

Um olhar sobre uma competição matemática na Web – A resolução de problemas para além da sala de aula

Nélia Amado e Susana Carreira

Novos formatos e novos propósitos das competições matemáticas

Em Portugal, tal como em todo o mundo, o número de competições matemáticas tem aumentado, assumindo as mais diversas formas, conteúdos e durações e dirigindo-se a grupos de alunos cada vez mais alargados. São exemplos de competições bem conhecidas, as Olimpíadas Portuguesas de Matemática e as Olimpíadas Internacionais de Matemática, destinadas a alunos especialmente talentosos, acontecendo a par de outras como o concurso Canguru Matemático e os Campeonatos de Matemática SUB12 e SUB14^[1] que, em contrapartida, têm um carácter marcadamente inclusivo, isto é, são abertos a alunos com diversos graus de aptidão para a resolução de problemas.

Um caso paradigmático, de um país com uma longa e arreigada tradição de competições matemáticas, fortemente vocacionadas para a descoberta de talentos e para a formação de futuros matemáticos, é o da Hungria que mostra atualmente uma alteração na forma de entender o alcance deste tipo de projetos. Neste país, ainda que a competição continue a ser vista como um meio essencial para envolver os alunos e motivar o seu interesse pela matemática, o lançamento de novos formatos, bastante mais abertos e menos seletivos, refletem uma mudança no foco e objetivo das competições, que se afastam de um modelo estrito de procura de talentos e se aproximam de uma abordagem mais inclusiva centrada na ideia de «enriquecimento» da formação matemática dos jovens (Stockton, 2012).

Muitos estudos internacionais, como o PISA, revelam que os alunos também aprendem matemática fora do currículo escolar,

designadamente em atividades extracurriculares, clubes de matemática, feiras de ciências, semanas da matemática, escolas de verão, em sítios da Internet e em competições matemáticas. Tal aprendizagem tem como paralelo uma mudança positiva nas atitudes dos alunos, aumentando o seu gosto pela disciplina de matemática e desenvolvendo a sua autoconfiança.

Resultados de estudos recentemente produzidos (entre os quais estão trabalhos levados a cabo por investigadores do Canadá, EUA, Israel, Itália, Suíça e Dinamarca) mostram que a participação dos alunos em competições matemáticas, seja qual for o seu formato, tem um efeito positivo na sua motivação para a aprendizagem da matemática. Também foi observado que tanto os alunos muito bons como aqueles que revelam algumas dificuldades na matemática escolar obtêm benefícios em participar neste tipo de atividades para além da sala de aula.

A aprendizagem da matemática para além da escola tem sido, por outro lado, particularmente encorajada através do uso de ambientes tecnologicamente versáteis. Os campeonatos SUB12 e SUB14 são um exemplo de tais ambientes pois decorrem a partir da Internet, usando o correio eletrónico como veículo de comunicação à distância entre os participantes e a equipa organizadora. Outros projetos que revelam algumas características semelhantes e que tiram partido dos ambientes digitais, designadamente, da Internet, do e-mail e do chat são, por exemplo, o projeto CAMI (em curso no Canadá) e o projeto Virtual Maths Teams (desenvolvido nos Estados Unidos da América).



Figura 1.—Imagens das páginas dos campeonatos SUB12 e SUB14

Um estilo de competição matemática online

Os campeonatos SUB12 e SUB14, em funcionamento desde 2005, são competições online de resolução de problemas que decorrem anualmente, entre janeiro e junho, com a colocação online de um problema de matemática, de quinze em quinze dias. O SUB12 destina-se a alunos dos 5.º e 6.º anos de escolaridade e o SUB14 dirige-se a alunos dos 7.º e 8.º anos; ambos os campeonatos abrangem os alunos das regiões do Algarve e do Alentejo. Os concorrentes resolvem cada um dos problemas, em casa ou na escola, enviando as suas respostas, por correio eletrónico, para o e-mail do respetivo campeonato (Fig. 1).

