Fibonacci e a Natureza

Isabel A. Rocha e Margarida Font Amado, Esc. Sec. n.º 1 da Marinha Grande

«A rejeição da Matemática prejudica todos os ramos do conhecimento, visto que aquele que a ignora não poderá aprender as outras ciências e tudo o que se relacione com este Mundo»

Roger Bacon

Muitos professores de Matemática já ouviram falar de Fibonacci e da sua sucessão. Mas poderão não estar é tão familiarizados com a sua ocorrência na Natureza e o seu potencial para um Trabalho de Projecto. Trabalho de Projecto, trabalho de interdisciplinariedade e por isso nos atraiu, pois pensamos que o caminho para o sucesso escolar passa também por aqui. É necessário trabalhar com os colegas de outros grupos, num espírito de cooperação mútua, em projectos como os que a seguir se apresentam.

Fibonacci foi um dos grandes matemáticos dos séc. XII e XIII e, possivelmente, o mais produtivo da Idade Média. O seu nome era Leonardo de Pisa. O nome do seu pai, pensa-se ter sido Guglieno Bonaccio e daí o nome de Fibonacci, «filho de Bonaccio». O pai era um oficial italiano que trabalhava na costa do Norte de África.

Fibonacci foi educado por um tutor e depois viajou muito como comerciante, visitando o Egipto, a Síria, a Grécia e o Sul de França. Estudava em profundidade os intercâmbios comerciais desses países. À medida que o fazia ia acumulando conhecimentos sobre os diferentes sistemas de cálculo, mas considerou-os inferiores ao sistema Hindo-Árabe que, como sabemos, é o sistema numérico com que ainda hoje trabalhamos.

De regresso a Itália, Fibonacci escreveu livros de Aritmética e Álgebra — *Liber Abaci*, *Liber Geometrical* e *Liber Quadratorum* — e é num destes livros que se encontra uma sucessão a que posteriormente se associou o seu nome. Esta sucessão surgiu quando Fibonacci pensou no seguinte problema:

Problema de Fibonacci

Quantos pares de coelhos podem ser obtidos de um único par se:

— Cada par gera um novo par em cada mês, a partir do segundo mês de vida.

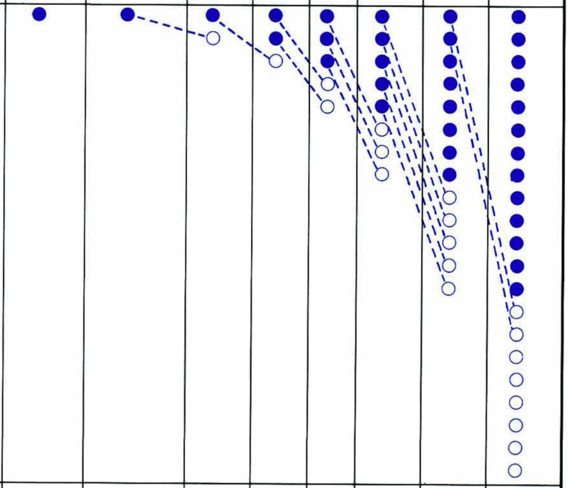
— Não ocorrem mortes.

Conclusão: Cada termo da sucessão é a soma dos dois anteriores. Ao fim de 1 ano teríamos 233 pares de coelhos (ver quadro seguinte).

Aos termos da sucessão deu-se o nome de **números de Fibonacci**.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

MÊS	JANEIRO	FEVEREIRO	MARÇO	ABRIL	MAIO	JUNHO	JULHO	AGOSTO



N.º de casais nascidos	0	0	1	1	2	3	5	8
N.º total de casais	1	1	2	3	5	8	13	21

Investigações sobre a sucessão

Mesmo os alunos mais novos entendem que a sucessão é um processo de recorrência, porque os números sucedem-se de acordo com uma lei e além disso recorre-se aos termos anteriores para obter um determinado termo. No problema de Fibonacci, tem-se a seguinte relação de recorrência:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

Vejamos então alguns exemplos de trabalhos que podem ser colocados aos alunos do secundário para desenvolver o seu espírito de investigação, levando-os a descobrir propriedades dos referidos números.

- A soma dos quadrados dos primeiros **n** números de Fibonacci é igual ao produto do último número considerado (u_n) pelo seguinte.

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + \dots + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}$$

- A soma de números de Fibonacci de ordem par é igual à diferença entre o de ordem ímpar seguinte e a unidade.

