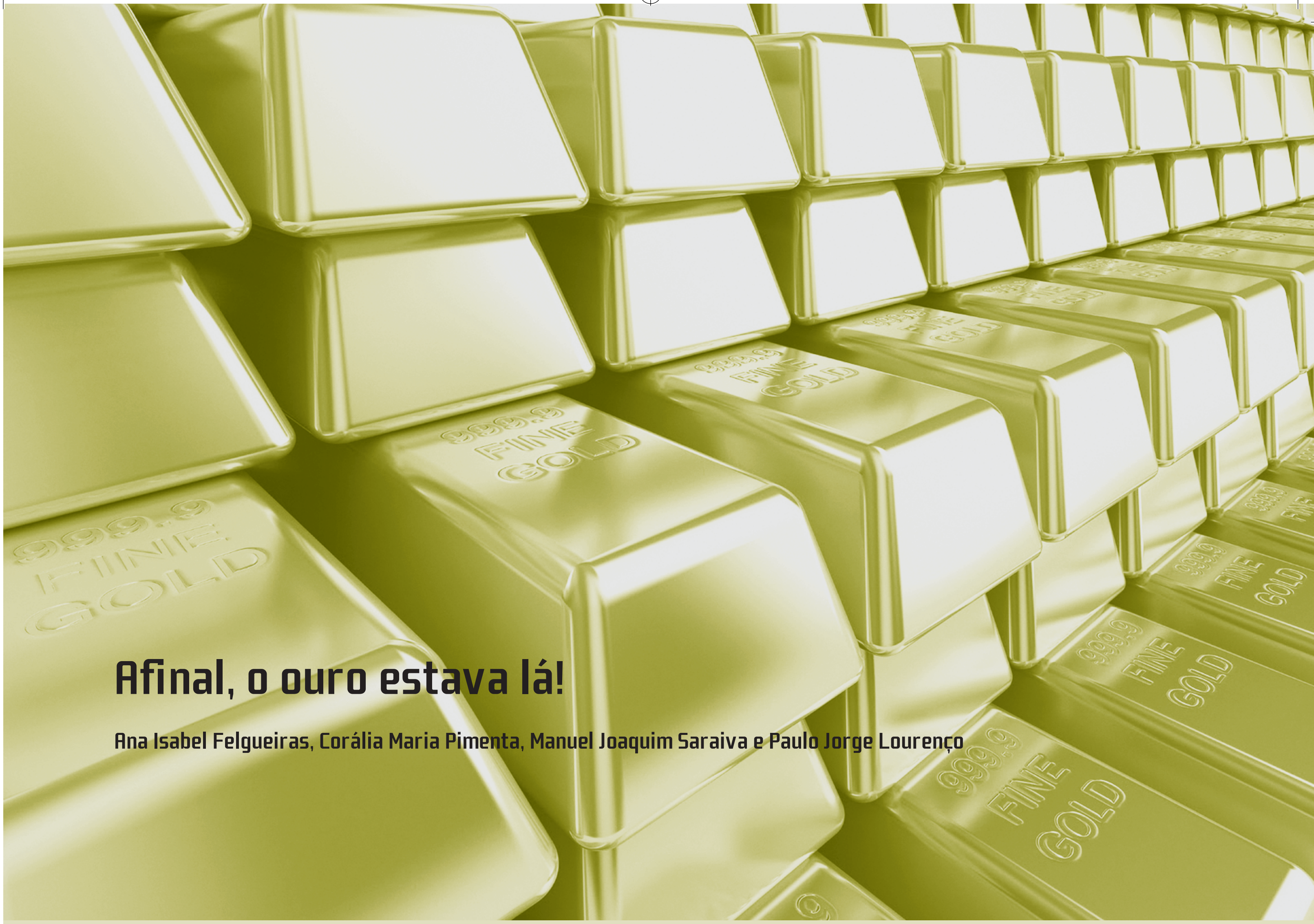


# Afinal, o ouro estava lá!

**Ana Isabel Felgueiras, Corália Maria Pimenta, Manuel Joaquim Saraiva e Paulo Jorge Lourenço**

## Introdução

Reza a História da Matemática que Pitágoras de Samos, famoso matemático e filósofo grego, foi o primeiro, depois de uma longa batalha de cálculos e ideias miraculosas, a conseguir demonstrar uma relação que o próprio supôs existir entre os quadrados dos lados de um triângulo retângulo.