Uma característica distintiva do SUB12 e do SUB14 está no feedback que é disponibilizado regularmente aos participantes. A organização envia uma resposta por e-mail a cada aluno participante, informando se a resolução está certa ou se, pelo contrário, é necessário acrescentar algum aspeto ou rever o processo apresentado. Os comentários enviados às respostas recebidas encorajam os participantes, sugerem a revisão da resolução, se for o caso, e fornecem algumas pistas que os podem ajudar a ultrapassar dificuldades. Esta característica, quando interiorizada pelos participantes, dá-lhes o ânimo necessário para não baixarem os braços e solicitarem ajuda perante qualquer obstáculo na resolução do problema.

A página Web inclui um espaço para notícias que chamam a atenção para detalhes organizativos e informações importantes. Apresenta periodicamente as tabelas de classificação dos participantes, o que permite a alunos, professores e familiares estarem a par do desempenho dos concorrentes ao longo do campeonato. Além disso, é ainda publicada uma seleção de

resoluções de diferentes alunos, que pretende ser fiel ao trabalho feito por cada um e ilustrar a variedade de abordagens possíveis para chegar à solução do problema.

Os participantes podem comunicar o seu raciocínio, na resolução dos problemas propostos, de forma inventiva, recorrendo às ferramentas tecnológicas que preferirem. As tecnologias digitais de uso quotidiano (especialmente o computador) desempenham um papel importante na resolução dos problemas e na expressão dos processos utilizados. Por isso, o estudo da utilização das tecnologias no âmbito da participação dos jovens no SUB12 e no SUB14, tanto para a resolução dos problemas como para a expressão e explicação do raciocínio seguido, é da maior importância.

Como a participação na competição consiste em resolver problemas matemáticos a distância, os alunos podem beneficiar da ajuda de colegas, professores ou membros da família. Além disso, podem participar na fase de apuramento, individualmente ou em grupos de dois ou três alunos. Atualmente, perto de 2000 alunos começam o campeonato SUB12 e perto de 1000 alunos entram no SUB14.

Após a fase de apuramento — cujo teor é essencialmente formativo e representa a oportunidade de adquirir conhecimento e experiência na resolução de problemas matemáticos — tem lugar a final que é presencial e decorre na Universidade do Algarve. Qualquer participante atinge a final se enviar respostas corretas e completas a pelo menos oito dos dez problemas propostos durante a fase de apuramento. Na final, os alunos têm de resolver um conjunto de quatro ou cinco problemas, trabalhando individualmente e usando apenas papel e lápis. Um júri constituído por professores de matemática, englobando

docentes do ensino básico, do secundário e do superior, avalia e classifica as respostas dos finalistas, apurando três vencedores que são premiados em cada um dos campeonatos.

Os problemas utilizados nos campeonatos não têm a preocupação de se ajustarem aos temas curriculares, mas antes pretendem que os alunos mobilizem conceitos, procedimentos e formas de raciocínio matemático. Além disso, os problemas são projetados para dar aos alunos a possibilidade de usar diferentes abordagens (papel e lápis, recurso às TIC, uso de materiais concretos, etc), diversas estratégias (tentativa e erro, procedimentos algébricos ou numéricos, propriedades geométricas, etc), e várias representações (figuras, tabelas, diagramas, linguagem simbólica e natural, resultados obtidos com o computador, etc), permitindo assim o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, em sentido amplo. Os alunos têm total liberdade relativamente ao modo de apresentar as suas soluções (escritas à mão e digitalizadas, usando o computador — com ou sem a ajuda de software específico —, recorrendo a imagens, etc.) A qualidade das respostas dos alunos não é aferida em função das suas escolhas de abordagens, estratégias, representações e formas de apresentação da solução, mas sim em termos da exatidão e justificação do processo de resolução. Neste sentido, independentemente do grau de sofisticação matemática, todas as respostas corretas e completas são igualmente valorizadas.

A resolução de problemas para além do aspeto competitivo

De modo semelhante ao que é argumentado por outros investigadores, a propósito da competição Rally Matemático Transalpino (RMT), também aqui estamos a falar de muito mais do que uma competição matemática; podemos asseverar que se trata de uma experiência de educação matemática e de aprendizagem através da resolução de problemas: «O RMT não é apenas uma competição, é também a oportunidade de analisar detalhadamente os resultados e de dar destaque a diferentes procedimentos, representações e dificuldades» (Grugnetti e Jaquet, 2006, p. 3). Esta e muitas outras competições de caráter inclusivo e desafiador, como acontece com os campeonatos SUB12 e SUB14, abraçam objetivos educacionais relevantes dos quais sobressai a consciência clara de que resolver problemas é fazer matemática.

