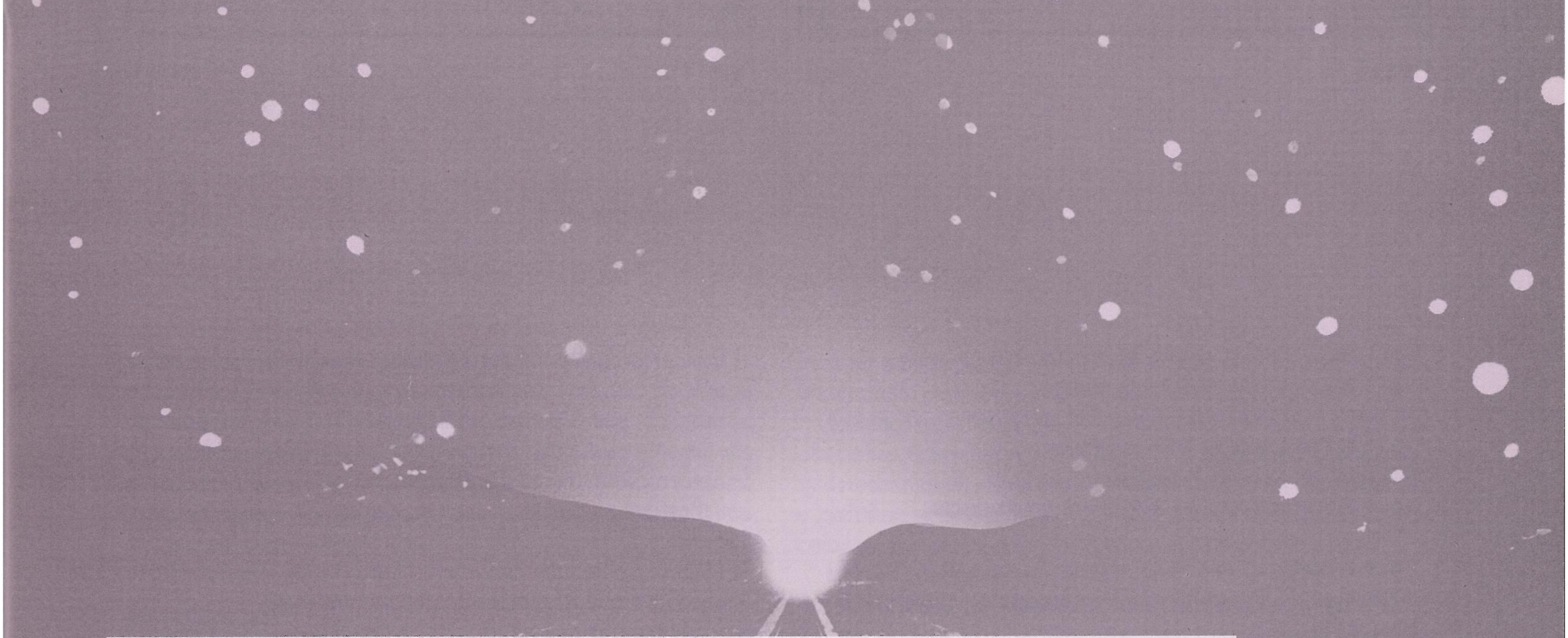
Encontros imediatos de terceiro grau

José Paulo Viana

Encontro Imediato do 3° grau – Avistamento de um «ser extraterrestre» associado a um Objeto Voador Não Identificado.

«Encontros Imediatos do Terceiro Grau» (Close Encounters of the Third Kind) – filme realizado em 1977 por Steven Spielberg



Há uns tempos encontrámos na revista *Mathematics Teacher* um problema curioso que, com a ajuda da tecnologia gráfica, se transformou numa investigação bem interessante, cheia de extensões e prolongamentos.

Investigação 1

Consideremos uma função cúbica com três zeros. Seja *P* um ponto do gráfico cuja abcissa é a média de dois dos zeros. Tracemos a tangente à curva no ponto *P*. Onde é que esta tangente interseta o eixo horizontal?

