Soma dos ângulos de um polígono

José Tinoco

Todos, ou quase todos, sabem que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° (um ângulo raso ou dois ângulos retos). Este é um dos resultados centrais da geometria euclidiana. Esta propriedade é uma das poucas que a maioria dos alunos nunca se esquece, embora, por vezes, quando é necessário recorrer a ela, nem todos se lembram que é um conhecimento prévio que devem mobilizar. A partir deste resultado facilmente se deduz a fórmula $(n-2) \times 180°$, que permite determinar a soma das amplitudes dos ângulos internos de qualquer polígono simples com n lados, convexo ou não convexo, assim como a conclusão de que a soma dos ângulos externos é igual a 360° (ou dois ângulos rasos).

O principal problema surge quando se pergunta aos alunos como é que sabiam isso ou se sabem demonstrar porque é que a soma dos três ângulos internos do triângulo é igual a 180°. A maioria não sabe ou apenas acrescenta que o professor anterior lhes tinha dito. Estamos perante mais uma abstração da matemática, que pode parecer bastante intuitiva mas que, talvez, não tenha sido trabalhada da melhor forma das primeiras vezes que foi abordada.

Como qualquer abstração matemática, convém começar por alguns casos concretos e só depois generalizá-la a todos os triângulos, até porque este assunto começa a ser abordado no 6.° ano de escolaridade e os alunos ainda não estão familiarizados com demonstrações matemáticas. Constitui mesmo uma das primeiras demonstrações formais que os alunos realizam no Ensino Básico.

Soma dos ângulos internos de um triângulo

Uma forma muito intuitiva de chegar a este resultado, começando com dados concretos e manipuláveis, tal como aparece em muitos manuais, consiste em recorrer a um triângulo de papel ou de cartolina. Pede-se aos alunos, como trabalho de casa, para construírem um triângulo com medidas à sua escolha (de preferência grandes), para que cada aluno tenha um triângulo diferente (isto é importante). O professor também deve ter o seu triângulo para explicar e mostrar a toda a turma os procedimentos a efetuarem. Atualmente, recorrendo aos Ambientes de Geometria Dinâmica, também é muito simples construir provas informais deste resultado.

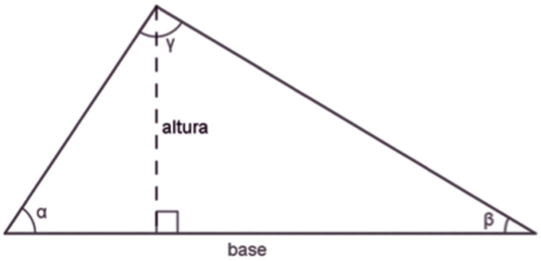

Figura 1

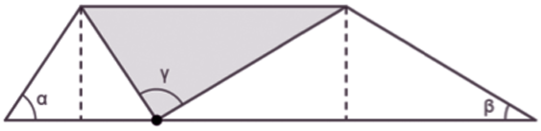

Figura 2

No triângulo de papel, começa-se por identificar a base (que, neste caso, deve ser o lado maior) e a correspondente altura do triângulo, assim como os três ângulos, como mostra a figura 1.

Como a altura tem de ser perpendicular à base, pode ser obtida através da dobra que passa pelo vértice oposto quando as duas *arestas da base* coincidem.

De seguida faz-se uma dobra do triângulo, a meio da altura, de modo que o vértice oposto coincida com o pé da altura (*ver* figura 2).

Depois fazem-se novas dobragens, perpendiculares à anterior, de forma que os três vértices do triângulo coincidam nesse mesmo ponto (*ver* figura 3).

Finalmente, obtém-se qualquer coisa parecida com um retângulo, ou melhor, o triângulo inicial ficou dobrado em dois retângulos sobrepostos. Mais importante do que isso, vemos que os três ângulos formam um ângulo raso. Desdobrando o modelo vemos que esse ângulo raso não é mais do que a junção (sem sobreposições) dos três ângulos internos do triângulo. Portanto, chegamos à conjetura: os três ângulos internos do triângulo formam um ângulo raso.