A aprendizagem da matemática, como bem sabemos, não é apenas o domínio de cálculo e de técnicas nem equivale a saber o que está no manual. A resolução de problemas constitui o objetivo e o alicerce da aprendizagem por experiência, que dá um sentido às situações que se podem resolver matematicamente. O contexto do RMT é estimulante, os problemas propostos são significativos e originais, os alunos envolvem-se e aprendem a ser responsáveis. Na verdade, os problemas propostos não são simplesmente exercícios de aplicação do último capítulo que foi estudado, mas situações originais a resolver matematicamente (Grugnetti e Jaquet, 2006, p. 2).

A resolução de problemas é atualmente reconhecida como uma atividade relevante na matemática escolar, em Portugal tal como em muitos países do mundo. Porém, estudos comparativos de larga escala, como o TIMSS ou o PISA, apontam a resolução de problemas como uma das capacidades em que os alunos portugueses revelam um desempenho mais baixo.

Problema 1.—E lá se encontraram...



O Alexandre e o Bernardo vivem a uma distância de 22 km um do outro e querem encontrar-se mas só têm uma forma de fazer o caminho ... a pé! Nas férias decidem que irão ao encontro um do outro logo de manhã. O Alexandre parte da sua casa às 8 horas da manhã e vai caminhando a uma velocidade de 4 km por hora. O Bernardo sai de casa uma hora mais tarde e caminha a uma velocidade de 5 km por hora. Nenhum dos dois amigos levou relógio mas é possível saber a que horas se encontraram. Que horas eram?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

—Enunciado do Problema 1 do SUB14, edição de 2011/12

A resolução de problemas de matemática exige mais do que conhecimento de procedimentos e técnicas, exige a capacidade de os mobilizar e colocar em ação, de pensar em estratégias, que à partida não são diretas nem pré-estabelecidas, e de recorrer a diversas formas de comunicar o raciocínio e o processo de resolução. Enfim, implica mobilizar e desenvolver uma variedade de competências para atingir um fim. O indivíduo não tem, de antemão, qualquer algoritmo ou procedimento já construído que lhe garanta a solução (ver problema 1).

O design das competições SUB12 e SUB14 proporciona aos alunos oportunidades para a transferência de conhecimentos e habilidades entre a matemática escolar e a matemática para além da escola. Os resultados de investigações realizadas mostram que os participantes usam frequentemente os conhecimentos adquiridos na sala de aula mas também revelam sinais de criatividade, quer porque os alunos podem escolher livremente a abordagem a seguir, em particular lançando mão das tecnologias de uso quotidiano ou mesmo de software mais específico, quer ainda porque não têm restrições de tempo significativas para resolver os problemas (Jacinto, Amado & Carreira, 2009; Amado, Amaral & Carreira, 2009; Moyer, Niezgoda & Stanley, 2005). De uma forma breve, com base numa pequena seleção de respostas dos participantes ao problema 1 do SUB14, é possível obter uma ideia clara de como as estratégias variam, de como os modos de exprimir o raciocínio são diversos e de como os modelos conceituais presentes na abordagem ao problema demonstram formas de compreender a situação proposta e de a resolver matematicamente.

O participante A1 optou por traduzir o problema por uma equação, começando por definir a variável t como sendo o tempo que o Alexandre leva a percorrer o caminho até ao ponto de encontro e deduzindo que o tempo do Bernardo será $t-1$. Depois foi traduzindo as diversas informações do problema para

linguagem simbólica e estabeleceu uma condição que envolve as velocidades de deslocamento de cada amigo e a distância total (figura 2).

A opção por resolver uma equação foi a estratégia menos frequente nas cerca de mil resoluções recebidas a este primeiro problema. A grande maioria dos participantes apresentou uma resolução escrita, muitas vezes na própria janela de texto do e-mail, sem grande recurso a formalismo matemático, usando apenas a simbologia das operações elementares, como no caso da resolução do grupo de alunos A2. Apesar da sua simplicidade, a resposta deste grupo demonstra a compreensão do problema, a noção de que os dois amigos se deslocam em sentidos opostos, de que há um desfaseamento no tempo de partida de ambos e de que o somatório das distâncias percorridas terá de ser igual à distância que os separava inicialmente (figura 3).