Este era o problema proposto inicialmente, que vamos resolver usando uma unidade portátil TI-Nspire.

Escolhemos arbitrariamente uma função de 3.° grau, com três zeros. Uma maneira rápida de o fazer é escrevê-la decomposta em fatores. Por exemplo, com zeros 2, 4 e 7:

$$f(x) = (x-2)(x-4)(x-7).$$

Escolhemos dois zeros (por exemplo, 2 e 4), construímos os respetivos pontos (fig. 1).

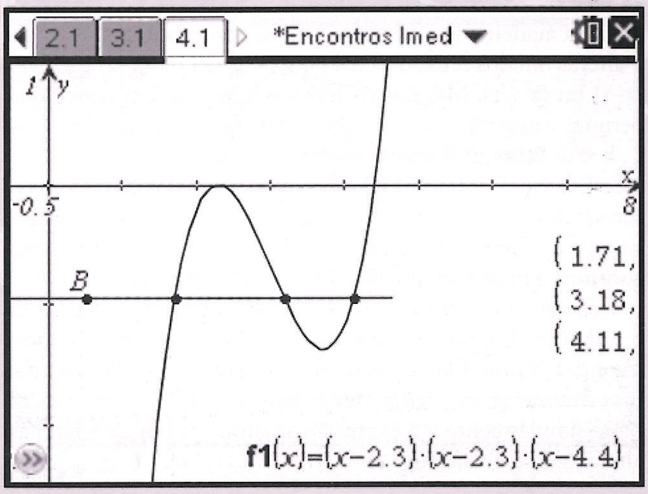


Figura 1

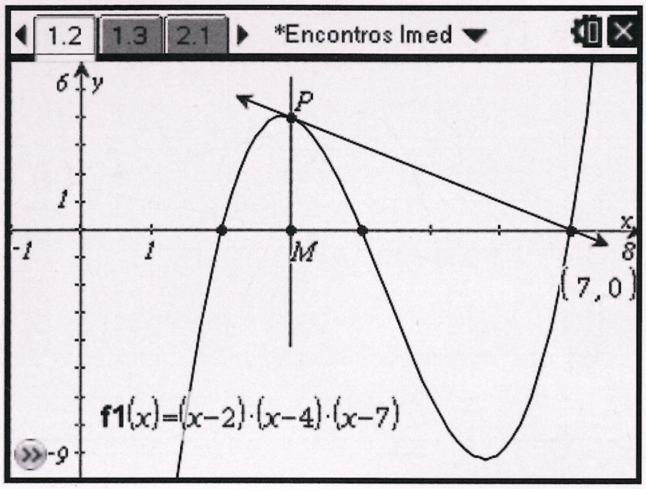


Figura 2

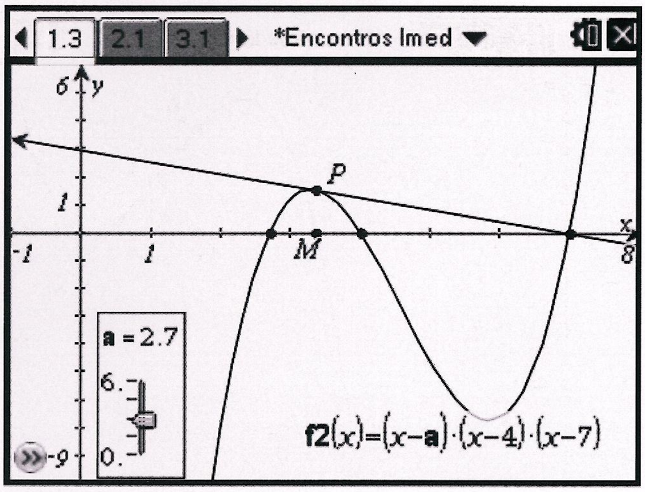


Figura 3

Para fazer o ponto médio M dos dois zeros, vamos a

b → A: Construção → 5: Ponto médio.

Depois, traçamos a linha vertical que passa em M indo a

b → A: Construção → 1: Perpendicular.

Para obter o ponto P, pedimos

b → 7: Pontos e retas → 3: Ponto[s] de interseção.

