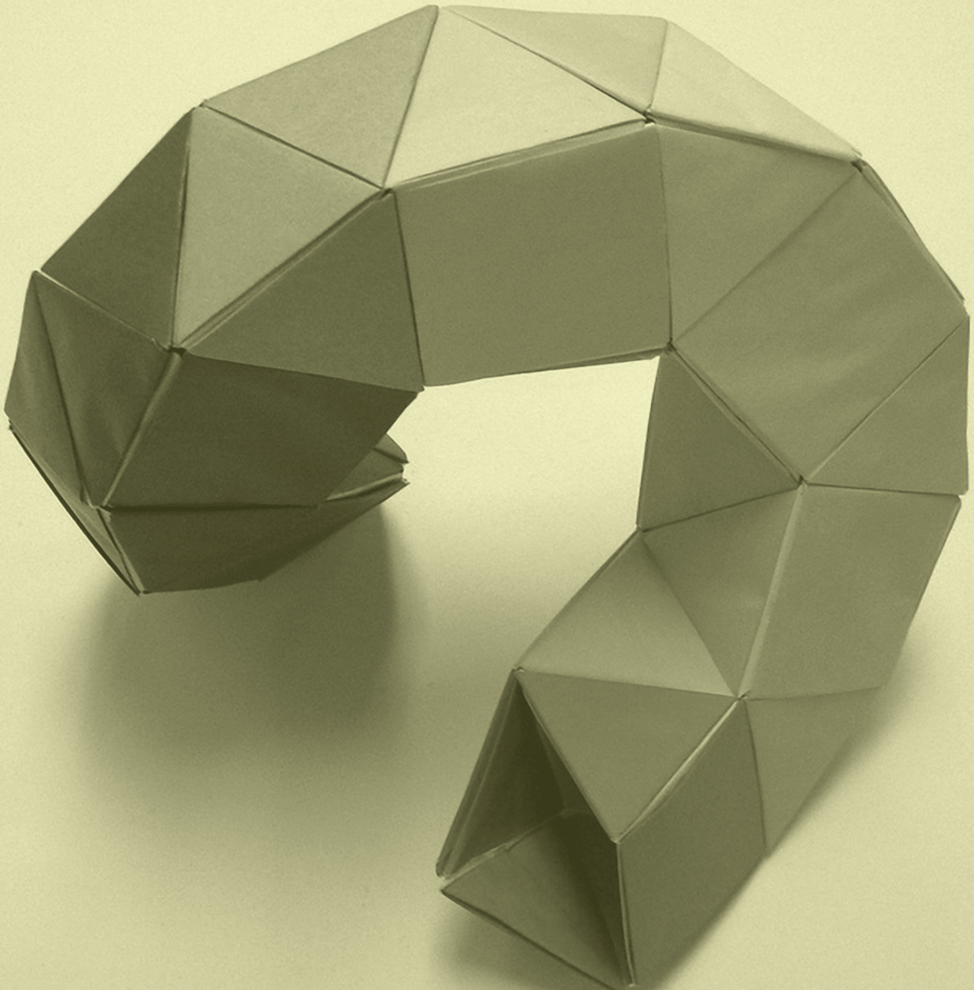

Anti prismas à conquista do 1.º Ciclo do Ensino Básico

Paula Catarino e Cecília Costa

Introdução

Atualmente encontram-se disponíveis, para os professores, muitas e variadas propostas de tarefas destinadas aos alunos do 1.º ciclo do Ensino Básico relacionadas com os diversos temas de geometria. No entanto, são raras, se não mesmo inexistentes, propostas de tarefas usando anti prismas neste e noutros ciclos de ensinos. O objetivo principal deste artigo é o de mostrar aos professores como pode ser enriquecedor trabalhar estes objetos geométricos com os alunos do 1.º ciclo do Ensino Básico e motivar-lhes o gosto pelo seu estudo. Apresentaremos algumas sugestões de tarefas adequadas a este nível de ensino para uma possível implementação em ambiente de sala de aula. As propostas de tarefas serão de índole variada, umas usando material manipulável, outras usando as novas tecnologias.

