

# O que é uma cónica?

Ana Cristina Oliveira

As *cónicas* são curvas obtidas por intersecção de um cone de revolução com um plano que não passa pelo seu vértice. Se o plano cortar apenas uma das folhas do cone, essa secção do cone é uma *elipse* (de que um caso particular é a circunferência) ou uma *parábola*; se cortar duas, é uma *hipérbole*. Esta é a definição original de Apolónio de Perga (? 262 a.C.–190 a.C.).

## Definições alternativas

Uma caracterização alternativa resulta do seguinte. Quando a intersecção do plano com o cone é uma elipse ou uma hipérbole, existem duas esferas inscritas no cone que são tangentes ao plano, ditas *esferas de Dandelin* (figura 1); se a intersecção for uma parábola, existe uma só tal esfera. Os pontos de tangência das esferas com o plano dizem-se os *focos* da cónica e, no caso da elipse, a soma das distâncias de qualquer ponto da cónica aos dois focos é constante — precisamente igual (como verificaremos) à distância, medida ao longo das geratrizes do cone, entre as circunferências onde as duas esferas tocam o cone.<sup>[1]</sup> Se adoptarmos um sistema cartesiano de eixos no plano e, relativamente a ele, a elipse tiver focos  $(c, 0)$  e  $(-c, 0)$  e for  $D$  a soma das distâncias dos seus pontos aos focos, ela descreve-se pela equação

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = D.$$

Esta equação não é muito prática, mas mostra-se que ela é equivalente a uma outra do tipo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Na hipérbole, por seu turno, o que é constante é o valor absoluto da diferença entre as distâncias de cada um dos seus pontos aos focos. E, em sistemas de eixos apropriados, a hipérbole e a parábola são representadas por equações igualmente simples (mas que revelam um grau adicional de complexidade relativamente às rectas, que correspondem às equações de primeiro grau):

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 && \text{para a hipérbole} \\ y - px^2 &= 0 && \text{para a parábola.} \end{aligned}$$

## Por que há uma equivalência?

Na bibliografia que consultámos, os autores optam frequentemente por utilizar a definição de Apolónio para cónicas e, quando fazem depois uso da descrição métrica indicada, não referem (por) que são modos equivalentes de tratar estas curvas. O objectivo deste artigo é o de apresentar argumentos geométricos que elucidem esta equivalência.

