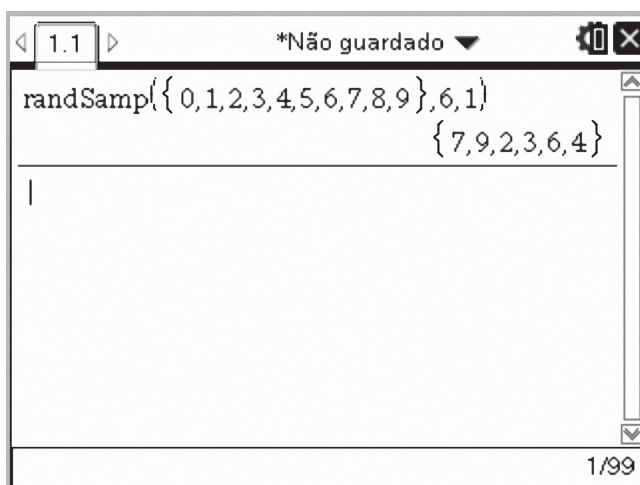


Figura 3

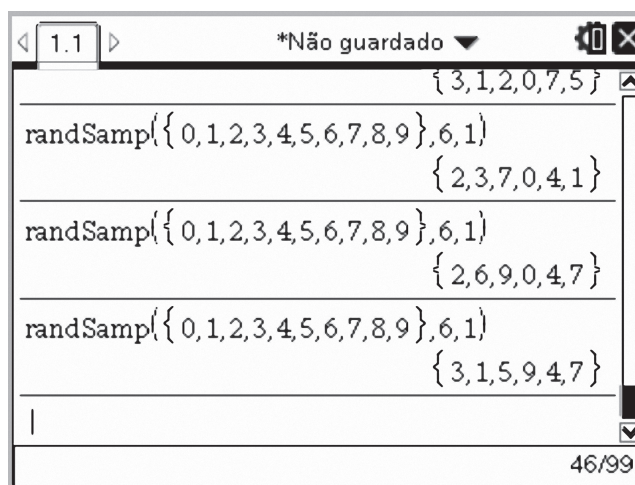


Figura 4

Problema 6.—De quantas maneiras diferentes se podem sentar os dez amigos à mesa?

Não há uma resposta única para esta formulação da pergunta. Imaginemos que as pessoas, que representaremos pelas iniciais dos respetivos nomes, se colocam a partir do lugar assinalado com «x» e no sentido do movimento dos ponteiros do relógio.

O caso ABCDEFGHIJ será diferente de BCDEFGHIJA?

Depende.

Se os lugares não forem todos semelhantes — por exemplo, se estivermos no inverno e «x» for a cadeira mais perto da lareira — no primeiro caso é a Ana que está mais quentinha, no segundo é o Brás. Nesta situação, o número de casos possíveis é $CP = 10! = 3628800$.

Se os lugares forem todos do mesmo tipo, ter ABCDEFGHIJ ou ter BCDEFGHIJA é a mesma coisa, basta rodar a mesa de um lugar. Agora, para determinar o número de casos possíveis, podemos fixar uma das pessoas ao lugar «x» e considerar apenas as outras. Assim, $CP = 9! = 362880$.

Problema 7.—Qual é a probabilidade da Ana não ficar nem ao lado da Carla nem do Dinis?

Das várias estratégias possíveis, a que parece mais rápida e simples é «sentar» estas três pessoas, uma de cada vez, e pela ordem que estão no enunciado. A Ana pode ficar num lugar qualquer. Para a Carla, servem 7 dos 9 lugares restantes, para o Dinis servem 6 dos 8 que sobram. Então:

$$\text{Probabilidade pedida} = (7/9) \times (6/8) = 7/12.$$

Problema 8.—Numeraram-se os lugares, de 1 a 8, e colocaram-se num saco oito papelinhos com os mesmos números. A primeira pessoa a tirar um papel foi o Jorge, seguindo-se a Isabel, o Hugo e a Graça. Qual é a probabilidade de a Isabel ficar longe da Graça e do Jorge?