Um pouco de História

É difícil saber-se com exatidão quando começou e se desenvolveu o interesse pelos poliedros. Alguns elementos bibliográficos dão-nos conta de que existem fontes egípcias, chinesas, babilónicas, entre outras, onde já encontramos problemas relacionados com pirâmides. Veloso (2000) refere que já no *Papiro de Rhind*, datado de cerca de 2000 a.C. a 1800 a.C., «(…) existem diversos problemas relativos ao declive das faces de uma pirâmide (…)» (p. 231) que eram importantes na construção de pirâmides. Também no *Papiro de Moscovo* se encontra a fórmula para a determinação do volume de um tronco de pirâmide quadrangular. A palavra *poliedro* tem sido usada em diferentes épocas por diferentes pessoas com variados significados (muitas vezes, incompatíveis entre si). Não é raro que uma mesma pessoa use o mesmo termo com interpretações diferentes em momentos diferentes. Desde cedo que os poliedros despertaram a atenção dos matemáticos, interesse que, como Grünbaum explica, se manteve ao longo de séculos:

> (…)Desde a Grécia antiga, matemáticos tentam determinar o número de poliedros regulares. Um estudo dos cinco «sólidos platônicos» é o tópico final dos Elementos de Euclides. Embora esta lista de poliedros regulares fosse considerada completa, dois milênios depois, Kepler encontrou dois outros poliedros regulares e,

Figura 1.—Sólidos Platónicos

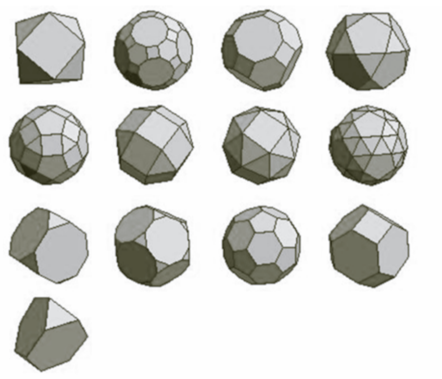

Figura 2.—Sólidos Arquimedianos

no início do sécul o XIX, Poinsot encontrou mais dois; Cauchy então demonstrou que não existiam outros. Mas, na década de 1920, Petrie e Coxeter encontram três novos poliedros regulares e provaram a completude desta enumeração. Contudo, em 1977 eu descobri uma nova classe de poliedros regulares e, em seguida, Dress provou que acrescentando mais um poliedro, a lista de poliedros regulares estava completa. Então, cerca de dez anos atrás, eu encontrei mais uma nova categoria de poliedros regulares e, até agora, ninguém afirmou que todos os poliedros regulares foram finalmente encontrados. (Grünbaum, 2003)

A continuação da explicação de Grünbaum ilustra uma situação em que o facto de o significado do termo poliedro ter mudado levou a diferentes conclusões/confusões:

Como a contagem do número de poliedros regulares estabelecida por matemáticos distintos como Euclides, Cauchy, Coxeter e Dress é logo desmentida a seguir? A resposta é muito simples — todos os resultados estão corretos; o que mudou é o significado do termo «poliedro» adotado por cada um destes matemáticos. Enquanto pessoas diferentes interpretarem o conceito (de poliedro) de maneira diferente, sempre existirá a possibilidade de que resultados sejam verdadeiros sob uma interpretação e sejam falsos sobre outra interpretação. De fato, mesmo variações sutis na definição podem produzir mudanças significativas na validade dos resultados.(…) (Grünbaum, 2003)

Tal como é referido em (Veloso *et al*, 2008), os poliedros «(…) tomando na natureza, sob a forma de cristais, as mais variadas formas, a sua classificação em famílias com propriedades comuns tem sido empreendida, pelo menos desde a Grécia antiga, pelos matemáticos profissionais e amadores (…).» (p. 28)