O facto importante de cada aluno ter um triângulo diferente conduz à ideia de que aquele resultado não é apenas válido para o seu triângulo e para o do professor, mas também para todos os triângulos dos colegas. Começam assim a fazer a abstração daquele resultado padrão a muitos outros triângulos.

A demonstração formal, embora dependendo do tipo de alunos a que se destina, pode ser introduzida com alguns casos particulares. Um bom exemplo é o triângulo retângulo (fig. 4)

Podemos dobrar o triângulo retângulo, fazendo coincidir os vértices dos dois ângulos agudos com o vértice do ângulo reto. Deste modo mostra-se que os dois ângulos agudos são complementares e, portanto, os três ângulos formam dois retos ou 180º (*ver* fig. 5).

Para demonstrar este caso particular com papel e lápis basta reconstruir o retângulo, traçando, pelos vértices dos ângulos agudos, paralelas aos lados que formam o ângulo reto (fig. 6).

Como $\angle\beta \equiv \angle\theta$, pois trata-se de ângulos alternos internos ($\equiv$ representa «congruente» ou «geometricamente igual»), então $\angle\beta + \angle\gamma = \angle\theta + \angle\gamma = 90^\circ$. Adicionando o ângulo reto obtemos 180°, isto é, $\angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma = 180^\circ$.

A partir deste caso particular, facilmente se demonstra o caso geral. Considerando um triângulo qualquer, a altura em relação ao lado maior ‹cai› sempre sobre esse lado. Portanto, a altura decompõe o triângulo dado (figura seguinte) em dois triângulos retângulos.

Já sabemos que,

$$\angle\alpha + \angle\delta + 90^\circ = 180^\circ \text{ e } \angle\beta + \angle\theta + 90^\circ = 180^\circ.$$

Assim, juntando os seis ângulos temos

$$\angle\alpha + \angle\delta + 90^\circ + \angle\beta + \angle\theta + 90^\circ = 360^\circ,$$

isto é, dois ângulos rasos. Eliminando os dois ângulos retos, que juntos valem 180°, em cada membro da igualdade anterior, obtemos $\angle\alpha + \angle\delta + \angle\beta + \angle\theta = 180^\circ$. Mas temos $\angle\delta + \angle\theta = \angle\gamma$, portanto $\angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma = 180^\circ$ (*ver* fig. 7).

Outra possível demonstração da proposição 32 do livro I dos Elementos, consiste em traçar por um dos vértices, uma reta r paralela ao lado oposto (fig. 8).

Agora sabemos que $\angle\beta \equiv \angle\theta$ e $\angle\alpha \equiv \angle\delta$, pois são ângulos alternos internos. Como vemos na figura (*ver* fig 8), $\angle\delta + \angle\theta + \angle\gamma = 180^\circ$,