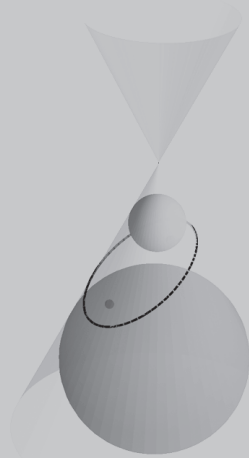


Figura 1

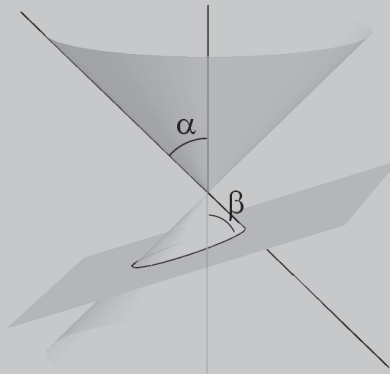


Figura 2

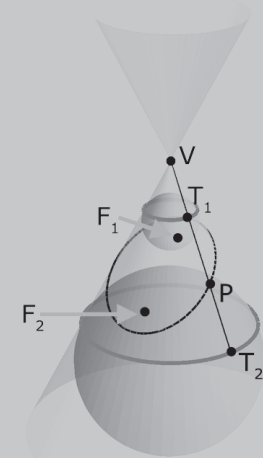


Figura 3

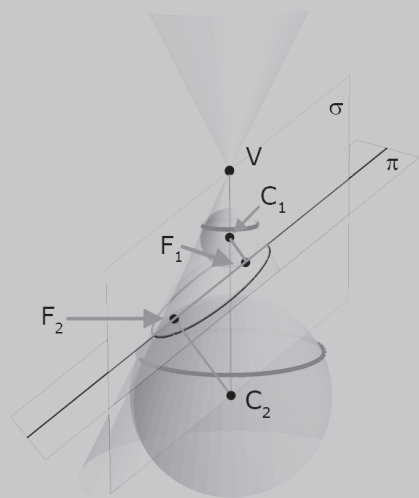


Figura 4

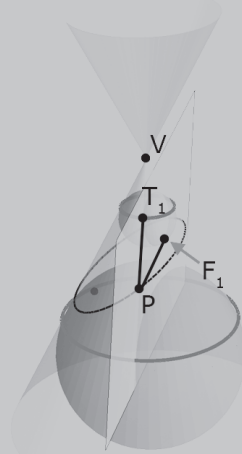


Figura 5

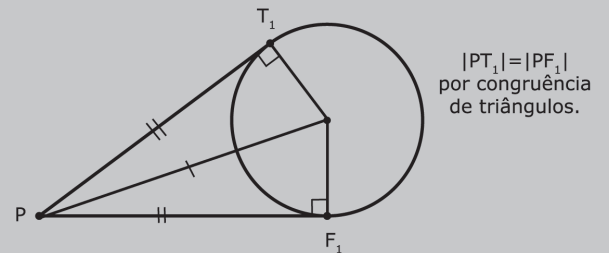


Figura 6

Analisaremos apenas o caso da elipse (os outros têm dificuldade idêntica) e consideraremos sempre um cone duplo, circular, recto e ilimitado. Uma elipse pode ser vista como:

- (1) A curva resultante da intersecção de um cone de abertura  $\alpha$  com um plano  $\pi$  de inclinação  $\beta$ , sendo  $\alpha < \beta$  (figura 2).
- (2) O lugar geométrico dos pontos  $P$  de um plano  $\pi$  que satisfazem a equação  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = D$ , onde  $F_1$  e  $F_2$  são dois pontos desse plano previamente fixados e  $D$  é uma constante estritamente maior que  $\overline{F_1F_2}$ .

Convençamo-nos de que as definições (1) e (2) são equivalentes. Consideremos uma curva que verifica a propriedade (1). De acordo com Dandelin (1794–1847), é possível inscrever no

cone duas esferas tangentes a  $\pi$ ; designemos os pontos de tangência por  $F_1$  e  $F_2$ . Na figura 3, estão assinalados o vértice  $V$  do cone, um ponto  $P$  da curva e os pontos  $T_1$  e  $T_2$  de intersecção da recta  $VP$  com as duas esferas de Dandelin.

Sabemos que  $\overline{PT_1} = \overline{PF_1}$  uma vez que o plano definido por  $P$ ,  $F_1$  e  $T_1$  intersecta uma das esferas de Dandelin numa circunferência que possui como tangentes  $PF_1$  e  $PT_1$ , respectivamente, em  $F_1$  e  $T_1$  (ver figuras 5 e 6). Por simetria,  $\overline{PT_2} = \overline{PF_2}$  e, portanto,

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PT_1} + \overline{PT_2} = \overline{T_1T_2},$$

onde  $\overline{T_1T_2}$  é independente do ponto  $P$ . Ou seja, os pontos da curva satisfazem a definição (2).