São conhecidas várias classificações dos poliedros, tendo em conta critérios diferentes. Referimos em seguida uma das classificações, associada aos matemáticos que os estudaram/descobriram, e que detalharemos mais adiante. Comecemos pelos *Sólidos Platónicos*, descritos por Platão no século IV a.C. Ao longo da História foram várias as identificações entre estes sólidos e simbologias diversas. Por exemplo, ao cubo foi atribuído o símbolo terra, ao tetraedro o símbolo fogo, ao octaedro o símbolo ar, ao dodecaedro o símbolo universo e ao icosaedro o símbolo água (ver figura 1).

Sólidos Arquimedianos, descritos por Arquimedes no século III a.C. e mais tarde também estudados por Kepler nos finais do século XVI e princípios do século XVII (ver figura 2).

Relacionados com outros poliedros temos não só o matemático Eugène Charles Catalan, a quem se devem os chamados *sólidos de Catalan*, mas também Norman Johnson a quem se devem os sólidos designados com o seu nome: *sólidos de Johnson*.

Os poliedros

No que se segue, adotamos a definição (Lima, 2006) que sintetizamos do seguinte modo: *Poliedro* é um sólido geométrico cuja superfície é composta por um número finito de faces, em que cada uma das faces é um polígono, sendo os seus elementos mais importantes, as faces, as arestas e os vértices.

São várias as definições e propriedades envolvidas quando se abordam poliedros, tais como: convexidade, regularidade, dualidade, entre outras. Em seguida, referimos algumas: Um poliedro diz-se *convexo* quando qualquer segmento de reta que una dois quaisquer dos seus pontos está contido no interior do poliedro ou numa das regiões poligonais (ver figura 3) e que um poliedro diz-se *regular* quando é um poliedro convexo cujas faces são polígonos regulares, todos iguais e onde em cada um dos vértices concorre o mesmo número de arestas. Na última proposição do livro XIII de *Os Elementos* de Euclides, demonstra-se que só há 5 poliedros regulares: os Sólidos Platónicos.

Quanto à *dualidade*, o dual de um poliedro constrói-se fazendo corresponder a cada face um vértice e a cada vértice uma face. Na figura 4 temos um exemplo de dois poliedros que são dual um do outro: o cubo e o octaedro. A correspondência entre os vértices do cubo e as faces do octaedro está indicada por números e a correspondência entre as faces do cubo e os vértices do octaedro está indicada por letras.

Classificação dos poliedros

Os poliedros são, no espaço tridimensional, análogos aos polígonos, no plano. Os poliedros classificam-se de diversas formas e segundo variados critérios.

Uma das classificações mais simples tem como critério subjacente o número de faces do poliedro, por exemplo um poliedro com 4 faces designa-se por tetraedro, um com 5 designa-se por pentaedro e um com 20 designa-se por icosaedro.

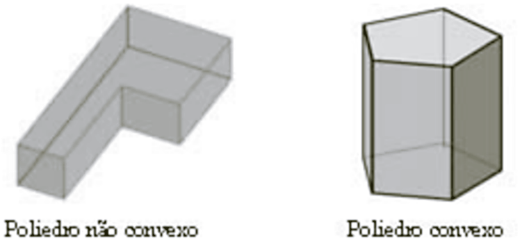

Figura 3.—Exemplos de Poliedros

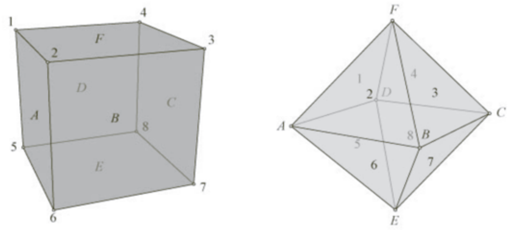

Figura 4.—O cubo e o octaedro — duais entre si

Outra classificação possível é a que agrupa os poliedros em conjuntos de sólidos que têm certas características comuns e que passamos a detalhar:

- Sólidos Platónicos
- Sólidos de Arquimedes ou Arquimedianos
- Prismas e Anti Prismas
- Sólidos de Johnson
- Sólidos de Catalan
- Deltaedros
- Dipirâmides e Deltoedros
- Esferas e Domos Geométricos.