Por vezes, alguns alunos, ao efetuarem uma resolução semelhante à anterior, com papel e lápis, optam por digitalizar a folha com a resolução e enviar em anexo. Foi esta a decisão do participante A3 para enviar a sua resposta (figura 4).

O participante A4 apresenta uma forma diferente de exprimir o raciocínio que utilizou. Construiu um esquema em que foi ilustrando, a cada meia hora, o caminho que os dois amigos percorreram e a posição em que cada um se encontrava relativamente ao outro e ao ponto de partida. Para além de uma clara intenção de tornar a resolução visualmente expressiva, este aluno mostra a capacidade criativa de imaginar um esquema estático que representa eficazmente um processo dinâmico e que torna clara a sua resolução e a solução do problema. A esta situação não é alheio o facto de os participantes disporem de um período de duas semanas para pensarem e criarem resoluções que se destacam pela originalidade das representações usadas e das suas formas de expressão do pensamento matemático. É uma das características da competição que se traduz numa diferenciação daquilo que os alunos conseguem produzir comparativamente com o trabalho mais habitual na sala de aula (figura 5).

Outros exemplos de utilização de esquemas em que os participantes revelam bastante criatividade e cuidado no modo como explicam detalhadamente o seu raciocínio, estão presentes nas resoluções dos participantes A5 e A6. Estes participantes, à semelhança do anterior, evidenciam a sua preocupação em criar um cenário do problema — aquilo a que alguns autores designam por um «modelo real» da situação —, o que permite imediatamente perceber a importância de se considerarem contextos reais como promotores da atividade matemática dos alunos (figuras 6 e 7).

Nestes três últimos casos os participantes apenas necessitaram de recorrer a programas informáticos de uso geral, como o processador de texto e as ferramentas de desenho para expressarem os seus raciocínios e as suas estratégias de resolução. Estas resoluções exemplificam também a destreza que muitos destes jovens «nativos digitais» têm na utilização de ferramentas tecnológicas. Para além de saberem resolver o problema de matemática, estes jovens tiram partido de diversas ferramentas do editor de texto, como por exemplo, a edição de imagens, a utilização de objetos de desenho ou a composição e tratamento gráfico do texto.

Outra resolução interessante foi a da equipa de participantes A7 que recorreu ao Geogebra. O grupo de alunos que apresentou

esta resolução percebeu que existia uma relação entre o tempo decorrido e a posição de cada um dos amigos que caminhavam um ao encontro do outro. A representação gráfica num sistema de eixos permitiu encontrar o ponto de intersecção dos gráficos lineares que representam a posição de cada amigo ao longo do tempo e proporcionou a solução do problema. O ponto de intersecção deu-lhes a hora e a posição em que os amigos se encontraram (figura 8).

O recurso a tabelas foi também uma estratégia frequente entre os participantes no campeonato. Na resolução seguinte, apresentada pelo participante A8, os dados do problema surgem «arrumados» numa tabela de dupla entrada. O aluno colocou, na vertical, o tempo (em horas) e, na horizontal, a distância percorrida por cada um dos amigos. Na linha inferior da tabela é feito o controlo da soma das distâncias percorridas por cada um dos amigos (figura 9).

Em conclusão

O projeto de investigação sobre competições matemáticas *Problem@Web*,^[1] atualmente em curso, tem como um dos seus focos de investigação as estratégias utilizadas na resolução de problemas de matemática, as formas de representação e expressão do pensamento matemático, designadamente do ponto de vista da criatividade matemática dos jovens, e o uso das tecnologias como ferramentas para a resolução de problemas.

No âmbito deste projeto, os resultados obtidos mostram que os participantes nos campeonatos de resolução de problemas SUB12 e SUB14, conseguem, efetivamente, delinear e pôr em prática as mais diversas estratégias e exprimir com eficácia e desembaraço o seu pensamento em torno da resolução de cada problema. Assim, muito para além do aspeto competitivo, estes são contextos reveladores do modo como a resolução de problemas abre caminho ao desenvolvimento de modos de pensar matematicamente e são também elucidativos do desenvolvimento da compreensão matemática.

