A utilização do Geometer's Sketchpad na aula de matemática: O papel desempenhado pelas tarefas

António Domingos e Maria João Mendes Vieira

Neste artigo é feita referência a um conjunto de tarefas desenvolvidas para a utilização do software de Geometria Dinâmica Geometer's Sketchpad, no estudo das Pavimentações. As tarefas foram experimentadas numa turma de alunos do 10º ano que frequentam um curso de Design, procurando-se elucidar o leitor das potencialidades da utilização desta ferramenta computacional e das vantagens que esta metodologia, baseada em tarefas diversificadas, traz para a sala de aula.
As ferramentas, como os ambientes de geometria dinâmica, permitem a utilização de um conjunto de tarefas diversificadas que ajudam a explorar conceitos, a manipular diferentes representações matemáticas, favorecendo a experimentação e são uma mais-valia no que respeita à motivação dos alunos.

Os programas de Matemática do Ensino Secundário, de um modo geral e em particular os destinados aos Cursos Profissionais, apontam para a utilização de computadores e programas de geometria dinâmica de modo a concretizar as competências a adquirir.
Parece ser consensual que são várias as potencialidades da utilização de AGD em sala de aula, sempre associadas a atividades de investigação e tarefas de natureza exploratória por permitirem a realização de um grande número de tarefas num curto espaço de tempo (Veloso, 1998), favorecendo a experimentação e criando oportunidades adequadas para conjeturar, explicar e justificar resultados (Burrill 2008).
É fundamental o papel do professor quer na criação dos ambientes de aprendizagem ricos, quer na avaliação sistemática dos desempenhos dos alunos quando emersos nesses ambientes. Sendo os AGD um meio privilegiado para a realização de tarefas de investigação e exploração criam obrigatoriamente ambientes de aprendizagem em que a construção do conhecimento se faz de forma continuada e participada, de uma forma autónoma e que pode levar à utilização de argumentos mais ou menos formais como meio de convencimento.
As tarefas que se irão apresentar resultam de um estudo de investigação sobre o tema pavimentações, em particular nas pavimentações em que os ladrilhos são polígonos regulares e em que todos os pares de arestas adjacentes têm uma aresta de pavimentação comum.
Foi dada ênfase ao papel da demonstração de propriedades algébricas e geométricas das pavimentações, procurando compreender se os alunos sentem necessidade de elaborar conjeturas quando exploram resultados com características comuns (generalização) e se procuram validar as suas conjeturas passando para o processo de prova/demonstração.
As tarefas utilizadas no estudo foram elaboradas visando desenvolver uma metodologia de ensino que permitisse caracterizar a forma como os alunos mobilizam os seus conhecimentos prévios para a construção de novos conceitos apoiados por um AGD, caracterizar as suas aprendizagens e apoiar a elaboração de conjeturas que conduzam à necessidade de demonstração. Algumas são de caráter fechado condicionando os resultados a obter, funcionando como guião de trabalho e outras, mais abertas sem "instruções" pormenorizadas para a construção dos sketches e sem perguntas direcionadas para os objetivos da tarefa. O denominador comum a todas é o facto de não condicionarem a obter resultados diretamente relacionados com o estudo das isometrias nas pavimentações. Para além das tarefas de investigação foram elaboradas fichas informativas para introduzir os conceitos chave, essenciais para a compreensão das tarefas. Estas foram utilizadas como introdução a cada uma das tarefas de investigação ou exploração contendo, por exemplo, a noção de pavimentação e a nomenclatura associada ao estudo das pavimentações. Sempre que ia sendo necessário introduzir conceitos teóricos com vista a poderem ser realizadas as tarefas de investigação e exploração era fornecida uma ficha informativa a cada grupo de alunos acrescida de uma pequena explicação por parte da professora (quando solicitada) de modo a não existirem dúvidas relativamente aos conceitos envolvidos. Esta metodologia teve por objetivo evitar a aula expositiva, ganhar algum tempo e ainda promover a autonomia dos alunos. Por outro lado a decisão da aplicação destas fichas (informativas) também permitiu que os grupos não necessitassem de efetuar as tarefas em simultâneo. Foi possível que cada grupo gerisse o seu próprio tempo respeitando a planificação pré-estabelecida para a realização das tarefas.
Os alunos trabalharam em grupos (pares) de acordo com os seus ritmos, solicitavam a professora quando tinham dúvidas e muitas vezes pediam ajuda a colegas de outros grupos. Foram discutidos em grande grupo (turma) os processos utilizados na construção dos sketches. Cada grupo, no final da realização das tarefas apresentou os seus resultados à turma tendo sido feita nessa altura uma síntese dos mesmos. Esta síntese foi efetuada pela professora no quadro com o contributo dos alunos.
Esta conjugação de tarefas apoiadas pelo AGD e pela dinâmica que os diferentes grupos lhe imprimiram permitiu compreender

a necessidade de os alunos precisarem de tempos próprios para a realização destas tarefas, que dependem em grande parte da capacidade de mobilizar os seus conhecimentos prévios. Os momentos de reflexão conjunta ajudaram a esbater algumas das assimetrias verificadas, permitindo que o professor tivesse em atenção que esses casos mereciam um acompanhamento mais próximo e sistemático.