Convém referir que a interseção de algumas destas famílias de sólidos é não vazia. Por exemplo existem sólidos Platónicos que são um tipo de deltaedros, existem anti prismas que também são sólidos de Johnson, entre outros exemplos. Vamos recordar de forma sucinta as propriedades que caracterizam alguns destes grupos de sólidos.

Sólidos Platónicos: Poliedros convexos regulares, todas as faces são polígonos regulares e congruentes e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.

Sólidos de Arquimedes (ou sólidos Arquimedianos): Poliedros convexos tais que as faces são polígonos regulares de mais de um tipo e cujos vértices são todos congruentes, isto é, existem o mesmo arranjo (número e ordem) de polígonos em torno de cada vértice.

Prismas: Poliedros formados por duas faces poligonais, paralelas e congruentes, chamadas bases diretrizes do prisma, que dão o nome ao prisma, e vários paralelogramos (faces laterais do prisma), em número igual ao dos lados da face diretriz.

De acordo com o polígono que constitui as bases ditas diretrizes do prisma, os prismas designam-se: prisma triangular (as bases são triângulos), prisma quadrangular (as bases são quadrados), prisma pentagonal (as bases são pentágonos), prisma hexagonal, etc.

Anti Prismas: poliedros constituídos por duas faces poligonais iguais e paralelas chamadas bases diretrizes, ligadas por triângulos (ver figura 6). Tal como acontece com os prismas, o número de lados dos polígonos das bases diretrizes define o nome do anti prisma.

Os anti prismas têm duas bases poligonais assim como os prismas, mas os seus vértices são ligados alternadamente gerando faces laterais triangulares.

O número de triângulos de um anti prisma é o dobro do número de lados do polígono da base. Assim, por exemplo, um anti prisma pentagonal (ver figura 7) compõe-se de 2 pentágonos e 10 triângulos; tem 10 vértices e 20 arestas.

Sólidos de Johnson: Poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares e todas as arestas possuem o mesmo comprimento, excluindo-se os sólidos Platónicos, os sólidos Arquimedianos e as duas famílias infinitas de prismas e anti prismas. Muitos destes sólidos são derivados dos platónicos, dos Arquimedianos, dos prismas e anti prismas, por adição ou remoção de partes.

Sólidos de Catalan: Poliedros duais dos sólidos Arquimedianos.

Deltaedros: Família de poliedros cujas faces são triângulos equiláteros todos iguais.