As resoluções apresentadas são exemplos de como é importante, enquanto experiência de aprendizagem, a participação dos jovens em competições desta natureza, que permitem mostrar habilidades dos alunos que nem sempre seriam visíveis. Estas soluções destacam a variedade de abordagens, estratégias e representações que os alunos usam na resolução de um problema de uma competição como o SUB12 ou o SUB14. As resoluções também ilustram e dão relevo a um dos aspetos enfatizados nestas competições: a explicação e a comunicação do raciocínio subjacente à determinação da solução de um problema. A preocupação dos alunos com o uso de representações significativas parece ser outra característica predominante das suas respostas. A maioria das soluções enviadas incluem figuras, esquemas, tabelas ou gráficos e uma maior ou menor presença de linguagem algébrica, em todos os casos reveladores da compreensão do problema e da solução alcançada.

O projeto *Problem@Web* procura obter uma perspectiva alargada sobre o modo como os estudantes lidam com a resolução de problemas matemáticos, para além da escola, em especial dentro do contexto de uma competição matemática inclusiva. Até agora, os resultados suportam duas ideias principais: (1) os alunos usam matemática que não é apenas subordinada aos currículos escolares, e (2) porque têm a liberdade de escolher

tempo que o Alexandre leva a fazer o percurso= t
tempo que o Bernardo leva a fazer o percurso= $t-1$
percurso feito pelo Alexandre= $4t$
percurso feito pelo Bernardo= $5(t-1)$
a soma destes percursos= 22km
 $4t+5(t-1)=22$
 $4t+5t-5=22$
 $9t=27$
 $t=3$
R: Quando o Alexandre andou 3h e o Bernardo 2h encontraram-se, isto é às 11h.

Figura 2.—Resolução do participante A1

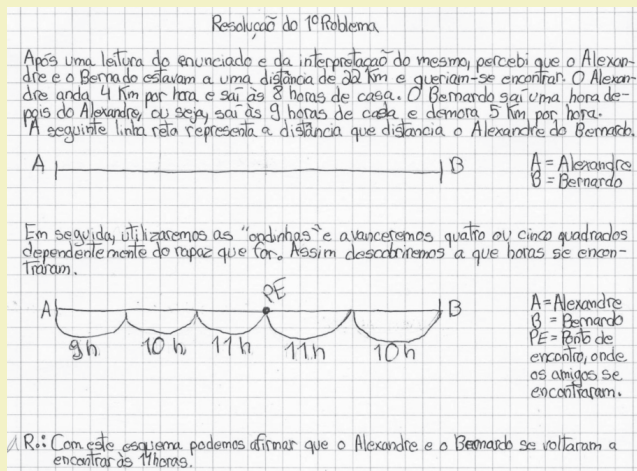
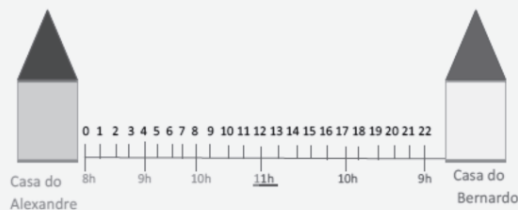


Figura 4.—Resolução do participante A3

R: Os dois amigos encontraram-se às 11:00 horas da manhã.



- O Alexandre saiu de casa às 8:00h da manhã, às 9h tinha andado 4km, às 10h tinha andado 8km, às 11h tinha andado 12km.
- O Bernardo saiu de casa às 9h da manhã, às 10h tinha andado 5km. Às 11h tinha andado 10km.
- Logo:
 $10+12=22\text{km}$

Ou seja encontraram-se às 11h da manhã.

Figura 6.—Resolução do participante A5

Date: Fri, 13 Jan 2012 20:29:13 +0000
Subject: Resposta_SUB14
To: sub14_7@hotmail.com
From: xxxxxxxxxxxxxxx