Para traçar a tangente, fazemos

b → 7: Pontos e retas → 7: Tangente.

Finalmente, determinamos a interseção da tangente com o eixo Ox em

b → 7: Pontos e retas → 3: Ponto[s] de interseção

e vemos as coordenadas deste ponto fazendo

b → 1: Ações → 7: Coordenadas e equações.

Surpresa: a tangente corta o eixo horizontal precisamente no terceiro zero (fig. 2).

Mas não terá sido um acaso? Será sempre assim? Temos de o confirmar.

Uma maneira de o fazer é ir à expressão analítica da função e alterar um dos zeros. Por exemplo, em vez de $(x–2)$ escrever $(x–1)$ ou $(x + 1)$. Mas é mais interessante criar um cursor que permita variar rapidamente um zero da função. Para isso,

b → 1: Ações → A: Inserir seletor,

escolhemos a para nome da variável e, na expressão da função, substituímos um dos zeros por a. Agora, deslocando o cursor, variamos o zero para qualquer valor desejado. E a tangente continua a passar sempre pelo terceiro zero (fig. 3)!

Podemos ainda fazer mais experiências. Por exemplo, M ser o ponto médio, não de dois zeros consecutivos, mas dos dois zeros das pontas. Ou, a função ter um zero duplo. Não precisamos de criar nova página, novas funções e novas construções. Basta simplesmente ir à expressão analítica da função e fazer as alterações desejadas (fig. 4).

Este problema pode ser proposto aos alunos do 11.° ano. Depois de eles terem descoberto esta propriedade das funções cúbicas, chegou o momento de lhes propor que demonstrem que isto é realmente verdade para uma cúbica qualquer. A demonstração não é difícil. E, reparem, para os alunos, aquilo que lhes pedimos passa a ter um significado completamente diferente, visto terem passado já pela fase da experimentação e de elaboração de uma conjetura. Desta forma, a demonstrção aparece na sequência lógica do que fizeram antes.

No caso geral, para a função $f(x) = a(x–b)(x–c)(x–d)$, é preciso trabalhar com quatro parâmetros, o que, para alguns alunos, se torna bastante complicado. A alternativa é sugerir que cada aluno escolha uma função com zeros inteiros e faça a demonstração desse caso particular. Depois, para casa, pedir que os mais interessados a façam para o caso geral.

Continuemos. Quando dispomos de uma tecnologia tão rica e tão potente como a atual, é fácil (e dá vontade) ir mais longe e colocarmos novos problemas.

Investigação 2

Que acontecerá agora se tivermos uma reta horizontal que intersete a cúbica em três pontos? A tangente à cúbica no ponto cuja abcissa é a média das abcissas de dois dos pontos de interseção irá passar no terceiro ponto?

Escolhemos uma função cúbica qualquer, colocamos um ponto B no plano (pode ser no eixo Oy ou fora dele), pedimos a reta horizontal que passa em B, determinamos as três interseções desta reta com a curva, construímos o ponto médio de dois dos pontos anteriores e depois traçamos a tangente à curva no ponto com essa abcissa.

A tangente passa no terceiro ponto (fig. 5)!

