Desenvolvimento da linguagem algébrica

Manuel de Sousa Pereira

A Álgebra sempre foi considerada um importante tema nos programas de Matemática. No programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) a Álgebra foi introduzida como tema programático nos 2º e 3º ciclos e no 1º ciclo já tem lugar uma iniciação ao pensamento algébrico. O conceito de pensamento algébrico foi progressivamente ganhando espaço desde o início da década de 80, do séc. XX, e vai muito além da capacidade de manipulação de símbolos (NCTM, 2007; ME, 2007; Ponte, Branco & Matos, 2009a), contrariamente ao que durante muito tempo vigorou, gerando as maiores dificuldades aos alunos, um ensino muito centralizado na manipulação simbólica.

Segundo o NCTM (2007), «os alunos necessitam de compreender os conceitos algébricos, as estruturas e os princípios que regem a manipulação simbólica, e o modo como os próprios símbolos podem ser utilizados para registar ideias e tirar ilações face a certas situações» (p. 39). Além disso, o pensamento algébrico diz respeito à simbolização, ao estudo de relações entre objetos matemáticos, generalização, ao estudo da variação e à modelação (NCTM, 2007; ME, 2007).

O processo de ensino-aprendizagem da Álgebra deve envolver, a par e de modo harmonioso, a linguagem simbólica e a sua compreensão. Assim, perseguindo um ensino-aprendizagem exploratório (Ponte, 2005), o professor deve propor tarefas adequadas a esse efeito, como explorações e investigações, para além dos exercícios e problemas de rotina. Deste modo, permitem-se verdadeiras oportunidades aos alunos de construção de conceitos, de desenvolvimento do raciocínio e da comunicação matemáticos e uma progressão nos modos de representação, o que deve ser feito, tanto quanto possível, com o contributo dos alunos.

Em qualquer tema as tarefas assumem um papel fundamental, mas também é muito importante o trabalho das aulas. Ora, numa aula de cunho exploratório e investigativo os alunos têm de formular estratégias próprias, ao mesmo tempo que mobilizam conhecimentos e capacidades anteriormente desenvolvidas. Assim, a aula dessa natureza estrutura-se usualmente em três fases (Ponte, Matos & Branco, 2009b): (1) apresentação e interpretação da tarefa (em coletivo); (2) desenvolvimento do trabalho autónomo dos alunos (em grupos, pares ou individual); e (3) discussão e síntese final (em coletivo).

As tarefas de natureza exploratória e investigativa (Ponte, 2005) constituem uma mais valia nas aulas de Álgebra por proporcionarem, com um verdadeiro contributo dos alunos, a construção de novos conceitos e o desenvolvimento de outros, bem como os modos de representação, passando progressivamente das representações informais, da linguagem natural ou notações criadas pelos próprios alunos para modos cada vez mais formais de uma forma natural (Ponte et al., 2009a).

Neste tipo de tarefas surgem normalmente da parte dos alunos diversas estratégias que numa exploração inicial se resumem a tentativas que evoluem geralmente para a descoberta de relações e o estabelecimento de generalizações. Ora, na fase de discussão, surgem da parte dos alunos, diversas abordagens à mesma situação proposta, revelando-se uma excelente ocasião para explorar conexões, negociar/desenvolver significados, evoluir em termos de representações, enfim, uma oportunidade por excelência para a construção/desenvolvimento do conhecimento matemático na sala de aula.

Além da tarefa e da estruturação da aula, são extremamente importantes o discurso e os papéis do professor e dos alunos. No que respeita ao discurso, refere-se ao contributo dos alunos e do professor na fase de discussão. Ora, o discurso da sala de aula não deverá ter maior predomínio da parte do professor, mas da parte dos alunos tanto quanto possível, de modo que a sua contribuição seja fortemente valorizada (Ponte et al., 2009b). Em relação aos papéis, ao aluno cabe o papel de trabalhar nas tarefas que lhe são propostas e ao professor o de propor tarefas aos alunos, estabelecer os modos de trabalho e dirigir o discurso na sala de aula. O papel de autoridade matemática, poderá ser exercido, para além do professor e do manual, também pelos alunos na medida em que a sua argumentação e raciocínios podem ser considerados uma fonte válida de conhecimento.