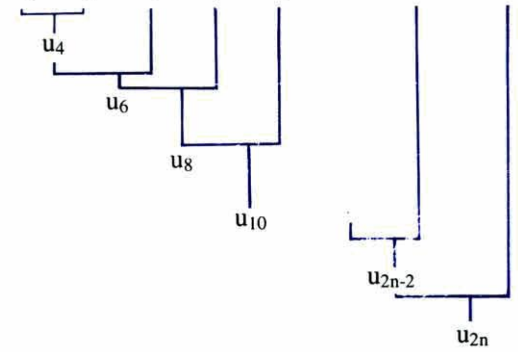
$$u_2 + u_4 + u_6 + u_8 + \dots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$$

- A soma dos números de Fibonacci de ordem ímpar é igual ao de ordem par seguinte:

$$u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}$$

Demonstração:

$$u_1 + u_3 + u_5 + u_7 + u_9 + \ldots + u_{2n-3} + u_{2n-1} =$$
$$\|$$
$$u_2 + u_3 + u_5 + u_7 + u_9 + \ldots + u_{2n-3} + u_{2n-1}$$



Uma outra linha de investigação com a sucessão de Fibonacci é procurar modelos dentro da própria sucessão. Esta pesquisa, que já pode ser feita independentemente do nível etário, poderia mesmo ser proposta como actividade de projecto aos alunos mais velhos do Ensino Primário ou, pelo menos, aos do Ensino Preparatório com o auxílio de uma máquina de calcular. Outro aspecto interessante deste trabalho é o facto de os alunos se familiarizarem com as máquinas de calcular.

- Dividindo os números de Fibonacci por 2, 3, 4, ... obtêm-se modelos interessantes com os restos. Vamos ver um exemplo com a divisão por 2 em que o modelo 110 se repete por blocos de três números consecutivos de Fibonacci.

  Outros modelos se obtêm, para os restos, nas divisões por 3, 4, 5, 6, ...

Divisão por dois

Ordem	Números de Fibonacci	Quociente	Resto
1	1	0	1
2	1	0	1
3	2	1	0
4	3	1	1
5	5	2	1
6	8	4	0
7	13	6	1
8	21	10	1
9	34	17	0
10	55	27	1
11	89	44	1
12	144	72	0

Divisão por	Modelos de restos	Blocos
2	110	3
3	11202210	8
4	112310	6
5	11230331404432022410	20
6	112352134150554314532510	24
7	1123516066542610	16

Quando divididos por 10 ou números superiores não é possível encontrar modelos para os restos dentro dos limites das calculadoras de bolso e da paciência dos alunos.

- Outro modelo interessante obtém-se quando cada número de Fibonacci é dividido pelo anterior. É de observar os quocientes obtidos.

Número de Fibonacci	Antecedente	Quociente
1		
1	1	1
2	1	2
3	2	1,5
5	3	1,66666
8	5	1,6
13	8	1,625
21	13	1,61538
34	21	1,61905
55	34	1,61765
89	55	1,61818
144	89	1,61798
233	144	1,61806
377	233	1,61803
610	377	1,61804
987	610	1,61803

É interessante verificar que estes quocientes são valores aproximados do número de oiro (1,61803...).

- Outro modelo interessante é a relação existente entre os números de Fibonacci e as teclas do piano. As 13 teclas formam uma oitava da escala cromática. São 8 teclas brancas que constituem a escala maior e 5 teclas pretas constituindo a outra escala e agrupadas a 3 e a 2.

2, 3 > agrupamentos das teclas pretas.

5 ⟶ n.º de teclas pretas.

8 ⟶ n.º de teclas brancas.

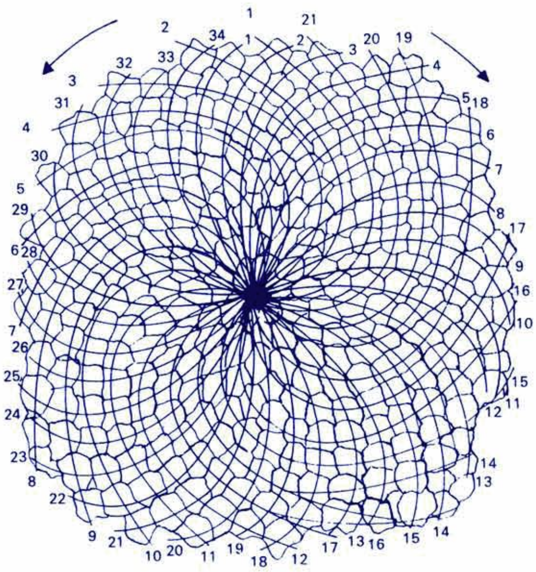
13 ⟶ n.º total de teclas.