Se quisermos resolver o problema colocando as pessoas nos lugares pela ordem com que o sorteio foi feito, iremos ter grandes dificuldades. Depois de colocada a primeira pessoa, os

lugares deixam de ser equivalentes: uns têm dois vizinhos livres, outros têm só um.

Repare-se, no entanto, que à partida, qualquer que seja a ordem do sorteio, a probabilidade de a Isabel ficar longe da Graça e do Jorge é sempre a mesma. Não há qualquer razão para que esta probabilidade seja diferente caso se comece pelo Jorge ou pela Ana ou por qualquer outro.

Portanto, este problema é idêntico ao anterior e a probabilidade pedida é $7/12$.

Nota: como alguns alunos têm dificuldade em notar que as probabilidades de um acontecimento são independentes da ordem pela qual o sorteio é feito, vale por isso a pena confrontá-los com questões deste tipo.

Problema 9.—A Ana é namorada do Brás, a Carla namora com o Dinis. Qual é a probabilidade de os namorados ficarem sentados lado a lado?

Podemos seguir uma estratégia mista.

Começemos pela Ana e pelo Brás. A Ana pode ficar em qualquer lugar, para o Brás só servem 2 dos restantes 9. A probabilidade de ficarem juntos é $2/9$.

Podemos imaginar que eles ficaram sentados um ao lado do outro nos lugares 9 e 10, sobrando 8 lugares para o outro par. O número de casos possíveis para esse par é $CP = {}^8C_2 = 8 \times 7/2 = 28$. Os casos favoráveis são sete (1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7 e 7-8). A probabilidade do par ficar junto é $7/28$ ou $1/4$.

$$\text{Probabilidade pedida} = (2/9) \times (1/4) = 1/18.$$

Problema 10.—Qual é a probabilidade de a Carla ficar longe do Dinis e a Ana ao lado do Brás?

Se começarmos por sentar a Carla e o Dinis, tudo se complica (mas é possível ...). É muito mais fácil sentar a Ana e o Brás juntos (a probabilidade é $2/9$, como vimos).

Para os outros dois, sobram 8 lugares, pelo que $CP = {}^8C_2 = 8 \times 7/2 = 28$. Agora, os casos não favoráveis são 7, como vimos no problema anterior, logo $CF = 28 - 7 = 21$.

Probabilidade pedida = $(2/9) \times (21/28) = 1/6$.

Problema 11.—O Filipe quer ficar longe do Jorge, a Eva longe do Hugo. Qual é a probabilidade de isto acontecer?

Um Método Errado

A probabilidade do Filipe ficar longe do Jorge é $7/9$.

A probabilidade da Eva ficar longe do Hugo é $7/9$.

Probabilidade pedida = $(7/9) \times (7/9) = 49/81 \approx 0,6049$.

O que está errado nesta resolução?

Realmente, à partida, a probabilidade do Filipe ficar longe do Jorge é $7/9$ e a probabilidade da Eva ficar longe do Hugo é também $7/9$. Só que os dois acontecimentos não são independentes e portanto as probabilidades não se podem multiplicar.

1º Método [correto]

A probabilidade do Filipe ficar longe do Jorge é $7/9$.

Para Eva e Hugo, há 8 lugares disponíveis, logo $CP = {}^8C_2 = 8 \times 7/2 = 28$. Imaginemos que o Filipe ficou no lugar 10. O Jorge estará num dos lugares, do 2 ao 8. Será que a posição do Jorge influencia o número de casos favoráveis? Vamos ver que não.

Se o Jorge estiver na posição 2, a situação é

1-J-3-4-5-6-7-8-9-F.

Para o par Eva-Hugo separado temos:

1 com 3 a 9 (7 casos);

3 com 5 a 9 (5 casos)

4 com 6 a 9 (4 casos)

5 com 7 a 9 (3 casos)

6 com 8 a 9 (2 casos)

7 com 9 (1 caso)

Total = $7+5+4+3+2+1 = 22$

Se o Jorge estiver na posição 3, a situação é

1-2-J-4-5-6-7-8-9-F.