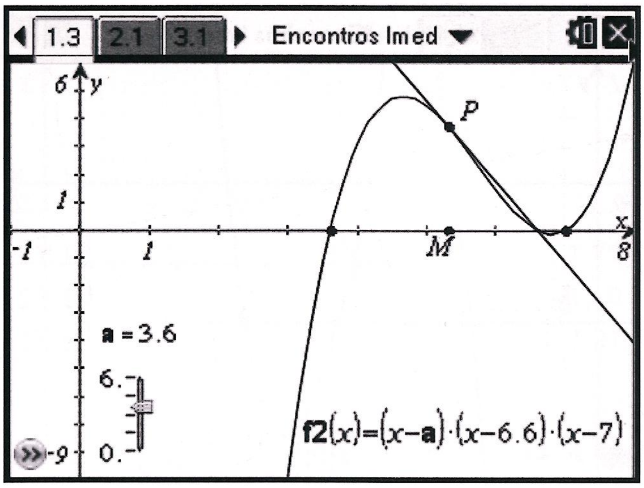


Figura 4

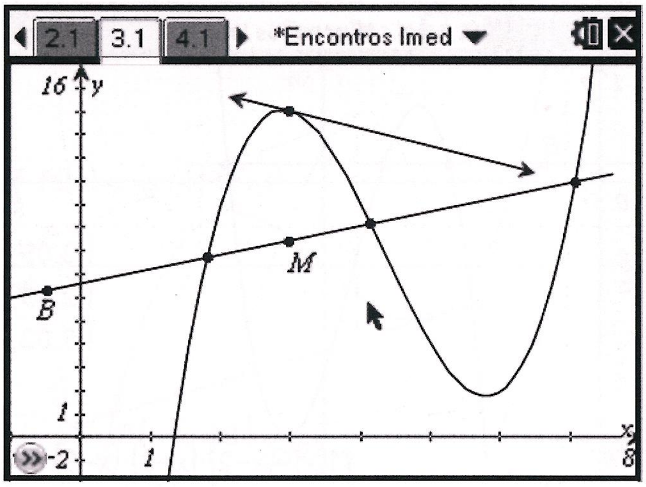


Figura 5

Bem, se tivéssemos raciocinado um pouco antes de começarmos as experiências teríamos concluído que isto iria acontecer de certeza. É que esta situação é idêntica à da primeira investigação, havendo apenas uma translação vertical (correspondente à ordenada do ponto B).

Agora não podemos parar. Pondo a imaginação a trabalhar, surgem novas questões.

Investigação 3

E se a reta for oblíqua?

Para criar a reta, vamos a

b → 7: Pontos e retas → 4: Reta.

Clicamos num sítio livre qualquer do plano e aparece um ponto (a que chamaremos B). Afastamo-nos de B, damos um clique e fazemos **d**. Aparece uma reta dependente apenas de B. Depois fazem-se as restantes construções, tal como no problema 2.

A reta pode ser alterada de duas maneiras: agarrando e deslocando o ponto B (mantém-se o declive) ou agarrando a reta longe de B e deslocando o cursor (altera-se o declive [fig. 6]).

Posso garantir-vos que foi grande a surpresa quando fiz esta experiência. A propriedade anterior mantêm-se: a tangente vai passar no terceiro ponto de interseção!

Começamos a perceber que a função cúbica tem mais propriedades curiosas do que imaginaríamos. Temos de continuar.

Investigação 4

Seja uma função cúbica com três zeros e uma reta horizontal que interseta o seu gráfico em três pontos. Que relação existe entre as abcissas destes três pontos?

Para ser mais fácil descobrir o que se procura, convém escolher uma função com zeros inteiros, por exemplo, 2, 3 e 5.

Fazemos o gráfico da função numa janela adequada, criamos um ponto B no plano, traçamos a reta horizontal a passar em B, determinamos os pontos de interseção da reta com a cúbica e pedimos as coordenadas dos três pontos obtidos, para isto, colocamos o cursor sobre um ponto e clicamos

b → 7: Coordenadas e Equações.

Para melhor analisarmos as abcissas dos pontos, o melhor é arrastar as coordenadas para uma zona livre da janela, ficando