A Sucessão de Fibonacci e a Natureza

Muitos modelos desta sucessão vêm-nos da Natureza, em especial do mundo das plantas. Aliás, Fibonacci reflectia bem o seu interesse pelo mundo vegetal tendo deixado um livro intitulado FLOS, que significa «flor» ou «flor de fruto», onde refere a aplicação das suas ideias à flora.

O mais notável aparecimento dos números de Fibonacci é nas plantas da família *Compositae* e nomeadamente no girassol. Ao examinarmos as variedades mais comuns, nos discos das flores estão sementes que formam dois conjuntos de espirais logarítmicas. Umas no sentido dos ponteiros do relógio (sentido negativo) e outras no sentido positivo.

O número de sementes de cada conjunto é diferente mas são dois números consecutivos de Fibonacci. Usualmente 34 e 55 nos girassóis mais comuns. Contudo, nos gigantes, esses números elevam-se a 89 e 144.



Outro exemplo é a margarida.

Os alunos poderão fazer estas observações através de um microscópio. Usualmente encontram-se 13 sementes em espiral num sentido e 21 no outro sentido. Também, noutras variedades, se encontram 21 e 34, respectivamente.

É interessante observar a piteira, onde se encontram não 2 mas 3 conjuntos de sementes em espiral e que são em número correspondente a três números consecutivos de Fibonacci, usualmente 13, 21 e 34.

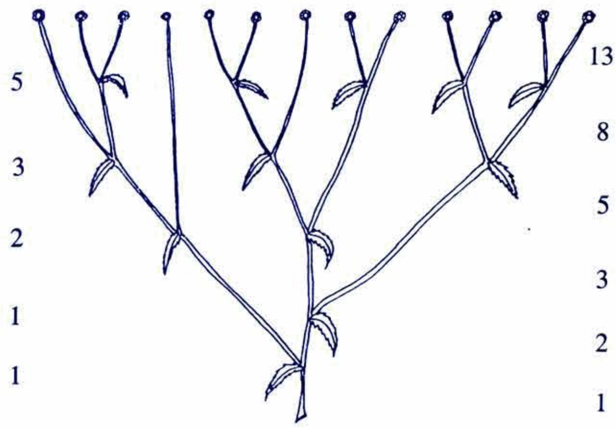
Mais raramente também se encontram com 8, 13 e 21, respectivamente.

A partir daqui pode-se pedir aos alunos que observem os discos das flores de outras plantas da família *Compositae* para identificar o modelo das sementes em espiral.

Cada espécie de planta tem o seu próprio modelo de desenvolvimento, não obstante estar sujeita a uma variação ocasional dentro da espécie. Esse modelo de desenvolvimento pode ser relacionado com os números de Fibonacci.

Por exemplo a eufórbia, uma pequena flor azul ou branca que se encontra em solos calcários, tem 2 sépalas grandes, 3 sépalas pequenas, 5 pétalas e 8 estames.

As plantas de bolbos como, por exemplo, a orquídea, apresentam, como se vê na figura, os números de Fibonacci nos seus ramos, folhas e flores.



Outra planta que os alunos podem encontrar nos jardins e levar para observar na sala de aula é a dália, e nas suas flores irão encontrar modelos dos números de Fibonacci.

Casca do caracol

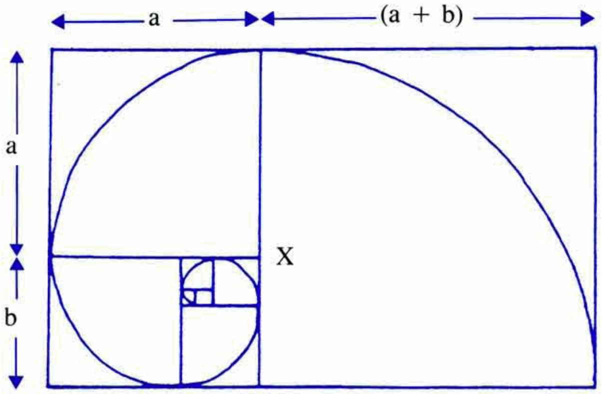
Embora a ocorrência de espirais nas plantas possa ser novidade para os nossos alunos, já é mais familiar a sua ocorrência na casca do caracol.

As espirais mais vistas na natureza são as logarítmicas. A casca do náutilo é uma espiral logarítmica. Este habitante do mar desenvolve uma série de sulcos sucessivamente mais largos à medida que cresce. Os sulcos vão aumentando mas a forma permanece constante. Esses sulcos são as espirais que se vêem na casca. A espiral da casca do náutilo está muito relacionada com o rectângulo dourado.