Apesar do tempo que nos separa, foi este mesmo sentimento reiterativo, esta necessidade insaciante de provar aquilo que os nossos olhos teimam em ver, que nos conduziu à demonstração do limite desta bela sucessão de razões numéricas (entre cada par de números consecutivos da sucessão de Fibonacci) que também a natureza, sob diversas formas, nos decidiu oferecer.

Confrontados, na aula de Complementos de Didática da Matemática I, 3.º ciclo em Didática da Matemática, UBI, com o desafio de provar que tal limite era $\Phi$, assolámo-nos do mesmo espírito de Pitágoras e procurámos, com determinação e persistência, uma demonstração. Porém, à medida que caminhávamos para a «meta», deparámo-nos com a seguinte questão: Atenção, o limite da sucessão só pode ser o número de ouro se tal limite existir. Afinal, o limite existe mesmo? A esta dúvida também tivemos de fazer prova.

Com a elaboração deste texto, o nosso principal objetivo é partilhar com o leitor a nossa experiência matemática na resolução deste desafio muito conhecido mas, e quanto a nós, usualmente abordado de forma incompleta: parte-se do princípio de que o limite da sucessão existe. Utilizar propriedades, teoremas ou resultados baseados apenas em suposições, originará, com toda a certeza, uma *não demonstração*. Há que aliar a componente dedutiva da demonstração matemática a um significado, bem como dar sentido a todo o processo demonstrativo: a lógica, sendo muito importante na demonstração, precisa da intuição e da constante colocação de questões.

## O desafio inicial

Os números de Fibonacci são os números que compõem a sucessão 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, … , sendo obtidos, a partir do terceiro, pela soma dos dois números anteriores. Formalmente, a sucessão de Fibonacci é definida recursivamente da seguinte forma:

$$f_1 = 1;\ f_2 = 1;\ f_i = f_{i-1} + f_{i-2} \text{ (se } i > 2\text{).}$$

Numa das primeiras aulas da disciplina foi-nos colocada a seguinte questão:

*Considere a sucessão das razões entre dois números consecutivos de Fibonacci.*

*Designe-a por* $t_i = f_{i+1}/f_i$, *para* $i \geq 1$.

*Calcule* $\lim\limits_{i \to +\infty} t_i$.