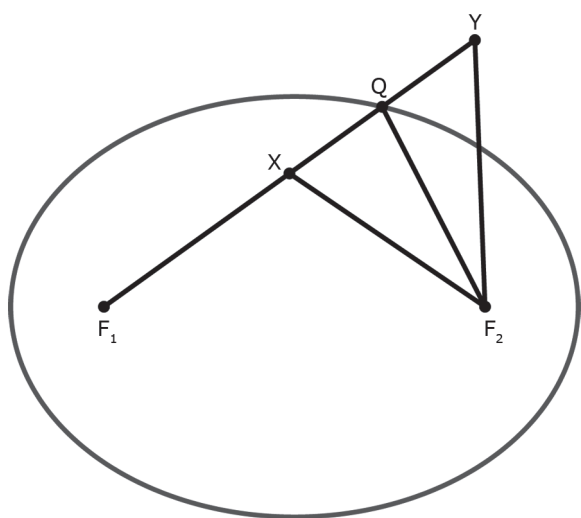


Figura 7

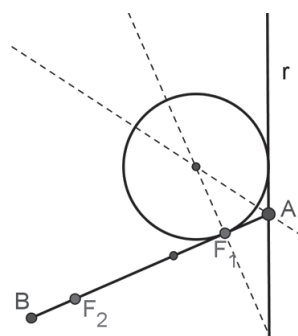


Figura 8

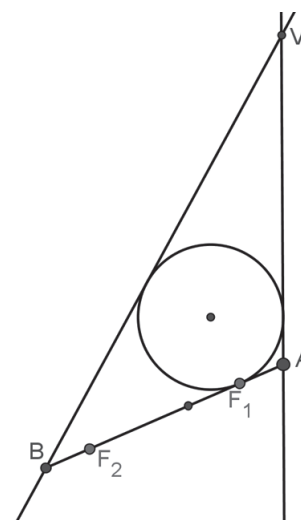


Figura 9

A figura 7 indica por que motivo não existem outros pontos em  $\pi$  que verifiquem a condição (2), embora eles existam no espaço: se  $X$  é ponto do plano  $\pi$  interior à elipse, e  $Q$  o ponto de intersecção da semi-recta  $F_1X$  com a elipse, então  $\overline{XF_1} + \overline{XF_2} < \overline{QF_1} + \overline{QF_2} = D$ . Analogamente, se  $Y$  é ponto do plano  $\pi$  exterior à elipse, tem-se  $\overline{YF_1} + \overline{YF_2} > \overline{QF_1} + \overline{QF_2} = D$ .

Para esclarecermos por que é que uma curva que satisfaça o enunciado da definição (2) também cumpre o da definição (1), fixemos um plano  $\pi$ , dois pontos  $F_1$  e  $F_2$  nesse plano, uma constante  $D$ , estritamente maior que  $\overline{F_1F_2}$ , e o conjunto de pontos  $\mathcal{E} = \{P \in \pi : \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = D\}$ . Temos agora de encontrar um cone  $\mathcal{C}$  adequado, isto é, que permita obter  $\mathcal{E}$  como intersecção de  $\pi$  com  $\mathcal{C}$  e cujas esferas de Dandelin, de centros

$C_1$  e  $C_2$ , sejam tangentes a  $\pi$  em  $F_1$  e  $F_2$ . Note-se que, como  $\overline{AF_1} + \overline{AF_2} = \overline{BF_1} + \overline{BF_2} = D$ , se um tal cone existir, deverá intersectar a recta  $F_1F_2$  em dois pontos  $A$  e  $B$  (veja-os na figura 8)<sup>[1]</sup> tais que

$$\overline{AF_1} = \overline{BF_2} = \frac{D - \overline{F_1F_2}}{2} \quad \text{e} \quad \overline{AB} > \overline{F_1F_2}.$$

Uma vez que procuramos um cone de revolução, comecemos por diminuir a dificuldade do problema, reduzindo-o a um plano que contenha o vértice e uma geratriz do cone: iremos construir um plano  $\sigma$  contendo  $AB$  ( $AB = \overline{F_1F_2}$ ) e perpendicular a  $\pi$  (figura 4). Por esse motivo,  $\sigma$  contém vários pontos importantes: como devemos ter  $F_1C_1$  e  $F_2C_2$  perpendiculares a  $\pi$ ,  $\sigma$  terá