Como sabemos, este nome está associado à secção ou proporção dourada:

$$\frac{a}{b} = \frac{a + b}{a}$$

Artistas, pintores e arquitectos usavam as proporções divinas nos seus trabalhos, utilizando o rectângulo dourado. O centro ou foco de um quadro com as divinas proporções estará na posição X, como se assinala na figura.



Essas espirais estão todas referidas a rectângulos dourados com as seguintes dimensões (aproximadamente):

1a + 1b
2a + 1b
3a + 2b
5a + 3b
8a + 5b
13a + 8b
21a + 13b
... .

Aqui temos mais um modelo, que como é óbvio, nos conduz aos números de Fibonacci.

1. Ao ouvir falar da sucessão de Fibonacci e de como ela está presente nos girassóis não pude deixar de me lembrar de um poema de Alberto Caeiro:

O meu olhar é nítido como um girassol.
Tenho o costume de andar pelas estradas
Olhando para a direita e para a esquerda,
E de vez em quando olhando para trás...
E o que vejo a cada momento
É aquilo que nunca antes eu tinha visto,
E eu sei dar por isso muito bem...
Sei ter o pasmo essencial
Que tem uma criança se, ao nascer,
Reparasse que nascera deveras...
Sinto-me nascido a cada momento
Para a eterna novidade do Mundo...

Creio no mundo como um malmequer,
Porque o vejo. Mas não penso nele
Porque pensar é não compreender...

O Mundo não se fez para pensarmos nele
(Pensar é estar doente dos olhos)
Mas para olharmos para ele e estarmos de acordo...

Eu não tenho filosofia: tenho sentidos...
Se falo na Natureza não é porque saiba o que ela é,
Mas porque a amo, e amo-a por isso,
Porque quem ama nunca sabe o que ama
Nem sabe por que ama, nem sabe o que é amar...
Amar é a eterna inocência,
E a única inocência é não pensar...

Trago-o aqui por crer que, muitas vezes, aquilo que aparentemente é apenas um acaso, uma lembrança à toa, encerra uma razão de ser, nexos escondidos, e que desta atenção aos aparentes acasos nasceram muitas das descobertas que hoje constituem o património científico da humanidade (sem ter a pretensão tola de ser este o caso, evidentemente...).

Pergunto pois por que acaso ou outra razão Caeiro fala precisamente de girassóis, flores relacionadas com a sequência de Fibonacci? Por que acaso ou outra razão neste mesmo poema se fala do «*pasmo essencial*» que Caeiro sabe ter e o leva a ver a «*espantosa realidade das coisas*», atitude que, na minha opinião, é partilhada por Fibonacci que, a partir de ninhadas e ninhadas de coelhos, descobriu uma sequência lógica na sua multiplicação, e ainda por aqueles que utilizaram essa sucessão para ver com mais nitidez o girassol?

Por que acaso ou extraordinária relação contraditória o «*olhar*» «*nítido como um girassol*», que vê a esplendorosa evidência do real, leva Caeiro a excluir qualquer forma de pensar ou saber — «*pensar é estar doente dos olhos*» —, enquanto o saber que os girassóis se organizam e crescem internamente de acordo com a sucessão de Fibonacci, não se obtém só por olhar para ele.

De facto, quer a descoberta de Fibonacci e a sua posterior aplicação a diversos domínios do mundo natural, quer o texto de Caeiro, colocam o problema do real e da sua apropriação; e se esta se faz de modos diferentes em cada um deles (Fibonacci olha, vê, pensa, constrói um modelo teórico que, confirmado pela realidade, dela se apropria tornando-a a lógica/explicável; Caeiro olha, crê, ama e diz que não pensa nem sabe, dizendo apropriar-se do real pela identificação com ele, procurando anular a distância que o gesto de pensar instaura entre o sujeito e o objecto da acção), se os caminhos são diferentes, o ponto de partida é certamente o mesmo: um olhar atento. E se nós próprios olharmos atentamente, veremos que afinal — e sempre dizendo que não — Caeiro produz um discurso teórico (a teoria de que só pelo olhar se conhece a teoria de que nada se deve acrescentar à realidade — nem sentimentos, nem interpretações subjectivas, nem generalizações abstractas. Ver, apenas — teoria exclusivamente teórica!). Isto é, ambos pensam, em ambos se faz o trabalho do pensamento, seja fazer poesia, seja fazer matemática...