A seguir descrevem-se alguns episódios de uma aula para ilustrar estas ideias, onde o autor desempenhou o papel de observador participante, no âmbito de uma investigação com uma turma do 7.º ano de escolaridade. Considerou-se, como exemplo, a seguinte tarefa abaixo, de natureza exploratória, enquadrada nos objetivos de aprendizagem do programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007).[1]

Esta tarefa está estruturada em questões fechadas e abertas (quando é pedido para justificar ou para generalizar). Nesta como noutras sequências figurativas ou visuais, a professora procurou explorar a sua regra ou lei de formação que consiste em estabelecer uma relação entre a ordem das figuras e o número de elementos que as compõem. Ora, os alunos usam normalmente uma variedade de estratégias para a construção dessa relação em que assenta o padrão. Rivera e Becker (2008) estabeleceram três tipos de estratégias empregues usualmente pelos alunos: (1) *numérica*, que utiliza apenas estímulos estabelecidos a partir do padrão listando uma sequência de números ou usando uma tabela para derivar a regra a partir daí, procurando relações aritméticas entre os valores das variáveis (a ordem e o termo); (2) *figurativa*, que se aplica apenas quando se descreve a generalização do padrão utilizando diagramas, sendo a regra totalmente obtida a partir de indícios visuais estabelecidos diretamente a partir da estrutura dos dados, podendo-se recorrer à

Tarefa

1. A Joana utilizou palitos para construir uma sequência de figura as quatro primeiras figuras.[2]

(a) A tabela seguinte relaciona o número da figura com o seu número de palitos. Completa–a.

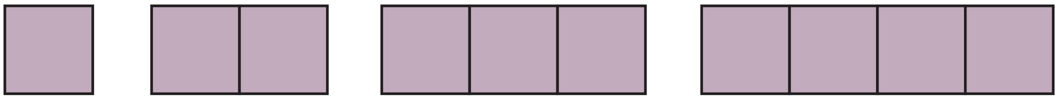

Fig.1 Fig.2 Fig.3 Fig.4

Número da figura	1	2	3	4	5	6	...	50
Número de palitos	4						...	

(b) Quantos palitos são necessários para construir a centésima figura? Explica como chegaste a essa conclusão.

(c) Existe, nesta sequência, alguma figura com 601 palitos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde.

(d) Escreve uma regra que permita determinar o número de palitos de qualquer figura desta sequência. Explica o teu raciocínio.

(e) Escreve uma expressão algébrica que traduza a regra descrita na pergunta anterior.

decomposição das figuras — termos; e (3) uma combinação de ambas as abordagens anteriores (*numérica* e *figurativa*).

Os alunos no seu trabalho autónomo trabalharam em grupos de três. Chegada a fase de discussão, verificou-se que na primeira questão os alunos identificaram uma relação de crescimento de figura para figura começando por verificar que podem obter a figura seguinte acrescentando três palitos à figura anterior. Este processo revela-se adequado em figuras próximas, mas para figuras relativamente distantes como a 50, o processo de se ir acrescentando sucessivamente três palitos à figura anterior não é nada prático. Os alunos verificaram recorrendo a uma estratégia figurativa que o número de palitos dispostos na horizontal corresponde ao dobro da ordem da figura e o número de palitos dispostos na vertical corresponde à soma da ordem da figura com 1. Deste modo, não precisam de desenhar mais figuras da sequência até à figura solicitada para saber o número total de palitos qua a constitui. Assim, conseguem determinar o número de palitos de qualquer figura da sequência sabendo apenas a sua ordem. Algumas respostas evidenciam esta generalização, como o grupo da Ana, Rui e Rute, na alínea d) (*ver* figura 1).

Alguns dos grupos como este, fazem referências às figuras, explicando a generalização encontrada recorrendo à linguagem natural agrupando conjuntos de palitos. Porém, outros grupos verificaram recorrendo a uma estratégia numérica que à sequência se podia associar os múltiplos de 3, com a adição de uma unidade a cada múltiplo, como ajuste de resultado. Diversas respostas refletem esta generalização, como o grupo da Inês, Isa e Luís, na alínea a), na figura distante de ordem 50 (*ver* figura 2).

Por um raciocínio análogo, na alínea b), o grupo da Ana, Rui e Rute recorreu à mesma generalização (*ver* figura 3).

Faz-se o dobro do número da figura para determinar os palitos na horizontal e o número da figura+1 dá-nos o número de palitos na vertical.

Figura 1

somamos três vezes o 50 e juntamos mais 1 porque são os M 3.

Figura 2

100 + 100 + 101 = 301

Figura 3

3 × n + 1

Figura 4

Até aqui verificou-se que os alunos generalizaram recorrendo a modos de representação em linguagem natural e numérica seguindo estratégias ora figurativas ora numéricas. A partir daqui, para a resposta da alínea e), a professora sugere que se use a letra *n* para representar a ordem de uma figura qualquer da sequência, tal como na tarefa da aula anterior tinha sido acordado. Assim, a professora procura, com o contributo do grupo-turma, obter uma expressão algébrica que represente o número de palitos de uma figura de qualquer ordem. Na tarefa da aula anterior já tinham generalizado e construído a respetiva expressão algébrica e por isso já estavam um pouco mais à vontade por não ser a primeira vez.