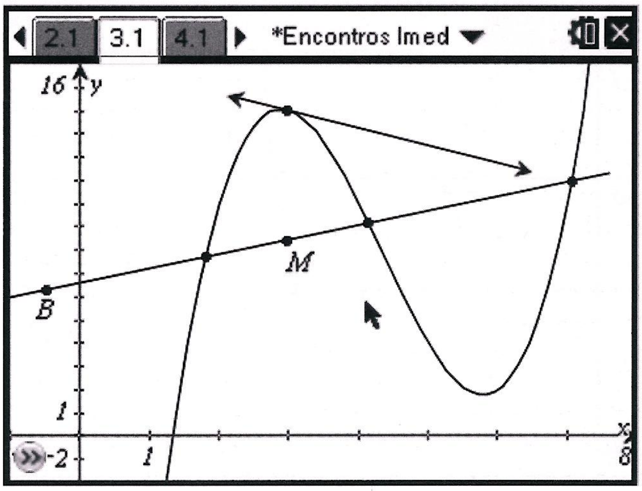


Figura 6

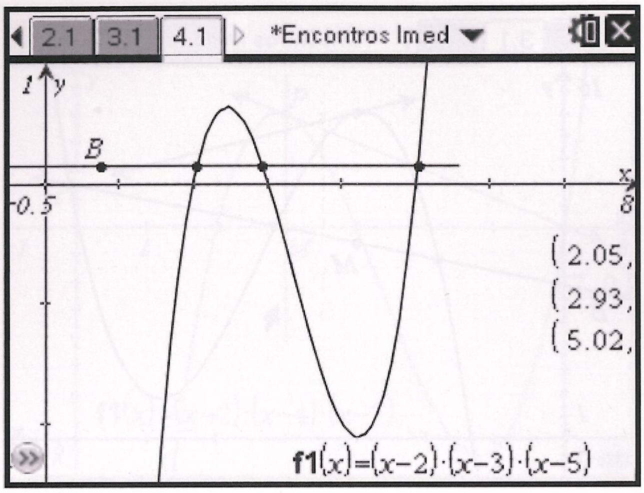


Figura 7

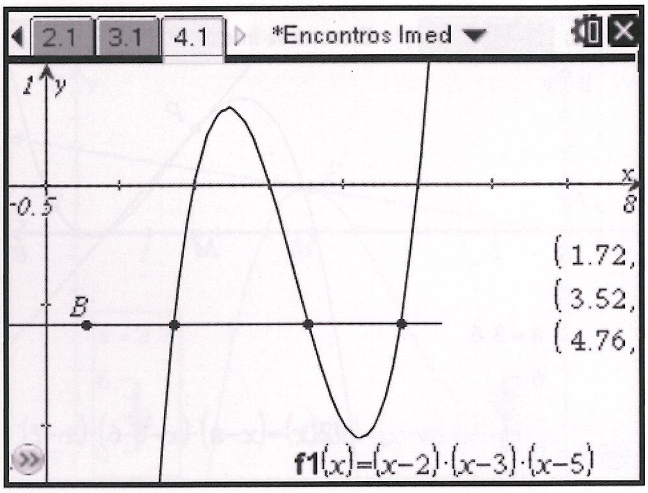


Figura 8

apenas visíveis as abcissas. Agarrando o ponto *B* podemos alterar a posição da reta e ver, em cada caso, o que acontece (figs. 7 e 8).

A partir destes exemplos consegue o leitor fazer uma conjetura sobre a relação entre as abcissas? Sim, é verdade, apenas com dois exemplos é difícil (e muito pouco seguro) fazer seja que conjetura for. Por isso o mais seguro é pegar na sua TI-Nspire e testar mais casos.

Já conseguiu? Pista: lembre-se que os zeros são 2, 3 e 5.

O resultado é uma nova surpresa: a soma das abcissas é igual à soma dos zeros (10, para esta função).

$$2,05 + 2,93 + 5,02 = 10.$$
$$1,72 + 3,52 + 4,76 = 10.$$

Podemos experimentar com outras cúbicas. Basta ir à expressão analítica e alterar os zeros. Por exemplo, para um caso mais particular, escolhemos um zero duplo (2,3) e outro simples (4,4).

A soma dos zeros é: $2,3 + 2,3 + 4,4 = 9$.

A soma das abcissas é: $1,71 + 3,18 + 4,11 = 9$ (fig. 9).

Se quiséssemos demonstrar este resultado, bem como o obtido na Investigação 3, iríamos ter algumas dificuldades. Isto porque, nos dois casos, para encontrar as abcissas dos pontos, teríamos de resolver equações de terceiro grau. Não é fácil e está completamente fora dos programas do ensino secundário.

No entanto, o facto de termos disponível esta tecnologia permite-nos ultrapassar estas dificuldades e ir muito mais longe, descobrindo propriedades e caraterísticas que estariam fora do nosso alcance e do dos alunos.