| 1 | TERMOS DA SUCESSÃO | | RAZÕES | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1º | 1 | | Pelo termo geral | | Subsucessão termos ímpares | | | Subsucessão termos pares | | |
| 3 | 2º | 1 | 1º | 1,000000000000000000 | 1,000000000000000000 | 1,000000000000 | | M | | | M |
| 4 | 3º | 2 | 2º | 2,000000000000000000 | 2,000000000000000000 | | 0,50000 | | 2,000000000000 | | |
| 5 | 4º | 3 | 3º | 1,500000000000000000 | 1,500000000000000000 | 1,500000000000 | | C | | -0,333333 | |
| 6 | 5º | 5 | 4º | 1,666666666666670000 | 1,666666666666670000 | | 0,10000 | | 1,666666666667 | | D |
| 7 | 6º | 8 | 5º | 1,600000000000000000 | 1,600000000000000000 | 1,600000000000 | | C | | -0,041667 | |
| 8 | 7º | 13 | 6º | 1,625000000000000000 | 1,625000000000000000 | | 0,01538 | | 1,625000000000 | | D |
| 9 | 8º | 21 | 7º | 1,615384615384620000 | 1,615384615384620000 | 1,615384615385 | | C | | -0,005952 | |
| 10 | 9º | 34 | 8º | 1,619047619047620000 | 1,619047619047620000 | | 0,00226 | | 1,619047619048 | | D |
| 11 | 10º | 55 | 9º | 1,617647058823530000 | 1,617647058823530000 | 1,617647058824 | | C | | -0,000866 | |
| 12 | 11º | 89 | 10º | 1,618181818181820000 | 1,618181818181820000 | | 0,00033 | | 1,618181818182 | | D |
| 13 | 12º | 144 | 11º | 1,617977528089890000 | 1,617977528089890000 | 1,617977528090 | | C | | -0,000126 | |
| 14 | 13º | 233 | 12º | 1,618055555555560000 | 1,618055555555560000 | | 0,00005 | | 1,618055555556 | | D |
| 15 | 14º | 377 | 13º | 1,618025751072960000 | 1,618025751072960000 | 1,618025751073 | | C | | -0,000018 | |
| 16 | 15º | 610 | 14º | 1,618037135278510000 | 1,618037135278510000 | | 0,00001 | | 1,618037135279 | | D |
| 17 | 16º | 987 | 15º | 1,618032786885250000 | 1,618032786885250000 | 1,618032786885 | | C | | -0,000003 | |
| 18 | 17º | 1597 | 16º | 1,618034447821680000 | 1,618034447821680000 | | 0,00000 | | 1,618034447822 | | D |

Começámos por calcular os primeiros termos da sucessão, tendo, mesmo, recorrido à Folha de Cálculo[1] (Fig. 1).

Por observação direta da tabela e da representação gráfica, ganhámos a convicção de que tal limite seria o número de ouro. Designámo-lo por $a$ e, depois, mostrámos que a era $\Phi$, da seguinte forma:

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, \dots, f_i, f_{i+1}, f_{i+2}, \dots.$$

A sucessão $(t_i)$ pode escrever-se da seguinte forma:

$$t_1 = \frac{f_2}{f_1} = 1, t_2 = \frac{f_3}{f_2} = 2 = 1 + \frac{1}{t_1}, t_3 = \frac{f_4}{f_3} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{t_2}, \dots$$

$$\dots, t_i = \frac{f_{i+1}}{f_i} = 1 + \frac{1}{t_{i-1}}.$$

De um modo geral,

$$t_{i+1} = \frac{f_{i+2}}{f_{i+1}} = \frac{f_{i+1} + f_i}{f_{i+1}} = 1 + \frac{1}{f_{i+1}/f_i} = 1 + \frac{1}{t_i}.$$

Passando ao limite do quociente referido, obtemos:

$$\lim_{i \to +\infty} \frac{f_{i+2}}{f_{i+1}} = \lim_{i \to +\infty} t_{i+1} = \lim_{i \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{t_i}\right).$$

Considerando que

$$\lim_{i \to +\infty} t_{i+1} = \lim_{i \to +\infty} t_i = a$$

então,

$$a = 1 + \frac{1}{a}, \text{ para } a > 0.$$

Temos então a seguinte equação do segundo grau

$$a^2 - a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \pm\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

o que implica que

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \text{ pois } a > 0.$$

Depois de todo este trabalho, alguém questionou:

Atenção, atenção! Estamos a partir do princípio de que o limite existe, apenas com base na observação de uma tabela e de uma representação gráfica. Mas isso não chega, embora seja importante para ganharmos convicções! Lembram-se do polinómio com que trabalhámos numa das primeiras aulas? Tratava-se do polinómio

$$p(n) = n^7 - 28n^6 + 322n^5 - 1960n^4 + 6769n^3 - 13132n^2 + 13069n - 5040.$$

Ao considerarmos a seguinte afirmação, «Em $p(n)$, ao substituirmos n por um número natural obtém-se sempre o próprio número natural», e depois de experimentarmos para os casos $n = 1$, $n = 2$, $n = 5$, fomos tentados a responder que a afirmação era verdadeira. Porém, ela era falsa. Cuidado com as generalizações!