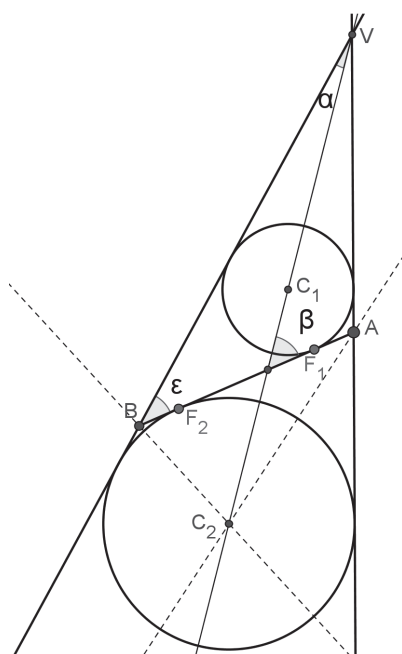


Figura 10

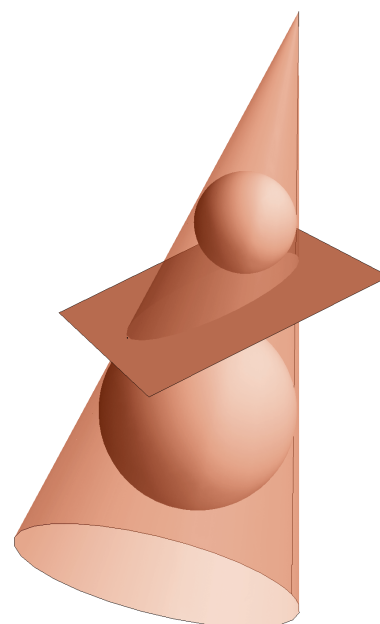


Figura 11

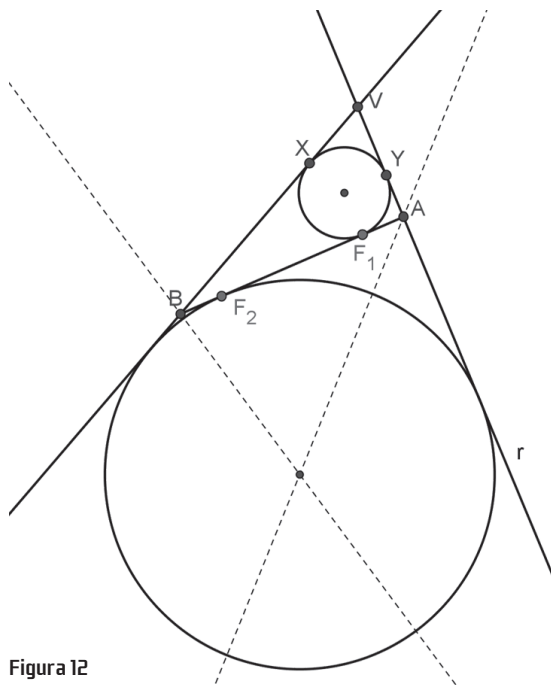


Figura 12

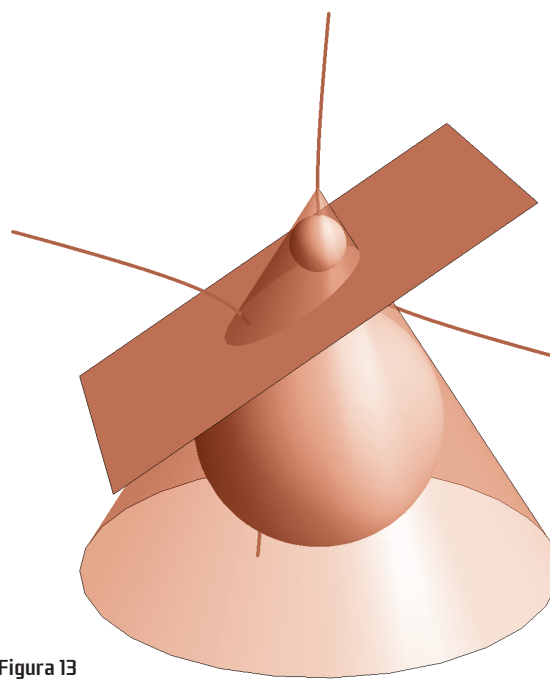


Figura 13

de coincidir com o plano que contém (e é definido por)  $F_1$ ,  $C_1$ ,  $F_2$  e  $C_2$  (figura 4). Acresce que  $C_1C_2$  é o eixo do cone, pelo que o seu vértice,  $V$ , também pertence a  $\sigma$ .