Camisola	Nome	Turma	Escola	Concelho	E-mail
xxx	xxxxxxxxxxxx xx	xxxxxxxxxxxx	xxxxxxxxxxxx	xxxxxxxxxxxx	xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
xxx	xxxxxxxxxxxx xx	xxxxxxxxxxxx	xxxxxxxxxxxx	xxxxxxxxxxxx	xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx
xxx	xxxxxxxxxxxx xx	xxxxxxxxxxxx	xxxxxxxxxxxx	xxxxxxxxxxxx	xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Resposta:
O primeiro a partir é o Alexandre, que sai de casa às 8 horas, andando 4 Km/h. Passado 1 hora, às 9 horas, andou 4 Km. Como a distância que separa os dois é de 22 Km, subtraímos 4 Km a 22 Km, cujo resultado é 18, ficando assim a distância entre os dois de 18 Km. Às 9 sai de casa o Bernardo, andando 5 Km/h, e passado uma hora, às 10 horas, ele e o Alexandre andaram os dois em direção um ao outro, $(4+5=9)$. Retira-se assim a distância entre eles (18 Km) os 9 Km $(18-9=9)$, ficando assim às 10 horas a uma distância de 9 Km um do outro. Às 11 horas, encontram-se finalmente, pois andando novamente o Alexandre 4 Km e o Bernardo 5 Km (9Km) $9-9=0$, por isso o Alexandre andou 12 Km e o Bernardo 10 Km, durante 3 e 2 horas respectivamente, encontrando-se às 11 horas.

Figura 3.—Resolução da equipa de participantes A2

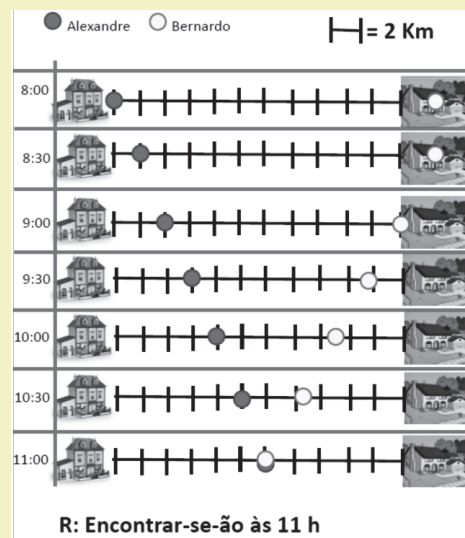


Figura 5.—Resolução do participante A4

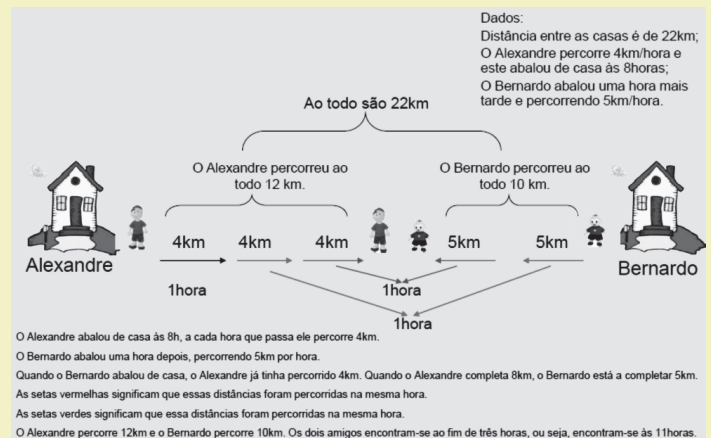


Figura 7.—Resolução do participante A6

Alexandre - 4 km/h

Bernardo - 5 km/h

	Horas				
	Km	8 horas	9 horas	10 horas	11 horas
Alexandre	4 Km/h	0 km	4 km	8 km	12 km
Bernardo	5 Km/h	0 km	0 km	5 km	10 km
Total		0 km	4 km	13 km	22 km

Figura 9. – Resolução do participante AB

Alexandre:

Às 8 horas foi quando ele saiu de casa, não percorreu nenhum km.

Às 9 horas tinha andado 4 km.

Às 10 horas tinha andado 8 km.

Às 11 horas tinha andado 12 km.

Ao meio dia tinha andado 16 km.

Bernardo:

Sai de casa 1 hora mais tarde que o Alexandre, ou seja às 9 horas encontra-se a 22 km da casa do Alexandre.

Às 10 horas tinha percorrido 5 km, encontrando-se a 17 km da casa do Alexandre.

$$22 - 5 = 17$$

Às 11 horas tinha percorrido 10 km, encontrando-se a 12 km da casa do Alexandre.

$$17 - 5 = 12$$

Ao meio dia tinha percorrido 15 km, encontrando-se a 7 km da casa do Alexandre.

