Matemática e Música

Nem sempre no mundo as ligações são as mais prováveis. Procurar conexões nem sempre é fácil. Motivar ainda é mais difícil. Mas no mundo nada é impossível.

Para uma turma de Artes, do 11.º ano, a Matemática B é, muitas vezes, a obrigação sem devoção. Por isso, procurámos, no início do ano, acender uma chama de curiosidade e aproveitámos a disponibilidade do Professor Pedro Freitas, da Faculdade de Ciências de Lisboa, que veio à nossa escola proferir uma palestra intitulada Matemática, arte e música. Este foi o mote para propormos aos alunos que realizassem um trabalho de procura e descoberta da matemática numa obra de arte, na natureza, na música e no mundo que nos rodeia.

O trabalho que ora se apresenta é a resposta de um aluno, o José Pedro Fernandes, que, na sequência do estudo das Sucessões, decidiu abordar este tema, estabelecendo conexão com outra área do seu interesse: A música. Confesso que sou leiga nesta matéria, como a maioria dos alunos da turma. O trabalho do José Pedro criou, pois, a oportunidade de aprendermos algo (sou professora mas eterna aluna), respondendo ao objetivo a que nos tínhamos, todos, proposto: a motivação e a transversalidade dos saberes.

O José Pedro, além de frequentar a Escola Secundária Fernando Namora, na Brandoa, frequenta o Instituto Gregoriano de Lisboa, realizando, assim, uma ponte entre os saberes daquele Instituto e os saberes apreendidos na escola. O trabalho, como é habitual, foi apresentado à turma e da avaliação feita pelos colegas e pelo próprio aluno, que foi francamente positiva, se deixam alguns excertos:

A elaboração deste projeto correu, na minha opinião, muito bem e fiquei satisfeito com o produto final. Gostei muito de realizar este trabalho, embora no início ficasse um pouco receoso, visto que não encontrei muita informação sobre o tema. De maneira que tive de utilizar os meus conhecimentos das duas áreas e tentar juntá-los. – José Pedro Fernandes

O trabalho é bastante interessante. O Curso de Artes é para nós, desta forma, algo que serve como chave para abrirmos portas e libertar sentimentos. Espero que este tipo de projeto continue e evolua – Francisco Júnior

Adorei o projeto, embora não percebendo muito de música. Foi original e interessante… – José Diogo Nunes

O trabalho foi coerente: faz todo o sentido elaborarmos trabalhos de aplicação da Matemática a assuntos do nosso interesse, como foi o caso da música para o José Pedro. – Kena Bladel

Achei o trabalho interessante e bem elaborado e como o José Pedro toca violino apresentou o trabalho de forma explícita. – Catarina Homem

Percebi muito bem, não só o domínio musical como também o matemático. O trabalho foi bem construído e explicado. Dou os parabéns ao meu colega – Joana Luís

Nós, com este trabalho, ficamos a entender um pouco de música e melhoramos os conhecimentos sobre sucessões – Inês Cândido

Muito Interessante, simples e principalmente criativo – Rafael Gonçalves, João Madureira, Ana Silva, Lucileida Fonseca e Pedro Carvalho

A professora: Helena Paula Castro

Sucessões e Música

A matemática está inevitavelmente presente no mundo que nos rodeia. Aliás, a matemática, como ciência dos números, surge desde a mais simples planta até à mais complexa obra de engenharia acompanhando-nos por onde quer que passemos. A matemática influencia a nossa maneira de pensar e de ver o mundo.

As artes também são dominadas por esta ciência: os números podem originar combinações artísticas incríveis. Quem diria que um pensamento matemático consegue criar algo de genial, criativo e carregado de emoção? É surpreendente a maneira como a conjugação de números, fórmulas e sequências consegue pintar um quadro magnífico ou compor uma bela melodia. Sucessão de sons organizados segundo uma métrica precisa, a música, contendo, embora, uma dimensão artística, assenta, consciente ou inconscientemente, num conjunto de vibrações baseadas em cálculos geométricos e proporções precisas.

O presente trabalho pretende mostrar, precisamente, como as sucessões matemáticas podem moldar e construir músicas.

Tomemos como base a sucessão mais simples: $u_n = n$ e a cada termo da sucessão fazemos corresponder uma nota musical:

$u_1 = 1$ (Dó)	$u_5 = 5$ (Sol)
$u_2 = 2$ (Ré)	$u_6 = 6$ (Lá)
$u_3 = 3$ (Mi)	$u_7 = 7$ (Si)
$u_4 = 4$ (Fá)	$u_8 = 8$ (Dó agudo)

Sendo assim, coloquemos a sucessão numa pauta (*ver* fig. 1). Constatamos que obtivemos a escala de Dó maior. O mesmo poderia ser feito para todas as outras tonalidades (por exemplo, Ré maior ou Lá menor) e o resultado seria o mesmo: a escala dessa mesma tonalidade.

E se usássemos a sucessão definida por $u_n = 9 - n$, o que iria acontecer?