Assim sendo, não podemos parar.

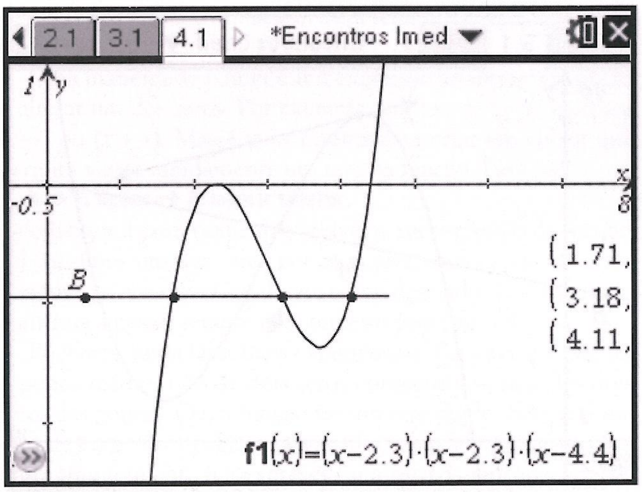


Figura 9

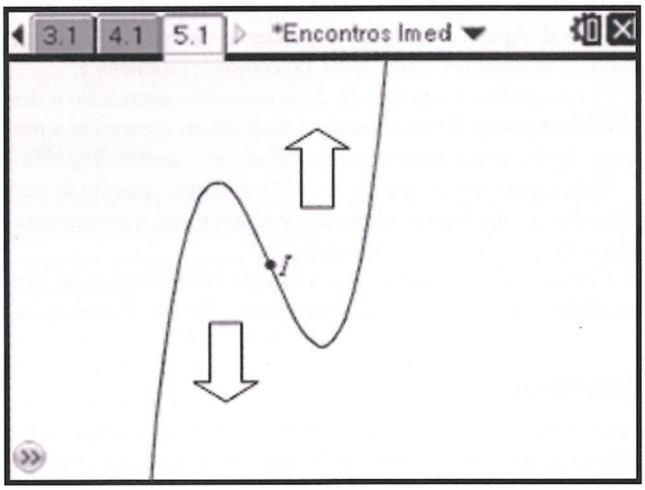


Figura 10

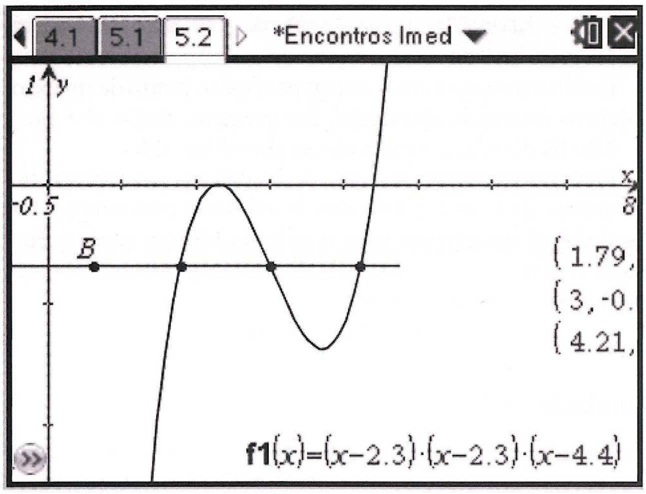


Figura 11

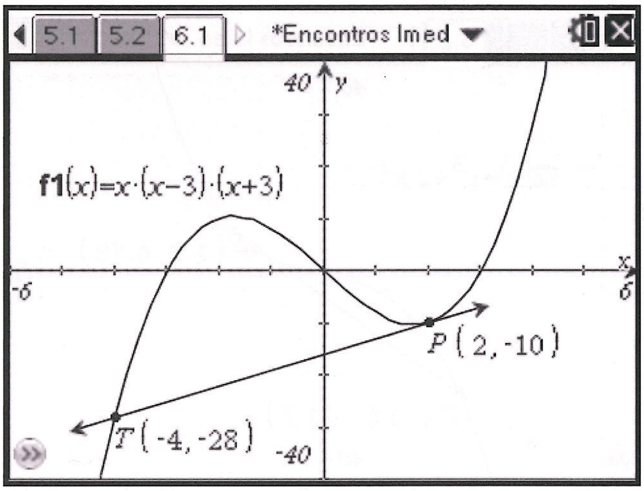


Figura 12

Investigação 5

Conhecidos os zeros de uma função cúbica, como descobrir facilmente o ponto de inflexão da curva?