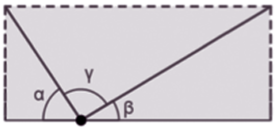

Figura 3

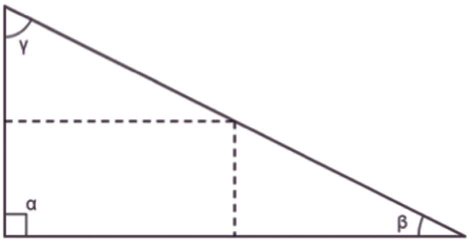

Figura 4

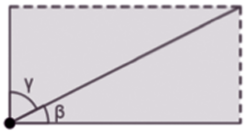

Figura 5

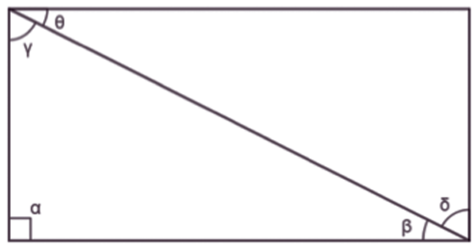

Figura 6

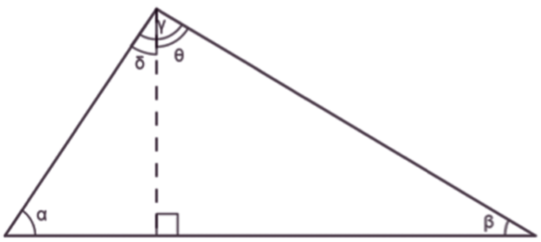

Figura 7

pois formam um ângulo raso. Atendendo às duas identidades anteriores facilmente se conclui que $\angle\alpha + \angle\gamma + \angle\beta = 180°$.

Esta prova constitui um padrão facilmente generalizado a qualquer triângulo, independentemente da sua forma e do vértice escolhido para traçar a paralela ao lado oposto. Trata-se também de uma das demonstrações mais curtas e mais elegantes que existem na geometria euclidiana, sendo facilmente compreensível por qualquer pessoa, até porque não recorre a grandes conhecimentos prévios.

Soma dos ângulos externos de um triângulo

Geralmente não nos preocupamos muito com os ângulos externos de um polígono, talvez devido ao facto de não fazerem parte do polígono (geralmente consideramos o polígono como a área limitada pela linha poligonal). Num polígono, a qualquer ângulo interno está sempre associado um ângulo externo que lhe é adjacente. A própria definição de ângulo externo de um polígono causa alguma confusão nos alunos, pois julgam que o ângulo externo é o ângulo replementar do interno que lhe é adjacente, isto é, associam o ângulo externo ao ângulo exterior que tem os mesmos lados do interno.

Define-se *ângulo externo* como sendo o suplementar do ângulo interno que lhe é adjacente. Desta definição resulta que o ângulo externo é sempre inferior a 180°, pois o ângulo interno é sempre positivo (à frente veremos que o ângulo externo até pode ser negativo). Alguns alunos não aceitam facilmente esta definição e, neste caso, é importante referir que o ângulo externo corresponde à mudança de direção que temos de efetuar em cada vértice ao percorrer os lados do triângulo, como mostram as setas da figura seguinte. Outra razão que podemos invocar é a necessidade que os matemáticos sentem de criarem definições que proporcionem propriedades interessantes e conexões entre os vários elementos que relacionam, contribuindo também para a simplificação dos cálculos, como veremos de seguida (fig.9).

Que relação existe entre o ângulo externo e os ângulos internos? Como vemos, o ângulo externo é determinado por um lado do triângulo e pelo prolongamento do lado adjacente. Como o ângulo externo é suplementar do interno adjacente, então $\angle\alpha + \angle\theta = 180°$. Já sabemos que a soma dos ângulos internos é igual a 180°, isto é, $\angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma = 180°$. Comparando as duas igualdades anteriores concluímos que

$$\angle\alpha + \angle\theta = \angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma.$$

Eliminando $\angle\alpha$ em ambos os membros desta igualdade resulta que $\angle\theta = \angle\beta + \angle\gamma$.

Da mesma forma se conclui que $\angle\delta = \angle\alpha + \angle\gamma$ e que $\angle\varepsilon = \angle\alpha + \angle\beta$. Portanto, a amplitude de qualquer ângulo externo do triângulo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes.

A proposição I.32 dos *Elementos* de Euclides mostra também outra forma, ainda mais simples, de demonstrar este resultado. Se a partir de qualquer vértice do triângulo traçarmos uma paralela ao lado oposto, o ângulo externo nesse vértice fica dividido em duas partes, como mostra a figura 10.

Sabemos que $\angle\beta \equiv \angle\eta$, por serem ângulos alternos internos, e que $\angle\alpha \equiv \angle\lambda$, por serem ângulos correspondentes. Portanto, $\angle\eta + \angle\lambda = \angle\alpha + \angle\beta$. Como $\angle\eta + \angle\lambda$ forma o ângulo externo adjacente a $\angle\gamma$, concluímos que a amplitude do ângulo externo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes.