A principal vantagem da utilização de AGD, neste caso o GSP é a realização de um elevado número de tarefas num espaço de tempo curto (Veloso, 1998). No caso específico das pavimentações, a utilização deste tipo de software, permite ainda a exploração de vários conceitos matemático/geométricos associados, como por exemplo as isometrias, mais concretamente rotações e translações e eventualmente reflexões utilizadas na elaboração dos sketches.

Partindo da aplicação das tarefas foi possível observar dois percursos distintos de aprendizagem. Em dois dos casos as aprendizagens foram mais significativas ao nível das propriedades geométricas relativas aos polígonos e às propriedades das pavimentações, nomeadamente aplicação de isometrias na construção das pavimentações, enquanto no outro caso foram relativas às capacidades de elaboração e validação de conjeturas, inserindo-se no âmbito do raciocínio e demonstração matemáticos.

Estas tarefas permitem dois tipos de abordagem: estudo de propriedades geométricas e estudo de propriedades algébricas relativas às pavimentações regulares e semi regulares, podendo o professor direcionar as questões consoante os objetivos e as competências a desenvolver e de acordo com o nível e ciclo de ensino a que se destinam. Podem ser adaptadas e ser aplicadas ao nível do 3º ciclo referente ao tópico das isometrias e ser utilizadas para desenvolver pequenos trabalhos de investigação pelas inúmeras potencialidades de exploração que oferecem. Ao nível do ensino secundário podem ser utilizadas para desenvolver competências no âmbito do raciocínio e demonstração matemáticos, nomeadamente no que se refere na exploração de resultados algébricos referentes às pavimentações, direcionando o estudo de acordo com os objetivos e competências do programa da disciplina em que se irá desenvolver (pode ser explorado por exemplo na Matemática B ou nos módulos para a Matemática dos Cursos Profissionais, como foi o caso do estudo referido).

TAREFAS

TAREFA 1.–PAVIMENTAÇÕES REGULARES: PAVIMENTAÇÕES COM TRIÂNGULOS

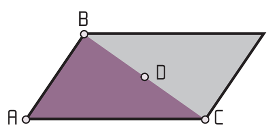
I. No canto inferior esquerdo do monitor, e usando as ferramentas adequadas, constrói um triângulo ABC. Assim que marcares os 3 vértices do triângulo, no menu Display selecciona a opção Show labels. Classifica o triângulo que obtiveste.

II. Seleciona os 3 vértices do triângulo e no menu Construct selecciona Triangle interior.
Podes optar pela cor da tua preferência no menu Display.

III. Seleciona o segmento BC e no menu Construct seleciona Midpoint (Este deverá ficar marcado como ponto D).

IV. Seleciona o ponto D e no menu Transform seleciona mark as center.

V. Seleciona o triângulo interior e no menu Transform seleciona Rotate, com a opção 180° (efetua uma rotação de 180° do triângulo)

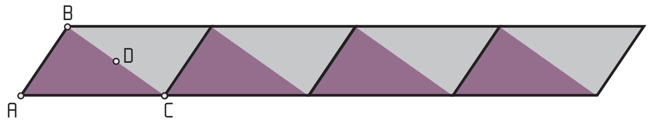


Arrasta os pontos e observa o polígono que se obtém com os dois triângulos. Classifica esse polígono.

VI. Marca o segmento AC como vetor: seleciona por esta ordem, o ponto A e depois o ponto C, depois no menu Transform seleciona Mark Vector. (Uma animação indica o vetor marcado.)

VII. Seleciona os dois triângulos interiores e no menu Transform seleciona Translate.

VIII. Repete esta operação tantas vezes quantas as necessárias de modo a pavimentar o ecrã de uma ponta a outra.
Arrasta de modo a confirmar que o topo e a base desta fila de triângulos são sempre retas.



IX. Do mesmo modo que procedeste acima, marca o vetor AB e no menu Transform seleciona Translate, para efetuares a translação de toda a linha por este vetor. Repete este procedimento (de translação) até o ecrã estar cheio.

X. Arrasta de modo a confirmar que consegues de qualquer forma obter uma pavimentação.

XI. Grava o ficheiro como pav_trig_nomes

1) Será que todo o triângulo pavimenta o plano?
2) Consegues explicar porquê?
3) Elabora uma conjectura e justifica-a.

TAREFA 2.–PAVIMENTAÇÕES REGULARES

Descobrir as pavimentações regulares/monoédricas possíveis.