Relembremos. Um ponto do gráfico de uma curva é de inflexão se aí houver alteração da concavidade. Nas cúbicas, há sempre uma parte da curva com a concavidade virada para cima e outra com ela virada para baixo. Portanto existe sempre um ponto de inflexão (fig 10).

O gráfico tem uma simetria central, cujo centro é o ponto de inflexão *I*. A cada ponto *P* do gráfico corresponde outro ponto *P'* em oposição ao centro e a igual distância deste.

Agora podemos usar o resultado da Investigação 4. Imaginemos uma linha horizontal a passar no ponto de inflexão. A soma das abcissas dos três pontos vai ser igual à soma dos zeros (9 no caso da última cúbica que usámos). Devido à simetria central, o ponto de inflexão fica no meio dos outros dois pontos. Logo, a sua abcissa é a média das três abcissas (e também dos três zeros [fig. 11]).

$$x_{\text{inflexão}} = \frac{2,3 + 2,3 + 4,4}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

Conclusão, numa cúbica de zeros x_1, x_2 e x_3, a abcissa do ponto de inflexão é a média dos zeros:

$$x_{\text{inflexão}} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

Continuemos as nossas investigações.

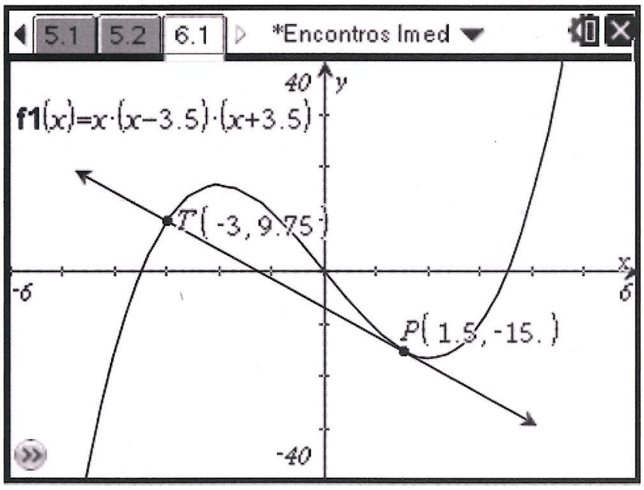


Figura 13

Investigação 6

Numa função cúbica, a tangente ao gráfico num ponto qualquer P interseta sempre o gráfico noutro ponto T. Que relação existe entre as abcissas de P e T?

Antes de começar, uma ressalva. O enunciado tem uma incorreção, não é verdade que seja «sempre». Está o leitor a ver porquê?

Vamos fazer a investigação considerando uma função cujo ponto de inflexão do gráfico coincida com a origem do referencial e depois generalizaremos.

Para que o ponto de inflexão esteja em (0,0), basta que um dos zeros seja $x = 0$ e os outros sejam simétricos.

Seja então $f(x) = x(x-3)(x + 3)$.

Traçamos a tangente num ponto qualquer *P*, fazemos o outro ponto de interseção *T* da tangente com o gráfico e pedimos as coordenadas destes pontos (fig 12).

Agora, ou agarramos e deslocamos o ponto *P*, vendo o que acontece às abcissas, ou clicamos duas vezes sobre a abcissa de *P* e escrevemos um novo valor.

Facilmente se vê que, qualquer que seja a posição de *P*, x_T é o dobro do simétrico de x_P. Acontecerá o mesmo noutras funções ou dependerá o resultado dos zeros da cúbica? Experimentemos (fig. 13).