Construamos agora a intersecção do cone (e respectivas esferas de Dandelin) com  $\sigma$ . Escolhamos uma recta  $r = AV$  em  $\sigma$ ; sabemos que  $C_1$  coincide com o centro da circunferência tangente a  $r$  e a  $AB$  em  $F_1$ , como ilustrado na figura 8. O facto de a recta  $BV$  dever ser também tangente à circunferência representada, permite-nos determiná-la (e isso está feito na figura 9). Por outro lado, a segunda esfera de Dandelin intersecta  $\sigma$  numa outra circunferência tangente às três rectas assinaladas, conforme indica a figura 10, e o seu ponto de tangência com  $AB$  é  $F_2$ . Observemos ainda, no triângulo  $BAV$ , que a inclinação do plano  $\pi$  é  $\beta = \varepsilon + \alpha > \alpha$ .

Por fim, e por revolução em torno de  $C_1C_2$ , geremos um cone. O resultado está na figura 11 e confirma que o conjunto  $\mathcal{E}$  verifica a definição (1).

### Uma relação intrínseca entre os diferentes cones

Será este cone único? Não esperamos que o seja pois, no argumento anterior, fizemos uma escolha: a recta  $r$ . E, de facto, variando-a, obtemos uma infinidade de cones possíveis, de que se exhibe um outro exemplo na figura 13. E como se relacionam os diferentes cones que intersectam  $\pi$  segundo a mesma elipse? Tendo em conta a igualdade (ver figura 12).

$$\begin{aligned} |\overline{BV} - \overline{AV}| &= |\overline{BX} + \overline{XV} - \overline{AY} - \overline{YV}| = \\ &= |\overline{BF_1} + \overline{XV} - \overline{AF_1} - \overline{YV}| \end{aligned}$$

e a congruência de  $[XV]$  e  $[YV]$ , que resulta de  $VX$  e  $VY$  serem tangentes, em  $X$  e em  $Y$ , à mesma circunferência, concluímos que

$$|\overline{BV} - \overline{AV}| = |\overline{BF_1} - \overline{AF_1}| = \overline{F_1F_2}.$$

Agora que sabemos que as definições geométrica e métrica das cónicas são equivalentes, podemos deduzir desta equação que  $V$  descreve um arco de hipérbole com focos  $B$  e  $A$  e constante  $\overline{F_1F_2}$ . Está traçado a castanho na figura 13.

### Conclusão

A prova da equivalência entre as duas definições de cónica, de natureza diversa, serviu também o propósito de treinar o pensamento geométrico, uma tarefa menos habitual dada a comodidade inerente ao uso da geometria analítica. A conexão inesperada entre duas das cónicas, a elipse e a hipérbole, foi-nos sugerida ao manipularmos *software* informático de Geometria Dinâmica, mais concretamente o *Geogebra*<sup>[3]</sup>.

A autora agradece a leitura atenta de Eduardo Veloso da primeira versão deste texto.

### Notas

- [1] Propriedade que sugeriu aos jardineiros um método expedito para construir canteiros elípticos.
- [2] As figuras 8 e 9 foram traçadas no plano  $\sigma$ .
- [3] Nos modelos tridimensionais, foi utilizado o programa *Mathematica*.

### Bibliografia

- D. Lehmann, R. Bkouche, *Initiation à la géométrie*, Presses Universitaires de France, 1988.
- E. Veloso, *Geometria, Temas Actuais*, Ministério da Educação, Instituto de Inovação Educacional, 1998.
- G. Jennings, *Modern Geometry with Applications*, Springer, 1997.
- H. Lebesgue, *Les Coniques*, Gauthier-Villars, 1942.

Ana Cristina Oliveira  
Associação Atractor