A professora questiona os alunos sobre como se pode construir uma expressão algébrica que se procura. Sugere-se a análise das respostas dadas às questões das alíneas anteriores na tentativa de serem associadas a uma expressão algébrica. Surgiu a resposta do grupo da Inês, Isa e Luís que se apresenta a seguir em conformidade com o seu raciocínio já evidenciado na alínea a) para a figura 50 (*ver* figura 4).

No caso da resposta do grupo da Ana, Rui e Rute à alínea d) e sendo n o número da figura, surgiu, com a contribuição dos alunos, a expressão $2 \times n + n + 1$. Ora, uma excelente ocasião para se estudar/verificar a equivalência entre estas duas expressões algébricas.

Os alunos chegaram desta forma a uma expressão algébrica que representa o número de palitos que constitui qualquer figura da sequência. Inicialmente, recorrem usualmente nos seus modos de representação da generalização à linguagem natural e numérica, mas de um modo natural, surge uma letra para representar a ordem da figura, como poderia ter surgido outro símbolo qualquer indicado pelos alunos de modo consensual para representar números.

Em jeito de conclusão, refere-se que na fase de discussão e síntese (em coletivo) dos resultados obtidos durante o seu trabalho autónomo (em grupo), proporcionou-se um verdadeiro contributo dos alunos, apresentando-se e discutindo-se as respostas matematicamente significativas e evitando-se naturalmente as ideias repetidas. Verificou-se que os alunos passaram da linguagem corrente e numérica para a linguagem algébrica de um modo natural, embora com alguma dificuldade inerente ao modo de representação, pois começam a interiorizar que uma letra pode representar vários números (ordens das figuras). Esta progressão nos modos de representação implica relacionar diferentes representações e converter a linguagem natural/numérica em linguagem algébrica revelando-se tarefas naturalmente difíceis, pois os alunos estão a iniciar a aprendizagem de diversos conceitos em simultâneo, nomeadamente o de variável e o de relação funcional (relação implícita entre o termo e a respetiva ordem).

Salienta-se que nas aulas de Álgebra como noutros temas, um ensino-aprendizagem exploratório aliado a tarefas adequadas (exploratórias/investigativas) constitui um terreno deveras favorável à construção/desenvolvimento do conhecimento matemático, na medida em que se podem obter discussões verdadeiramente profícuas, onde a contribuição dos alunos seja fortemente valorizada.

A tarefa e os modos de trabalho na sala de aula são extremamente importantes e constituem autênticos desafios para o(a)s professores(as), nomeadamente o de escolher/construir/adaptar tarefas que devem proporcionar aprendizagens matematicamente significativas e ir muito além da aplicação de conceitos e treino de procedimentos, da previsão de extensões matemáticas interessantes a realizar pelos grupos mais rápidos, de controlar os comentários/questões que se oferecem aos alunos para não se indicar qualquer estratégia e de evitar ao máximo adiar para aula seguinte a discussão e/ou síntese dos conhecimentos produzidos pelos alunos.

Além disso, ainda, o professor deve evitar validar as respostas dos alunos durante o seu trabalho autónomo de modo a continuarem motivados para a discussão, acautelar que os alunos registem os conhecimentos coletivamente sistematizados durante a síntese da aula e que decorreram da discussão, promover um ambiente de sala de aula estimulante em que os alunos sejam encorajados a participar ativamente e evitar que a discussão e síntese se transforme simplesmente num desfile de resoluções distintas apresentadas por diferentes alunos, mas que vá muito além disso, com apresentações/discussões apenas matematicamente significativas.

Notas

[1] Para mais detalhes desta aula consultar Pereira (2011).
[2] Tarefa adaptada de Vale e Pimentel (2009).

Bibliografia

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática (tradução portuguesa do original de 2000).

Pereira, M. S. (2011). *Contributo da resolução de problemas de padrão para a aprendizagem da Álgebra no 7º ano de escolaridade*. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga. (Disponível em http://repositorium.sdum.uminho.pt)

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de trabalho de investigação (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Ponte, J., Branco, N. & Matos, A. (2009a). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Ponte, J., Matos, A. & Branco, N. (2009b). *Sequências e Funções*. Lisboa: Ministério da Educação, Direção Geral da Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Rivera, F. D. & Becker, J. R. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *40*(1), 65–82.

Vale, I. & Pimentel, T. (2009). *Padrões no ensino e aprendizagem da Matemática – Propostas Curriculares para o ensino básico*. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Manuel de Sousa Pereira.

Agrupamento de Escolas de Celorico de Basto