Seguindo o mesmo processo, teremos para o par Eva-Hugo separado:

Total = $6+6+4+3+2+1 = 22$

E o mesmo aconteceria nas outras posições do Jorge, logo a probabilidade de a Eva e o Hugo ficarem separados é $22/28$.

Probabilidade pedida = $(7/9) \times (22/28) = 11/18 \approx 0,6111$.

Relembre-se que este é o valor correto, embora bastante próximo do obtido anteriormente (0,6049).

2º Método

É muito fácil chegar à solução utilizando a probabilidade do acontecimento contrário e os resultados dos problemas anteriores.

Do problema 9, sabemos que $P(\text{Perto-Perto}) = 1/18$.

Do problema 10, sabemos que $P(\text{Perto-Longe}) = 1/6$.

O acontecimento contrário de «Longe-Longe» é «Perto-Perto ou Perto-Longe ou Longe-Perto». Então:

$P(\text{Longe-Longe}) = 1 - [P(\text{Perto-Perto}) + P(\text{Perto-Longe}) + P(\text{Longe-Perto})] = 1 - (1/18) - (1/6) - (1/6) = 11/18$.

As complicações aumentam

Por vezes, o cálculo do valor teórico de uma probabilidade é muito difícil, complicado ou trabalhoso. Nesses casos, e se for possível, organiza-se um conjunto de simulações da experiência aleatória. Se o número de experiências for suficientemente

«grande», podemos usar a Lei dos Grandes Números e obter um valor aproximado da probabilidade.

Problema 12.—O Filipe quer ficar longe do Jorge, a Eva longe do Hugo, e a Isabel longe da Carla. Qual é a probabilidade de isto acontecer?

Se o problema 11 já tinha sido um pouco complicado, agora a situação é muito mais difícil de analisar (embora não impossível, claro). Então, uma boa estratégia é criar uma simulação da situação que seja fácil e rápida de executar. Isto é relativamente simples com as tecnologias atualmente disponíveis.

Vamos usar uma TI-Nspire. Abrimos a máquina numa página de *Calculadora*. Vamos ao *Menu* e fazemos *5:Probabilidades, 4:Aleatório, 5:Amostra*. O comando *randSample* permite, a partir de uma lista de elementos, obter uma amostra aleatória de dimensão escolhida. A nossa lista será constituída pelos números de 0 a 9 (que têm de ficar separados por vírgulas e o conjunto todo entre chavetas), que representam os lugares à volta da mesa. A dimensão da amostra vai ser de 6, que serão os lugares ocupados pelas seis pessoas referidas no enunciado (o 1.º número indica o lugar do Filipe, o 2.º do Jorge, e assim sucessivamente). Acrescentamos «,1» para indicar que queremos uma amostra sem repetição.

No exemplo da figura 3, o par Filipe-Jorge está longe (nos lugares 7 e 9), tal como o par Isabel-Carla (lugares 6 e 4), mas o par Eva-Hugo está lado a lado (lugares 2 e 3).

Cada vez que fizermos *Enter*, aparece uma nova amostra. É aconselhável fazer *Enter* quatro vezes seguidas e só então registar os resultados porque assim desaparecem os resultados anteriores e há menos risco de erros. No registo dos resultados, pomos um tracinho em «Sim» se os pares ficarem todos afastados ou um tracinho em «Não» se houver pelo menos um par junto. Não esquecer que o lugar 0 tem como vizinhos 0 e 9.

Por exemplo, as quatro simulações da figura 4, correspondem respetivamente a *Sim* (aparecem os lugares 1 e 2 seguidos mas não correspondem ao mesmo par), *Não* (par 2-3), *Não* (par 9-0) e *Sim*.

Se estivermos numa turma de 28 alunos e cada um fizer 60 simulações, não demora muito tempo e obtemos um total de 1680, que é já um número razoável.

Resolvemos levar isto à prática e, em 1400 experiências, os três pares ficaram afastados 682 vezes. Isto corresponde à frequência $682/1400 \approx 0,487$.