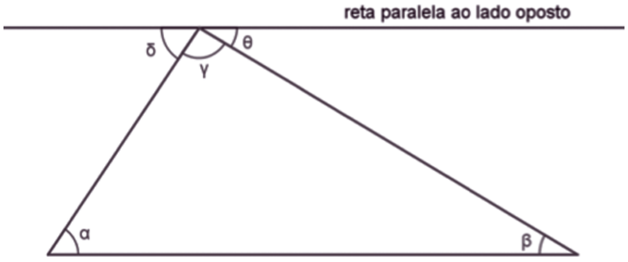

Figura 8

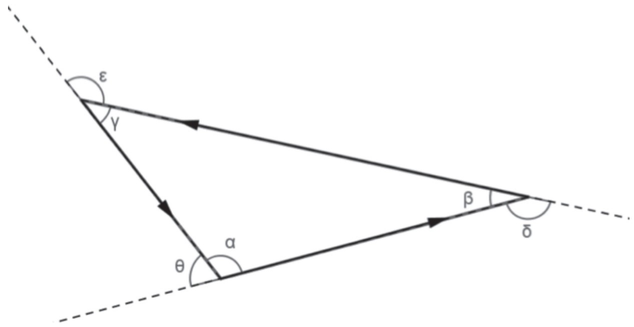

Figura 9

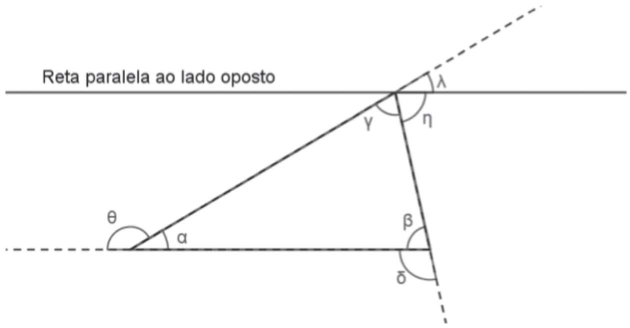

Figura 10

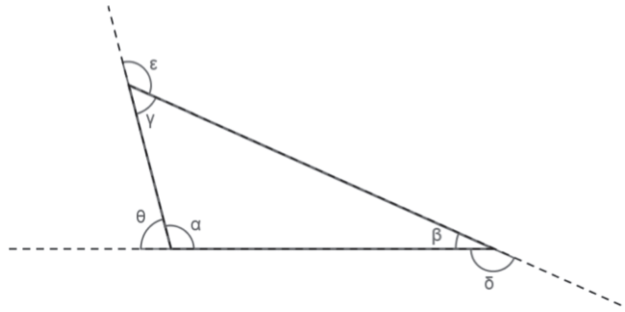

Figura 11

Da figura 10, tal como provou Euclides, também se pode concluir que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°, pois $\angle\alpha + \angle\beta + \angle\gamma = \angle\lambda + \angle\eta + \angle\gamma = 180^\circ$.

Determinar a soma das amplitudes dos ângulos externos de um triângulo constitui agora uma tarefa relativamente simples, que serve para testar o poder de argumentação, a capacidade de raciocínio e a comunicação matemática, para além de constituir uma pequena demonstração que os alunos podem fazer sozinhos.

Vejamos a elegância da resposta de uma aluna: «Como os seis ângulos do triângulo (internos e externos) formam três ângulos rasos e os três ângulos internos formam um ângulo raso, então os três ângulos externos formam dois rasos, isto é, $2 \times 180^\circ = 360^\circ$.» Até parece fácil! De facto, este raciocínio mostra que a matemática torna-se simples e fácil quando as ideias são estruturadas e encadeadas de forma curta.