$u_1 = 9 - 1 = 8$ (Dó agudo)	$u_5 = 9–5 = 4$ (Fá)
$u_2 = 9–2 = 7$ (Si)	$u_6 = 9–6 = 3$ (Mi)
$u_3 = 9–3 = 6$ (Lá)	$u_7 = 9–7 = 2$ (Ré)
$u_4 = 9–4 = 5$ (Sol)	$u_8 = 9–8 = 1$ (Dó)

Obtivemos a mesma escala mas no sentido descendente (*ver* fig. 2).

Através das sucessões podemos ainda construir os acordes desta tonalidade usando a sucessão $u_n = u_{n-1} + 2$ em que a primeira nota do acorde obedece à seguinte ordem: Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si e Dó (ver figs. 3, 4 e 5). No final desta sucessão voltamos ao primeiro acorde, mas numa oitava acima.

Podemos ainda juntar estas duas sucessões (a da escala ascendente e a dos acordes) em duas pautas, em que o baixo faz a escala e o agudo faz os acordes (ver fig. 6).

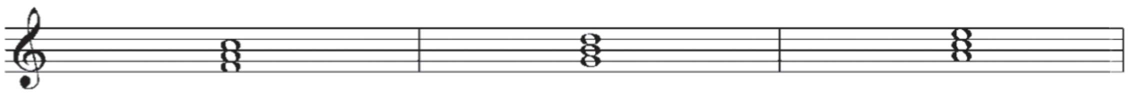
Continuando ainda nas notas musicais, podemos formar uma sucessão sonora utilizando a famosa sucessão de Fibonacci. Iremos ter a situação descrita na Figura 7. E, em Mi maior, na figura 8.

Figura 1

Figura 2

$u_1 = 1$ (Dó)	$u_1 = 2$ (Ré)	$u_1 = 3$ (Mi)
$u_2 = 1 + 2 = 3$ (Mi)	$u_2 = 2 + 2 = 4$ (Fá)	$u_2 = 3 + 2 = 5$ (Sol)
$u_3 = 3 + 2 = 5$ (Sol)	$u_3 = 4 + 2 = 6$ (Lá)	$u_3 = 5 + 2 = 7$ (Si)

Figura 3



$u_1 = 4$ (Fá)
$u_2 = 4 + 2 = 6$ (Lá)
$u_3 = 6 + 2 = 8$ (Dó)

$u_1 = 5$ (Sol)
$u_2 = 5 + 2 = 7$ (Si)
$u_3 = 7 + 2 = 9$ (Ré)

$u_1 = 6$ (Lá)
$u_2 = 6 + 2 = 8$ (Dó)
$u_3 = 8 + 2 = 10$ (Mi)

Figura 4

$u_1 = 7$ (Si)
$u_2 = 7 + 2 = 9$ (Ré)
$u_3 = 9 + 2 = 11$ (Fá)

$u_1 = 8$ (Dó)
$u_2 = 8 + 2 = 10$ (Mi)
$u_3 = 10 + 2 = 12$ (Sol)

Figura 5

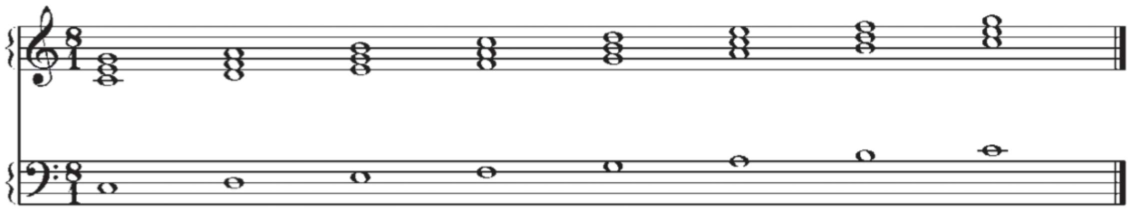
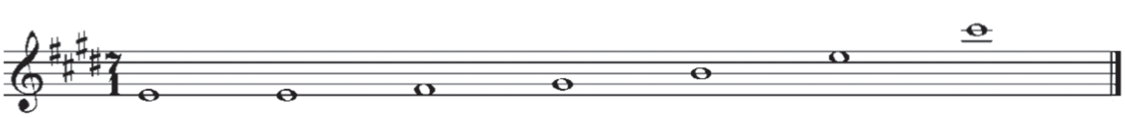


Figura 6

$u_1 = 1$ (Dó)
$u_2 = 1$ (Dó)
$u_3 = 2$ (Ré)
$u_4 = 3$ (Mi)
$u_5 = 5$ (Sol)
$u_6 = 8$ (Dó)
$u_7 = 13$ (Lá)

Figura 7



$u_1 = 1$ (Mi)
$u_2 = 1$ (Mi)
$u_3 = 2$ (Fá#)
$u_4 = 3$ (Sol#)
$u_5 = 5$ (Si)
$u_6 = 8$ (Mi)
$u_7 = 13$ (Dó#)