É então de esperar que a probabilidade procurada esteja próxima deste valor. Se calcularmos o intervalo de confiança a 95% para esta experiência, vemos que a probabilidade deverá estar situada entre 0,461 e 0,513.

Por curiosidade, calculámos (com bastante trabalho e um certo risco de enganos ...) o valor exato da probabilidade. Obtivemos $61/126 \approx 0,4841$.

Para finalizar

Como se viu, existem muitas e diferentes formas de abordar um problema de probabilidades. Cada uma delas tem vantagens e desvantagens, que podem variar de uma situação para outra. Ou seja, um método pode funcionar muito bem num problema mas tornar-se difícil e complicado noutro. No nosso trabalho

como professores, parece-nos importante ir familiarizando os alunos com estes factos de modo a que, perante um problema novo, consigam analisá-lo e escolher o método mais adequado. Além disso, em vez de decorar receitas, os alunos habituam-se a

relacionar conhecimentos anteriores e a integrá-los na questão que têm de resolver. E não há nada melhor que esta ginástica mental.

José Paulo Viana
Escola Secundária de Vergílio Ferreira

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

As sandes

A seguinte proposta de tarefa foi inspirada numa aula de mestrado lecionada pela professora Cecilia Monteiro que vivenciei enquanto aluna. A proposta tem por objetivo discutir a importância da forma como a informação é apresentada. Destina-se a alunos do 2.º ciclo, mas pode igualmente ser aplicada noutros ciclos. A partir de uma situação familiar aos alunos (a festa de anos) pretende-se explorar a importância das representações selecionadas e a(s) mais valia(s) associada(s) a cada caso.

A tarefa deve ser distribuída a cada grupo de alunos de forma a que todos tenham a introdução da tarefa, mas cada grupo tenha apenas umas das representações dos dados apresentadas sem ter conhecimento de que os colegas possuem uma representação diferente da sua. De seguida, devem ser colocadas algumas questões que irão permitir salientar as diferenças entre as diversas representações disponibilizadas aos grupos. (Ver tabela 1.)

Após estas questões, de certo que alguns alunos irão ficar certamente apreensivos quanto ao facto de alguns grupos terem

demorado muito mais tempo do que outros a lhes conseguir dar resposta, agravado pelo facto de alguns grupos não terem sido capazes de dar resposta a algumas das questões, enquanto que outros colegas foram capazes de o fazer sempre. Nesse momento devem ser mostradas todas as representações distribuídas e deve ser promovida uma discussão sobre o tipo de representação e as questões que, associadas a cada representação, são possíveis de ser respondidas de forma mais direta. Poder-se-á organizar essa informação numa tabela como a tabela 1.

Por uma questão de organização deste espaço, apresentamos todas as representações na mesma página, devendo o professor cuidar que cada grupo tenha apenas a introdução e uma das representações. Também é possível dar a ficha com todas as representações a cada grupo e, na fase de questionamento, deixar que sejam os alunos a encontrar a representação que melhor responde ao pedido – no entanto, o impacto causado nos alunos será bastante diferente.

Ana Caseiro
Escola Superior de Educação de Lisboa

Tabela 1

Questões	Texto	Tabela de frequências	Gráfico de barras	Diagrama de Venn
Quantos amigos da Maria vão à festa?	Possível Lento	Possível Rápido	Possível Médio	Possível Médio
Quantas são as sandes que contêm manteiga?	Possível Lento	Possível Médio	Possível Médio	Possível Rápido
Qual a sandes preferida pela maioria dos amigos da Maria?	Possível Lento	Possível Rápido	Possível Rápido	Possível Rápido
Quantos são os amigos da Maria que preferem sandes com geleia?	Possível Lento	Possível Médio	Possível Médio	Possível Rápido
Qual(is) a(s) sandes menos preferida(s) pelos amigos da Maria?	Possível Lento	Possível Rápido	Possível Rápido	Possível Rápido
Quem são os amigos da Maria que preferem sandes apenas com geleia?	Possível Lento	Impossível	Impossível	Possível Rápido