No entanto, não podemos criar a ilusão de que este raciocínio é igualmente acessível a todos. Há alunos que não conseguem provar que a soma dos ângulos externos de um triângulo é igual a dois ângulos rasos (ou um giro). Para os que não possuem tanto poder de síntese aqui fica outro raciocínio correto, embora um pouco mais elaborado.

Como cada ângulo externo é igual à soma dos internos não adjacentes, então, de acordo com a figura 11, podemos escrever:

$\angle\theta = \angle\beta + \angle\gamma$;
$\angle\delta = \angle\alpha + \angle\gamma$;
$\angle\varepsilon = \angle\alpha + \angle\beta$.

Adicionando, membro a membro, as igualdades anteriores, vemos que estamos a juntar os ângulos internos do triângulo duas vezes, ou seja,

$$\begin{aligned}\angle\theta + \angle\delta + \angle\varepsilon &= (\angle\beta + \angle\gamma) + (\angle\alpha + \angle\gamma) + (\angle\alpha + \angle\beta)\\ &= \angle\beta + \angle\gamma + \angle\alpha + \angle\gamma + \angle\alpha + \angle\beta\\ &= (\angle\beta + \angle\gamma + \angle\alpha) + (\angle\gamma + \angle\alpha + \angle\beta)\\ &= 180^\circ + 180^\circ.\\ &= 360^\circ.\end{aligned}$$

Soma dos ângulos de um polígono convexo

Recordemos que um polígono diz-se convexo se qualquer diagonal desse polígono está inteiramente contida na região por ele limitada, isto é, no seu interior. Caso contrário o polígono é não convexo ou *côncavo*. Chama-se *diagonal* de um polígono a todo o segmento de reta que une dois vértices não consecutivos do polígono. Como podemos ver pelas figuras seguintes, um polígono côncavo tem ângulos internos com amplitude superior a 180°, ou, de outra forma, tem vértices ‹reentrantes› (fig. 12).

Para deduzir a fórmula geral da soma dos ângulos internos de um polígono convexo comecemos, igualmente, por alguns casos particulares. Por exemplo, sabemos que qualquer quadrilátero pode ser decomposto em dois triângulos, traçando uma das suas diagonais. Daqui facilmente se conclui que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é $2 \times 180^\circ = 360^\circ$.

E qual será a soma dos ângulos externos? Podemos seguir o raciocínio usado no caso do triângulo. Agora temos quatro ângulos rasos, formados pelos quatro internos e pelos quatro