Figura 5.—Prisma pentagonal

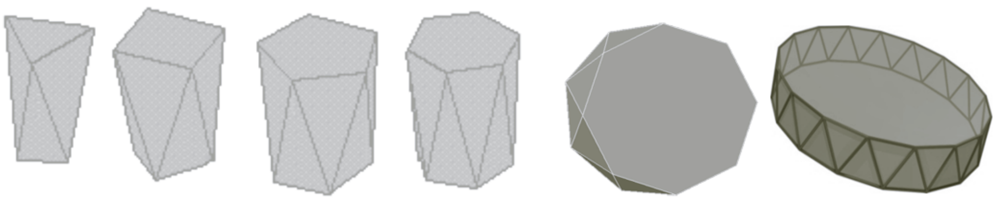

Figura 6.—Exemplos de anti prismas

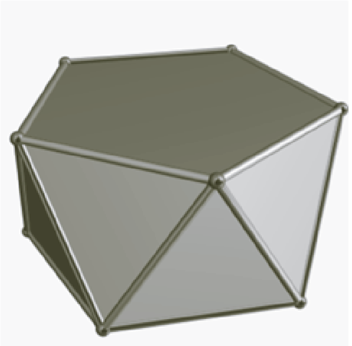

Figura 7.—Anti prisma pentagonal

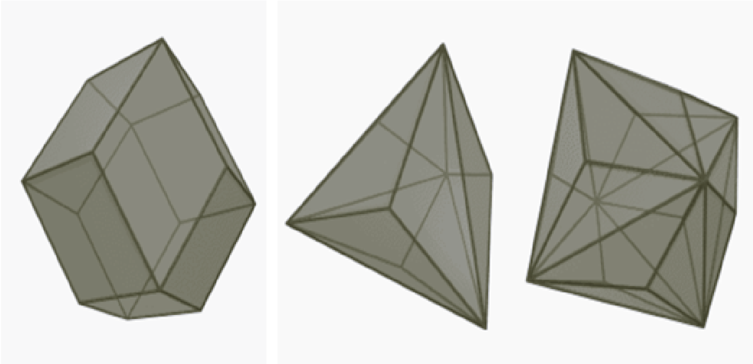

Figura 8.—Três exemplos de Sólidos de Johnson

Dipirâmides e Deltoedros: As dipirâmides são sólidos duais dos prismas e os deltoedros são duais dos anti prismas.

Esferas e Domos Geométricos: Uma esfera geodésica é uma estrutura composta de uma rede de triângulos que dá forma a uma superfície aproximadamente esférica. Quanto maior o número de triângulos na rede, mais próxima a esfera geodésica estará de uma esfera. Domos geodésicos são partes fracionadas da esfera geodésica.

Os anti prismas no 1.º ciclo do Ensino Básico

Nesta secção dedicamos a nossa atenção à exploração de tarefas envolvendo anti prismas que possam ser implementadas com alunos do 1.º ciclo do Ensino Básico. Começamos por selecionar aspetos das orientações oficiais que possam apoiar essas propostas.

As orientações oficiais

O conceito de *anti prisma* não aparece explicitamente no atual programa de matemática para o Ensino Básico (Ponte et al, 2007). Este facto, para alguns pode ser justificação suficiente para não ponderar sequer a sua abordagem/utilização neste nível de ensino, para outros pode não constituir obstáculo para o fazer. Apresentamos argumentos, baseados no programa de matemática que validam a utilização dos anti prismas no ensino e aprendizagem da geometria no 1.º ciclo.

Começamos por destacar a finalidade do ensino da matemática que preconiza o reconhecimento dos aspetos históricos e estéticos da Matemática, dois pontos em que os anti prismas são ótimos exemplos. A secção 2 e as imagens de anti prismas apresentadas comprovam a importância que os anti prismas podem ter em termos históricos (em particular de evolução da história da matemática) e estéticos.

Passando a aspetos mais particulares, percebemos que os objetivos gerais de aprendizagem do tema Geometria e Medida admitem a utilização de anti prismas ao preconizar a representação, descrição e identificação de figuras no plano e no espaço. Os anti prismas podem ser usados para a criação de tarefas que contribuam para a consecução dos objetivos específicos referidos em (Ponte et al, 2007, pp. 22–23).

Sugestões de tarefas envolvendo anti prismas

Nesta subsecção apresentamos oito tarefas suscetíveis de serem implementadas em sala de aula do 1.º ciclo do Ensino Básico. Indicamos o material necessário e descrevemos de forma sucinta a atividade a desenvolver com os alunos.