Nessa altura até conseguimos encontrar um polinómio de grau 100000 em que $p(n) = n$, para todo o $n \leq 100000$, mas para o qual $p(100001) \neq 100001$.

E assim começámos a resolver um novo desafio!

## O novo desafio — a prova da existência do limite

Esta demonstração levou-nos a mais umas semanas de trabalho. Tínhamos a «certeza» que o limite existia. Tínhamos a «certeza» que haveríamos de demonstrá-lo. Havia que demonstrar que a sucessão das razões $t_i = f_{i+1}/f_i$ era convergente. Como? Que caminho seguir?

Tivemos a sorte de encontrar dois resultados que nos levaram à resposta pretendida. Um deles foi desenvolvido por Albuquerque[2] e o outro por Machado[3].

*O que nos diz Albuquerque*: Seja $t_i = f_{i+1}/f_i$, em que $f_i$ são os números de Fibonacci. Considerem-se as subsucessões dos termos de ordem par $(t_{2i})$ e a dos termos de ordem ímpar $(t_{2i-1})$. Apesar da sucessão $(t_i)$ não ser monótona per si, ambas as subsucessões $(t_{2i})$ e $(t_{2i-1})$ o são, sendo uma delas monótona crescente e a outra monótona decrescente. Além disso, ambas as subsucessões são limitadas.

Considere-se a subsucessão $(t_{2i})$. Em Albuquerque está provado que $(t_{2i})$ é monótona decrescente. Assim sendo, $t_2 = 2$ é um majorante, donde pode-se concluir que $0 < t_{2i} \leq 2$, isto é, $(t_{2i})$ é limitada.

Sendo $(t_{2i})$ monótona e limitada, é convergente para um dado valor $\alpha$, isto é,

$$\lim_{i \to +\infty} t_{2i} = \alpha.$$

De modo análogo, Albuquerque prova que a subsucessão $(t_{2i-1})$ é monótona crescente. Recorrendo ao método de indução matemática, Albuquerque demonstra que $(t_{2i-1})$ é limitada: $0 < t_{2i-1} < 3$. Deste modo, $(t_{2i-1})$ também é monótona e limi-

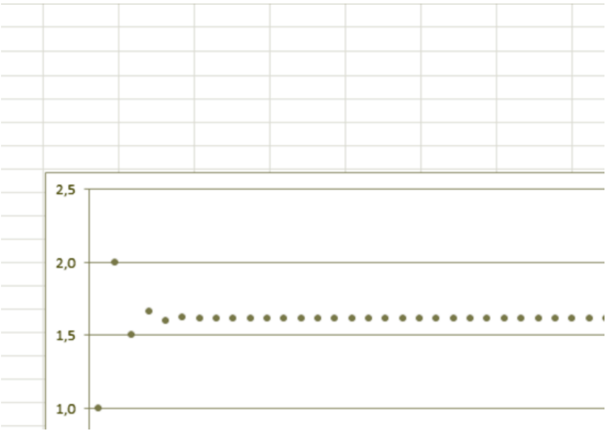


Figura 1

tada, ou seja, converge para um dado valor $\beta$, isto é,

$$\lim_{i\to+\infty} t_{2i-1} = \beta.$$

Albuquerque, acaba por demonstrar que as subsucessões $(t_{2i})$ e $(t_{2i-1})$ são convergentes para um mesmo valor, ou seja, $\alpha = \beta$.

Neste momento do processo gostaríamos de poder generalizar para a sucessão das razões aquilo que já sabíamos sobre duas das suas subsucessões — ambas convergiam para o mesmo valor. Mas com que autoridade matemática? Quem nos garantia que toda e qualquer outra subsucessão da sucessão das razões que considerássemos também convergia para esse mesmo valor, ou, mesmo, se era convergente? Tínhamos a consciência de que o resultado já obtido ainda não era suficiente para dar uma resposta convincente à nossa questão — a existência do limite.