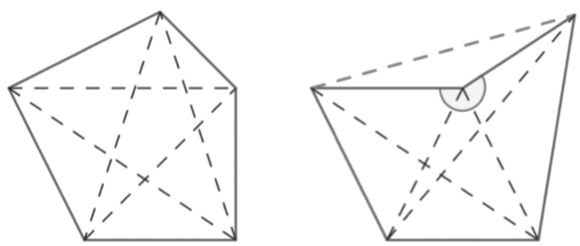

Figura 12

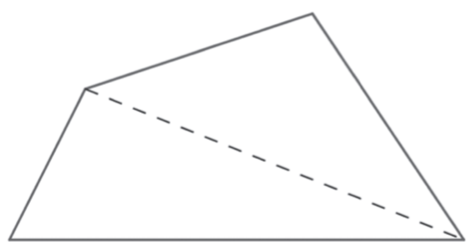

Figura 13

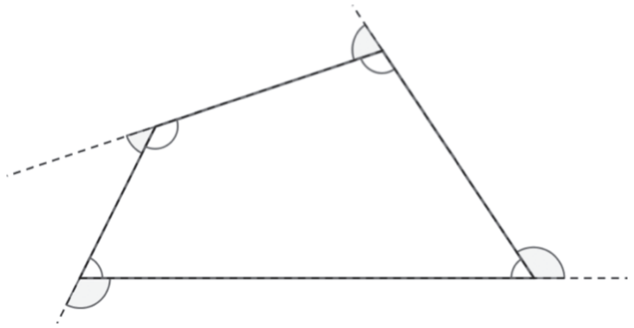
Figura 14

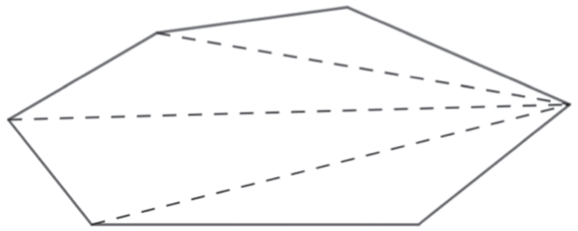
Figura 15

externos, que no total perfazem $4 \times 180° = 720°$. Como acabamos de ver que os quatro ângulos internos valem 360° então os quatro ângulos externos valem $720° - 360° = 360°$ (fig.14).

Tal como no triângulo, a soma dos ângulos externos continua a ser 360°. Será que este padrão se mantém para todos os polígonos convexos? Vejamos mais um exemplo. O hexágono da figura 15 pode ser decomposto em quatro triângulos, usando as diagonais que partem do mesmo vértice.

Assim, a soma dos ângulos internos do hexágono é igual a $4 \times 180° = 720°$. E qual é a soma dos ângulos externos? Agora temos seis ângulos rasos, formados pelos seis internos e pelos seis externos, que no total perfazem $6 \times 180° = 1080°$. Como vimos que os seis ângulos internos valem 720° então os quatro externos valem $1080° - 720° = 360°$.

Estamos perante um belo padrão. Podemos conjeturar que soma dos ângulos externos de um polígono convexo é igual a 360°. Tentemos o caso geral para provar a nossa conjetura. Dos exemplos anteriores, resulta que qualquer polígono convexo com n lados pode ser decomposto em $n - 2$ triângulos.[1] Portanto, a soma dos ângulos internos de um polígono convexo é dada por $(n - 2) \times 180°$, em que n representa o número de lados. Para obter a soma dos ângulos externos só temos de somar todos os ângulos do polígono e subtrair os internos, como fizemos nos casos particulares. Num polígono com n lados, somando os ângulos internos com os externos obtemos n ângulos rasos, isto é, a soma de todos os seus ângulos é dada por $n \times 180°$. Subtraindo os ângulos internos obtemos,

$$n \times 180° - (n - 2) \times 180° = 360°.$$

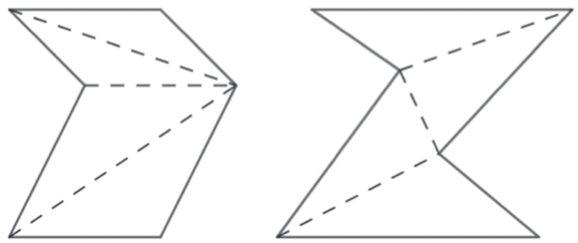
Figura 16

Afinal, não só temos uma curta prova mas também um belo padrão!

Soma dos ângulos de um polígono côncavo

Será que esta regularidade se mantém para os polígonos côncavos? Os programas de Matemática excluem sempre os polígonos côncavos. Haverá alguma razão de força maior para que isso aconteça? O facto de apresentarem um ou mais vértices «reentrantes» não causa assim tanta confusão como à partida se poderia pensar. Verificar se os padrões dos polígonos convexos se aplicam aos polígonos não convexos pode ser um bom desafio para colocar aos alunos mais empenhados.

Tal como procedemos para os polígonos convexos, podemos dividir um polígono côncavo em $n - 2$ triângulos[2], traçando $n - 3$ diagonais que não se intersetam. Agora há uma pequena diferença. As diagonais que dividem o polígono podem não partir todas do mesmo vértice. A seguir encontram-se dois hexágonos não convexos: o da esquerda pode ser decomposto em quatro triângulos traçando três diagonais que partem do mesmo vértice; o da direita também se decompõe em quatro triângulos mas agora isso não é possível com diagonais que partem do mesmo vértice.