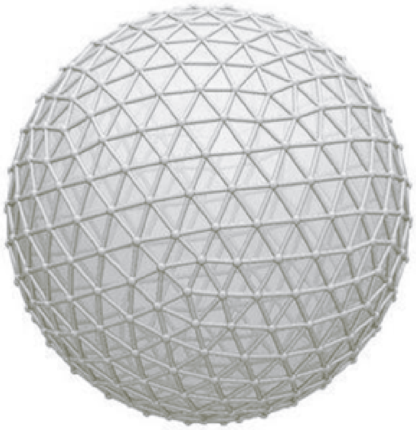

Figura 10.—Esfera Geodésica

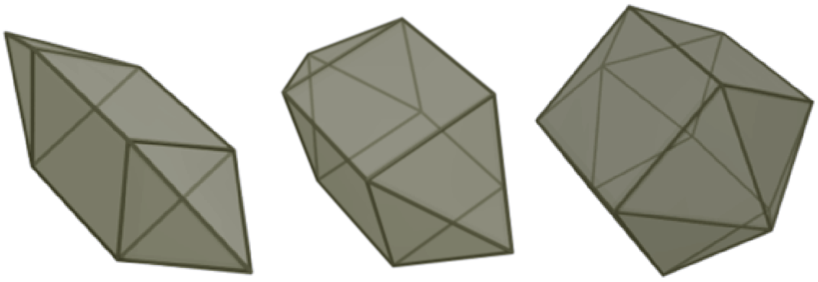

Figura 9.—Três dos sólidos de Catalan: Dodecaedro Rômbico; Tetraedro Triakis; Octaedro Triakis

Tarefa 1.—*Classificação de sólidos geométricos*

Material de apoio: Sólidos geométricos de diversas famílias (entre os quais prismas e anti prismas); ver, por exemplo, a figura 11.
Desenvolvimento: O professor coloca o conjunto variado de sólidos geométricos de modo a que os alunos os possam manipular. Solicita-lhes que organizem os sólidos segundo algum critério (*ver* figura 11).

Tarefa 2.—*Distinguir prismas de anti prismas*

Material de apoio: Prismas e anti prismas (ver figura 11)

Desenvolvimento: O professor coloca o conjunto variado de prismas e anti prismas de modo a que os alunos os possam manipular. Solicita-lhes que organizem os sólidos de acordo com as duas condições (em simultâneo):

1. terem duas bases paralelas
2. as faces laterais serem triângulos.

Tarefa 3.—*Construção e planificação de anti prismas*

Material de apoio: Polydron (ver figura 12)

Desenvolvimento: O professor coloca à disposição dos alunos polydrons de modo a que eles construam vários anti prismas diferentes. Em seguida solicita que os desmanchem com cuidado de modo a obter a sua planificação. Registar numa folha o desenho do anti prisma e a respetiva planificação. Repetir a atividade procurando encontrar planificações diferentes.

Tarefa 4.—*Exploração dos polígonos existentes nas planificações de anti prismas*

Material de apoio: Fotocópias com a planificação de anti prismas.
Desenvolvimento: Mostrar cada planificação ao aluno e pedir para identificar os polígonos que a constituem e registar os elementos importantes que o levaram à classificação dada. De

Figura 11.—Sólidos geométricos

Figura 12.—Anti prisma hexagonal construído com polydron

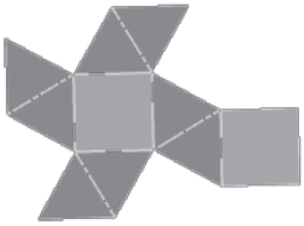

Figura 13.—Planificação de um anti prisma quadrangular

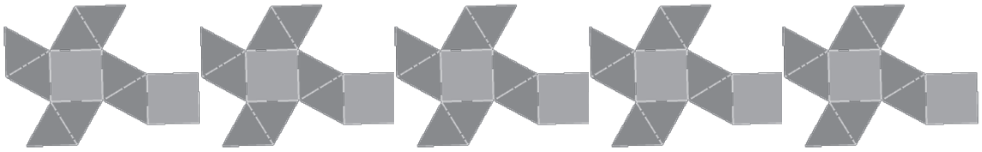

Figura 14.—Exemplo de um friso elaborado com a planificação da figura 13

seguida tentar identificar o anti prisma a que corresponde essa planificação (*ver* figura 13).