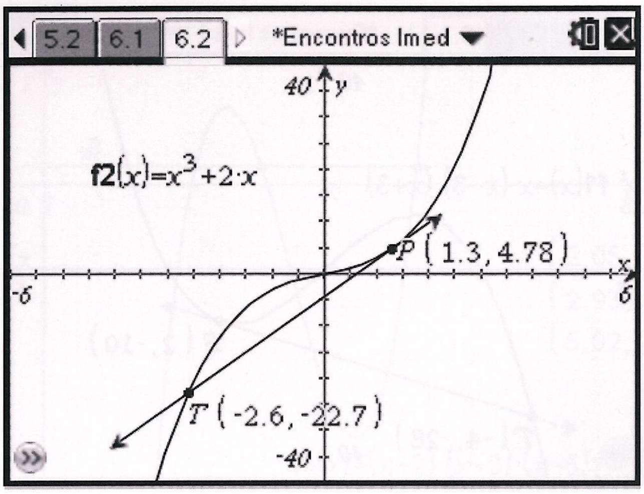


Figura 14

A relação mantém-se: $x_T = -2x_P$.

Estamos a ficar convencidos, mas temos de investigar ainda outras situações.

Será que a relação é a mesma no caso das cúbicas que são injetivas?

Escolhamos uma cúbica ímpar, para que o ponto de inflexão esteja na origem do referencial. Por exemplo, $f(x) = x^3 + 2x$.

Não há dúvida, a relação não se altera (fig. 14).

Estamos agora em condições de estabelecer a relação entre as abcissas de P, de T e do ponto de inflexão I para uma cúbica qualquer. Pensando que uma translação simples permite deslocar o gráfico da função de modo que o ponto de inflexão coincida com a origem, temos:

$$x_T = x_I + 2(x_I - x_P).$$

Conclusão final

Ao longo deste trabalho fomos tendo, nós e os leitores, vários «encontros imediatos de 3° grau». Sucederam-se os contactos com a função cúbica, que levaram à descoberta, às vezes inesperadamente, de algumas das suas propriedades. Mas a frase ganha um sentido ainda mais profundo. Tudo isto se tornou simples e possível porque dispomos de três elementos fundamentais: o poder da mente humana, o fascínio da Matemática e a tecnologia da TI-Nspire, uma máquina que é de «outro mundo».

José Paulo Viana

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

A tarefa desta secção vem no seguimento do Ponto de vista que apresentei no número anterior sobre o teste intermédio de 8.° ano. Nesse texto, referi que a sequência apresentada na questão 9 tinha um potencial interessante, apesar das questões formuladas não aproveitarem tal potencial. Assim, neste número apresento uma formulação alternativa, pensada numa perspetiva de trabalho a realizar numa aula de Matemática do 7.° ou 8.° ano. A tarefa foi pensada com o objetivo de promover o pensamento algébrico, o raciocínio nas suas diferentes vertentes, e a comunicação matemática. O professor decidirá qual a melhor forma de organizar o trabalho dos alunos, mas considero indispensável uma fase de trabalho autónomo e posterior discussão no grupo-turma. Essa discussão poderá revelar as diferentes formas de olhar para a sequência e respetivo termo geral: $(n+1)^2-1$ corresponde à identificação de um quadrado ao qual falta um azulejo; $n(n+2)$ resulta de mover e rodar a coluna de azulejos brancos e colocá-la numa base do retângulo cinzento, ficando com um retângulo de dimensões n por $n+2$; finalmente, $n + n(n+1)$ poderá ser antecipada pela resolução das questões anteriores, pois deriva da junção dos n azulejos brancos aos $n(n+1)$ azulejos cinzentos. Haverá ainda outras expressões possíveis e é necessário estar disponível para aceitar e discutir outras que os alunos proponham. Sendo assim, $5n-2$ é a única expressão que não corresponde a um termo geral, mas a sua análise é recomendada porque ao testar a fórmula, ela resiste aos dois primeiros termos e só se verifica falsa a partir do terceiro. No contexto do 8.° ano, pode ainda verificar a equivalência das expressões, criando um contexto favorável à aplicação das operações entre monómios e polinómios e ainda um dos casos notáveis da multiplicação.

Lina Brunheira,
Escola Secundária de Amora