Como podemos ver, a soma dos ângulos internos destes dois hexágonos continua a ser $4 \times 180° = 720°$. Portanto, como um polígono com n lados se pode decompor em $n - 2$ triângulos, a soma dos seus ângulos internos é igual a $(n - 2) \times 180°$.

Será que a soma dos ângulos externos continua a valer 360°? Se o polígono é não convexo então possui vértices reentrantes ou ângulos internos superiores a 180°. Recorde-se que o ângulo externo é formado por um lado do polígono e pelo prolongamento do lado adjacente Observando mais detalhadamente o que acontece nos vértices reentrantes (figura seguinte), vemos que existe uma mudança de orientação dos ângulos externos nesses vértices quando se percorre o polígono na direção indicada pela seta. Da definição, sabemos que cada ângulo externo é o suplementar do interno adjacente. De facto, para que isto aconteça nos vértices reentrantes a amplitude dos ângulos externos tem de ser negativa, pois os ângulos internos têm amplitude superior a 180°. É precisamente este o significado da mudança de orientação ocorrida nos ângulos externos.

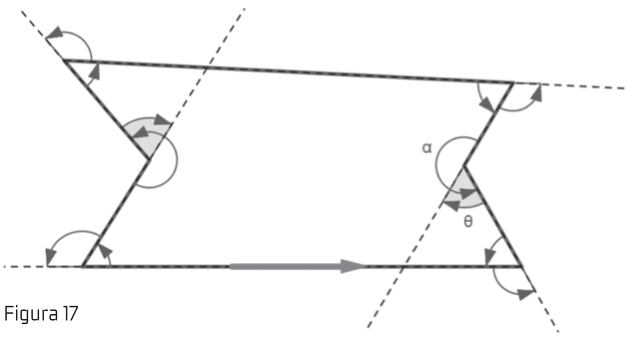

Figura 17

Vejamos: $\angle\alpha + \angle\theta = 180^\circ$, como sugere a figura; portanto, $\angle\alpha = 180^\circ - \angle\theta$; mas como $\angle\alpha > 180^\circ$ temos $\angle\theta = \angle\alpha - 180^\circ < 0$, isto é, o ângulo externo tem amplitude negativa.

Assim, no total, num polígono com n lados continuamos a ter n ângulos rasos. Sendo E a soma dos ângulos externos de um polígono com n lados e $(n-2) \times 180^\circ$ a soma dos seus ângulos internos, temos $E + (n-2) \times 180^\circ = n \times 180^\circ$. Resolvendo em ordem a E obtemos $E = n \times 180^\circ - n \times 180^\circ + 2 \times 180^\circ = 360^\circ$.

Portanto, a soma dos ângulos externos continua a ser 360°. Que bela surpresa! Afinal o padrão mantém-se para os polígonos côncavos.

Parece uma contradição o ângulo externo ter amplitude negativa, mas não será menos contradição o ângulo externo estar no interior do polígono. Portanto, faz todo o sentido, que a amplitude desse ângulo seja negativa. Trata-se de uma consequência da definição de ângulo externo. Precisamente, como atrás dissemos, uma definição que proporciona um belo padrão.

Notas

[1] Prova-se que qualquer polígono (convexo ou não) de n lados pode ser decomposto em $n-2$ triângulos adjacentes, através de $n-3$ diagonais que não se intersetam. Uma demonstração deste resultado pode ser vista no livro de Elon Lages Lima, publicado pela Gradiva na coleção Temas de Matemática.

[2] Uma demonstração deste resultado pode ser vista no livro de Elon L. Lima ou no livro de David Hilbert, publicado pela Gradiva na coleção Trajetos Ciência.

Bibliografia:

Lima, E. Lages. *Matemática e Ensino*, Gradiva, 2004.

Hilbert, David. *Fundamentos da Geometria*, Gradiva, 3003.

Ponte, J. Pedro, et al. *Programa de Matemática do Ensino Básico*, ME-DGIDC, 2007.

http://alepho.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

José Tinoco

Escola EB 2,3/S de Arcos de Valdevez