Graficamente:

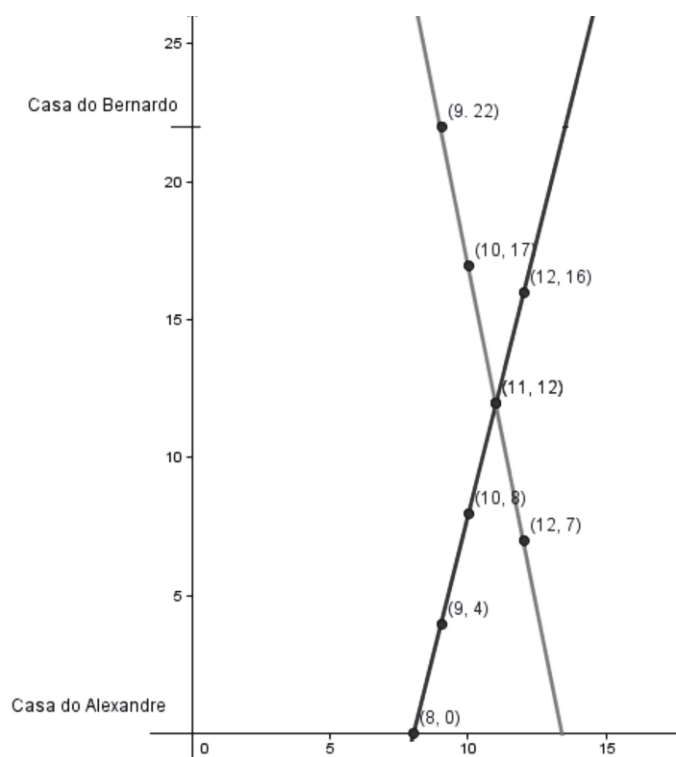


Figura 8. – Resolução da equipa de participantes A7

qualquer abordagem, estratégia, ou representação para resolver os problemas, há uma ampla gama de respostas para cada problema que não apenas são válidas mas também valorizadas. Há também evidências de um aumento no número de alunos que tira partido das tecnologias digitais. As soluções que fazem uso da tecnologia tendem a afastar-se mais de uma perspetiva tipicamente escolar e a envolver um pensamento matemático interessante, sobretudo do ponto de vista da capacidade representacional envolvida na interpretação e análise das situações propostas.

Notas

- [1] O SUB12 e SUB14 são Campeonatos de resolução de Problemas organizados pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve. <http://fctec.ualg.pt/matematica/5estrelas/>
- [2] Projeto n.º PTDC/CPE-CED/101635/2008, financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia. <https://www.sites.google.com/site/problematweb/>

Referências

Amado, N., Amaral, N. & Carreira, S. (2009). A liberdade que as tecnologias permitem: Trabalhando os números e as capacidades matemáticas transversais. In C. Costa, E. Mamede & F. Guimarães (Orgs.). *Números e Estatística: reflectindo no presente, perspectivando o futuro*. Lisboa: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Grugnetti, L. & Jaquet, F. (2006). The transalpine mathematics rally in primary and low secondary school: a problem-solving and a maths education experience. Artigo aceite no ICMI Study 16 – Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom. [Disponível em: <http://www.amt.edu.au/icmis16pitagrugnetti.pdf>].

Jacinto, H., Amado, N. & Carreira, S. (2009). Internet and Mathematical Activity within the Frame of «Sub 14». In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.) *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1221–1230). Lyon, France: Institut National de Recherche Pédagogique.

Moyer, P., Niezgoda, D. & Stanley, J. (2005). Young Children’s Use of Virtual Manipulatives and Other Forms of Mathematical Representations. In W. J. Masalski & P. C. Elliot (Eds.), *Technology-supported Mathematics Learning Environments* (pp. 17–34). Reston: NCTM.

Stockton, J. C. (2012). Mathematical Competitions in Hungary: Promoting a Tradition of Excellence & Creativity. *The Mathematics Enthusiast*, 9(1–2), p. 37–58.

Nélia Amado e Susana Carreira
 Faculdade de Ciências e Tecnologia da
 Universidade do Algarve & UIDEF da Universidade de Lisboa