Tarefa 5.—*Construção de frisos com planificações de anti prismas*
Material de apoio: Planificação de anti prismas em cartolina, papel vegetal e cartolina branca.
Desenvolvimento: O professor distribui a cada aluno a fotocópia da planificação de um anti prisma e meia folha de cartolina. Cada aluno decalca essa planificação em papel vegetal e constrói um friso ao seu gosto.
Com a planificação de um anti prisma quadrangular apresentamos um friso a título de exemplo (*ver* figura 14).

Tarefa 6.—*Construção de anti prismas*
Material de apoio: Cartolinas, tesoura, cola, fotocópias com a planificação de anti prismas.
Desenvolvimento: O professor distribui a cada aluno a fotocópia da planificação de um anti prisma e meia cartolina. Cada aluno cola a planificação sobre a cartolina, recorta-a e monta o anti prisma. Deste modo a turma fica com um belo conjunto de anti prismas para usar noutras atividades.

Tarefa 7.—*Criar objetos com a forma de anti prismas*
Material de apoio: Anti prismas em cartolina branca
Desenvolvimento: Cada aluno inventa um objeto com a forma de um anti prisma. Decora o anti prisma em cartolina de modo a construir esse objeto. Explicar por escrito o funcionamento do objeto tendo em conta a sua forma. Apresentamos a título ilustrativo, os exemplos representados na figura 15.

Tarefa 8.—*Estudando os anti prismas com o uso de software*
Material de apoio: Computador Magalhães com ligação à internet.
Link: http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/pdp-br.html
Desenvolvimento: Professor e alunos observam anti prismas com a possibilidade de mover e aumentar/diminuir as formas.

Nota final

Os anti prismas à conquista do 1.º ciclo do Ensino Básico é um desafio que aqui lançamos e que pretendemos continuar a incentivar. Ao contrário dos prismas que são formas geométricas que nos cercam em quase todos os lugares, de anti prismas temos pouquíssimas representações em objetos de uso comum. Este aspeto que pode ser entendido como uma desvantagem, pode constituir uma novidade em termos de criação matemática. Aspeto que, entendemos, também ter interesse desenvolver nos alunos, para um entendimento mais alargado da matemática.

Selecionámos alguns pontos do atual programa de matemática que entendemos validarem a viabilidade de usar anti prismas neste nível de ensino. Esperamos que as tarefas apresentadas possam ser motivadoras para alguns professores as experimentarem em sala de aula.

Figura 15.—Alguns anti prismas

Notas

A seguir indicam-se os sites da internet de onde foram retiradas as figuras que constam no texto.
[1] http://www.es.iff.edu.br/poliedros/solidos_platonicos.html
[2] http://pichardolandia.wordpress.com/2011/09/10/el-pecado-original-en-la-teoria-de-los-poliedros/
[3] http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/poliedros.htm
[4] http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/definicoes-br.html#dualidade
[5] http://pt.wikipedia.org/wiki/Poliedro#Prismas_e_Antiprismas
[6] http://pt.wikipedia.org/wiki/S%C3%B3lidos_de_Johnson
[7] http://pt.wikipedia.org/wiki/S%C3%B3lidos_de_Catalan
[8] http://www.es.iff.edu.br/poliedros/esferas_domosgeodesios.html
[9] http://biblioteca.uam.es/ciencias/Exposiciones/matematicas/imagenes/antiprisma.jpg

Referências

Grünbaum, B. (2003). Are Your Polyhedra The Same as My Polyhedra?. In B. Aronov, S. Basu, J. Pach, & M. Sharir (eds). Discrete and Computational Geometry: The Goodman-Pollack Festschrift (pp. 461-588). New York: Springer-Verlag.

Lima, E. L. (2006). A Matemática do Ensino Médio. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M.E.G. & Oliveira, P.A. (2007). Programa de Matemática para o Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Veloso, E., (2000). Geometria. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Veloso, E. & Viana, J. P., (2008). Um cubo primo (Desafios VI), Biblioteca Desafios Matemáticos. Barcelona: RBA Coleccionables, S. A.

Paula Catarino e Cecília Costa
Departamento de Matemática
Escola de Ciências e Tecnologia da UTAD