Tivemos a felicidade de encontrar, após uma árdua procura, o resultado apresentado por Machado[3]. Segundo ele, se tivermos uma sucessão de números reais $(x_n)$ e se $J'$ e $J''$ forem dois subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ tais que as subsucessões $(x_n)_{n\in J'}$ e $(x_n)_{n\in J''}$ convirjam ambas para um mesmo limite $x$ (que pode ser um número real, $+\infty$ ou $-\infty$), então, se $J = J' \cup J''$, tem-se que a subsucessão também converge para $x$. Em particular, no caso em que $\mathbb{N} = J' \cup J''$, a sucessão de partida também tem limite $x$.

Tal resultado levou-nos a «ver» que a reunião do subconjunto dos números pares com o subconjunto dos números ímpares era o conjunto dos números naturais! Assim, o facto das duas subsucessões $(t_{2i})$ e $(t_{2i-1})$ da sucessão $(t_i)$ convergirem para um mesmo limite levava a que também a sucessão $(t_i)$ convergisse para esse mesmo valor. Conseguimos, desta forma, mostrar a existência do $\lim\limits_{i\to+\infty} f_{i+1}/f_i$. Ficámos felizes.

## Comentários finais

O conceito de demonstração matemática tem, naturalmente, sofrido alteração de acordo com as épocas e com a perceção de quem as concretiza. Sendo a demonstração uma prova da veracidade de proposições, tem características muito próprias, exigindo, com maior ou menor intensidade, capacidade de abstração, formalização, axiomatização e a cobiçada dedução. A demonstração tem por missão validar e certificar determinadas propriedades que, intuitivamente, parecem verificar-se. Deve, por isso, ter o poder de melhorar a compreensão, afastando-nos de ambiguidades ou equívocos.

Em determinada etapa da nossa demonstração, talvez pela ânsia de deduzir aquilo que já nos parecia óbvio, fomos conduzidos pela regularidade do «fenómeno», confirmada através do computador, e aceitámos ingenuamente a existência do limite:

$$\lim_{i\to+\infty} t_{i+1} = \lim_{i\to+\infty} t_{i+1} = a.$$

Constate-se então que, se porventura não existir este limite, será interrompida a cadeia de raciocínios que julgámos bem estabelecidos e rigorosos. Sem a demonstração de existência desse limite, continuamos sem ter certezas quanto à convergência da sucessão dos quocientes de dois termos consecutivos.

Confrontados com a dúvida de existência desse limite, procurámos provar a igualdade supracitada. Tivemos a sorte, por que procurada, em encontrar os resultados de Albuquerque e Machado, que nos permitiram resolver a dúvida instalada. Houve satisfação quando tal aconteceu. Rejubilámos, como diz Pólya.

Permitam-nos, ainda, que coloquemos a seguinte questão/desafio: Será que considerando uma qualquer sucessão gerada da mesma forma que a de Fibonacci, isto é, sendo os dois primeiros termos números quaisquer e a partir do terceiro sendo obtidos pela soma dos dois anteriores, a nova sucessão das razões obtida também tem por limite $\Phi$?

## Notas

[1] http://paulojorgelourenco.do.sapo.pt/CDMI_UBI/sucessoes.zip
[2] http://www.ptmat.fc.ul.pt/~albuquer/fibonacci/trabalho/limite.htm
http://www.lmc.fc.ul.pt/~albuquer/fibonacci/trabalho/limite.htm
[3] http://www.lmc.fc.ul.pt/~armac/Analise_I/NotasAM1.pdf


Ana Isabel Felgueiras
Escola Superior de Tecnologia e Gestão (Instituto Politécnico de Leiria)

Corália Maria Pimenta
Instituto Educativo de Lordemão

Manuel Joaquim Saraiva
Departamento de Matemática (Universidade da Beira Interior)

Paulo Jorge Lourenço
Escola Secundária Doutor Ramiro Salgado (Agrupamento de Escolas de Torre de Moncorvo)