Figura 8

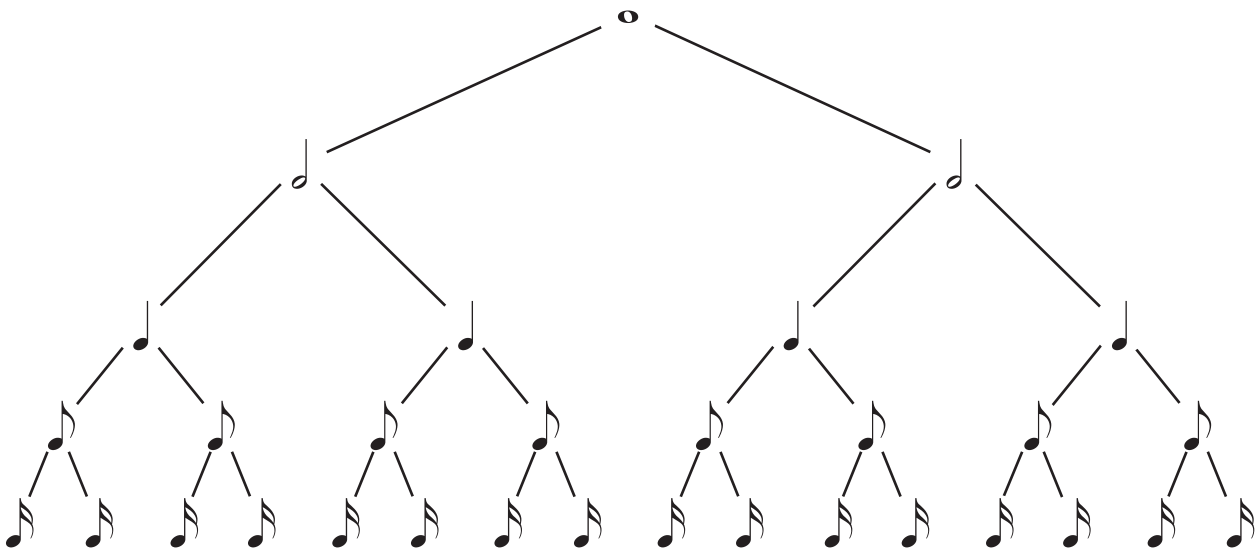
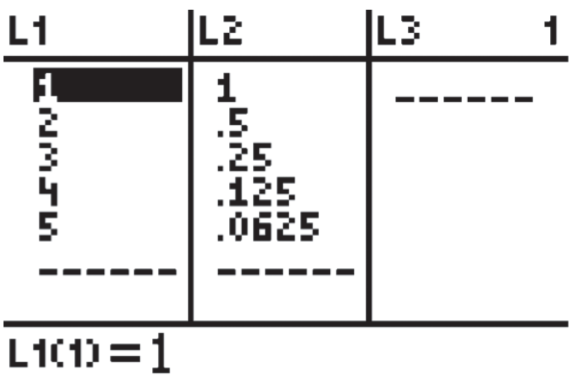


Figura 9

No que toca à parte rítmica, a sucessão vai ser diferente das que foram usadas até agora. Observemos a Figura 9. Uma *semibreve* (𝅝) tem a duração de 4 tempos; assim a *mínima* (𝅗𝅥) vale 2 tempos — o que corresponde a 1/2 da semibreve; segue-se então a *semínima* (♩) que vale 1 tempo — o que corresponde a 1/4 da semibreve; a seguir surge a *colcheia* (♪) que é metade de uma semínima — o que corresponde a 1/8 da semibreve; depois, a *semicolcheia* (𝅘𝅥𝅯) que é metade da colcheia — o que corresponde a 1/16 da semibreve. Sendo assim, temos a seguinte sucessão:

$$u_1 = 1,\ u_2 = 1/2,\ u_3 = 1/4,\ u_4 = 1/8,\ u_5 = 1/16.$$

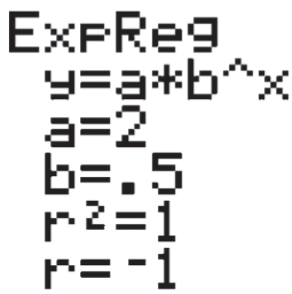
Facilmente verificamos que a duração das notas diminui muito depressa. Portanto vamos ter que determinar o termo geral



desta progressão geométrica. Para tal, utilizaremos a calculadora gráfica.

1. Inserir os dados nas listas da calculadora.
2. Pressionar a tecla STAT, escolher o menu CALC e a opção 0: ExpReg. Depois, escrever L_1, L_2, Y_1 e fazer ENTER.

Para concluir, o termo geral que dá origem à sucessão das durações rítmicas é $u_n = 2 \times (0.5)^n$.



Ainda subsistem dúvidas de que a matemática é a base de toda a vida na terra? Tudo tem, ou teve, origem na matemática, e é isto que a torna tão perfeita, ao mesmo tempo que a torna uma linguagem precisa e inequívoca. (Teríamos que chegar a qualquer coisa como a música é, também ela, uma linguagem universal, subjectiva e plurívoca. Mas, sujeita às leis da matemática, a ciência que dá origem a todas as sucessões de sons possíveis.)

Concluímos que a música está também sujeita às leis da matemática. É esta que dá origem a todas as sucessões de sons possíveis.

José Pedro Fernandes