I. Utilizando transformações geométricas e polígonos regulares, procede do mesmo modo que na tarefa 1 para explorar pavimentações com: Quadrados, Pentágonos regulares, Hexágonos, Heptágonos, Octógonos, ...

II. Grava cada ficheiro como pav_polígono_nomes

Descobrir as razões que fazem com que um polígono regular pavimente

1. Observa o vértice em cada uma das pavimentações obtidas.
- i) Quantos polígonos «partilham» cada vértice?
- ii) Comenta sobre a soma das amplitudes de todos os ângulos que partilham esse vértice.
- iii) Como é que o valor que obtiveste em ii) está relacionado com o facto de esse polígono pavimentar?

2.
- i) Qual é a amplitude do ângulo interno de um pentágono regular?
- ii) É possível que três pentágonos regulares, sem sobreposições partilhem um vértice?

3. Completa a tabela de modo a organizar a tua informação:

Polígono	Nº de lados do polígono	No caso de pavimentar Nº de polígonos concorrentes num vértice	Amplitude do ângulo interno do polígono	Soma das amplitudes dos ângulos concorrentes num vértice
	3			
	4			
	5			
	6			
	7			
	8			
	10			

CONCLUSÕES

Observa todos os dados que registaste e responde às questões seguintes, justificando-as convenientemente

1) Qual é o nº mínimo de polígonos concorrentes num vértice? E o máximo? Justifica.
2) Quantas pavimentações regulares existem?
3) Utilizando a expressão para a amplitude do ângulo interno de um polígono regular, consegues escrever uma expressão matemática que seja condição para que esse polígono regular pavimente o plano?
4) Demonstra a tua conjetura (efetuada em 3)
5) Procura encontrar condições necessárias e suficientes para criar uma pavimentação regular

TAREFA 3.-PAVIMENTAÇÕES SEMI-REGULARES

Gravem cada sketch que construírem

I. Considerem que queremos construir uma pavimentação em que num vértice concorrem exactamente três polígonos regulares, em que um deles é um triângulo equilátero.

Conseguem descobrir todos os casos possíveis. Enumerem-nos.

II. Considerem que queremos construir uma pavimentação em que num vértice concorrem exactamente três polígonos regulares, em que um deles é um quadrado.

Conseguem descobrir todos os casos possíveis. Enumerem-nos.

III. Se polígonos regulares de lados $n_1, n_2, \ldots, n_p$ se encontram no vértice de uma pavimentação, teremos

$$\frac{n_1-2}{n_1}+\frac{n_2-2}{n_2}+\cdots+\frac{n_p-2}{n_p}=2.$$

Com base nas observações anteriores (das tarefas I e II) conseguem dizer quantas e que escolhas são possíveis para os inteiros positivos? Elaborem um quadro onde registam a informação relevante.

Referências

Albrecht, M et al, (2001). 101 Project Ideas for the Geometer's Sketchpad. Key Curriculum Press

Burril, G. (2008). The role of handheld technology in teaching and learning secondary school mathematics, ICME 11 – TSG 22, International Congress on Mathematical Education. Mexico (Retirado de http://www.tsg.icme11.org/document/get/218 em 30/11/2010)

Christou, C. (2004). Proof through exploration in dynamic geometry environments. Proceedings of the 28th Conference of the Internacional Group for the Psichology of Mathematics Education, Vol2, (pp. 215-222). Bergen (Retirado de http://www.emis.de/proceedings/PME28/ em 27/11/2010)

Exploring and Creating Tessellations. Center for Technology and Teacher Education. University of Virginia, EUA. Retirado de http://www.teacherlink.org/home.html em 30/10/2010)

Hileman, L. & Loomis, K. (2004). Tessellations Using Geometer's Sketchpad, Blue Ribbon Applied Geometry Workshop, Math 693, West Virginia University, EUA (Retirado de http://www.blueribbon.ws/people/2004/Hileman%20and%20Loomis/Tessellationlessonplan.pdf em 30/11/2010)

ME (2004). Programa da disciplina de Matemática da componente científica dos Cursos Profissionais de nível secundário, Portugal: Ministério da Educação

ME (2001). Programa da disciplina de Matemática (A e B) da componente científica dos Cursos Cientifico-Humanísticos de nível secundário, Portugal: Ministério da Educação

Veloso, E. (1998). Geometria: Temas actuais. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Whiteley, W. (2000). Dynamic geometry programs and the practice of geometry. Proceedings of the ICME 9. Tóquio (Retirado de http://www.math.yorku.ca/Who/Faculty/Whiteley/Dynamic.pdf em 30/11/2010)

António Domingos
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa
UIED – Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento
amdd@fct.unl.pt

Maria João Mendes Vieira
Escola Secundária de Casquilhos
matmaria.essa@gmail.com