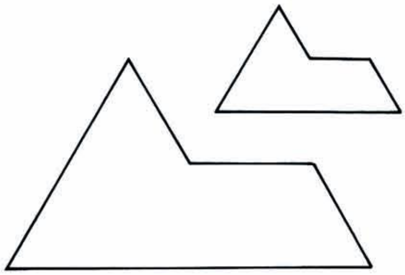
Voltaremos certamente aos girassóis, nítidos como um olhar, nítidos como um pensar...

2. A sucessão de Fibonacci leva-nos igualmente a pensar num mundo cheio de coelhos; e assim seria, se não houvesse outros factores que limitam efectivamente a reprodução desses animaizinhos.

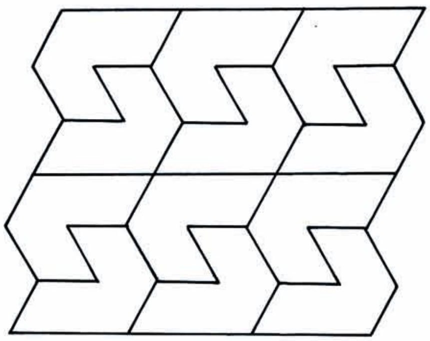
Não se trata aqui de um problema levantado especificamente por aquela sucessão, mas sim por qualquer

(Continua na página 36)

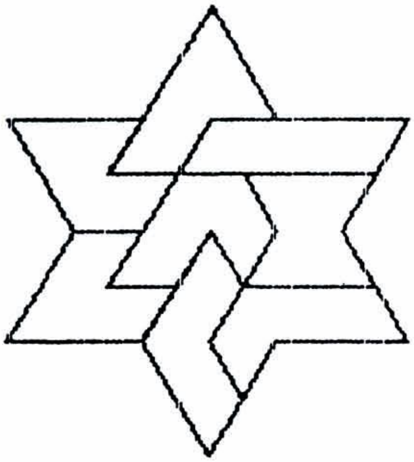
Hexatris (conclusão)



Segue-se um exemplo de pavimentação.



Como actividade suplementar, pode-se também desafiar os alunos a construírem uma estrela de seis pontas com oito dos Hexatris.



E aguarde-se pelas surpresas que um conjunto de actividades deste tipo sempre proporciona!

Leonor Moreira

Bibliografia

Martin, K. et al. (1986). Hexiamonds. *The Computing Teacher*, Vol. 14, n.º 3, pp. 32-36.

Fibonacci (conclusão)

sucessão infinita. É como quando assistimos constantemente à ultrapassagem de novos recordes desportivos: quem nunca pensou que, a continuarem assim, os atletas de corrida, por exemplo, que conseguem demorar cada vez menos tempo, um dia destes não demoram mesmo tempo nenhum? Ou, caso ainda mais extremo, atingem a meta antes de partir? É, confessêmo-lo, uma hipótese divertida, embora perfeitamente inverosímil. A verdade é que a matemática produziu um conceito que nos diz que não é assim: é a noção de limite assimptótico que, se não estou em erro, é o limite para o qual tende uma progressão interminável, não sendo no entanto nunca atingido. Assim, é fácil de perceber que na sucessão 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; etc., o limite assimptótico será 1, que nunca será atingido (é sempre possível acrescentar mais um 9 à direita dos que já lá estão...); igualmente numa sucessão de polígonos (polígono de três lados, polígono de 4 lados, e de 5, de 6,..., de 10, ..., de 20, ..., etc.), inscritos numa circunferência, esta será o respectivo limite assimptótico, não havendo nunca completa coincidência entre a sua linha e a dos polígonos, aos quais é sempre possível acrescentar mais um lado...

Nota:

No ano de 1987/88 surgiu no Plano de Formação da Escola Sec. n.º 1 da Marinha Grande uma acção intitulada «O lado humano da Matemática» dinamizada por uma professora de Matemática (Isabel Azevedo Rocha) e outra de Português (Margarida Font Amado). O objectivo era contribuir para a diminuição do insucesso na Matemática, ajudando a modificar atitudes de professores de outras áreas (especialmente de Letras...), em relação à Matemática. Por outro lado tentava-se esboçar um trabalho de tipo interdisciplinar e de «investigação colaborante» entre professores de áreas aparentemente tão distintas.

Realizaram-se, nesse ano e nos seguintes, 3 sessões todas obedecendo a este objectivo e destinadas a um público de professores de formações diversas; o artigo que aqui se publica é a transcrição de parte da referida sessão subordinada ao tema «Infinito».