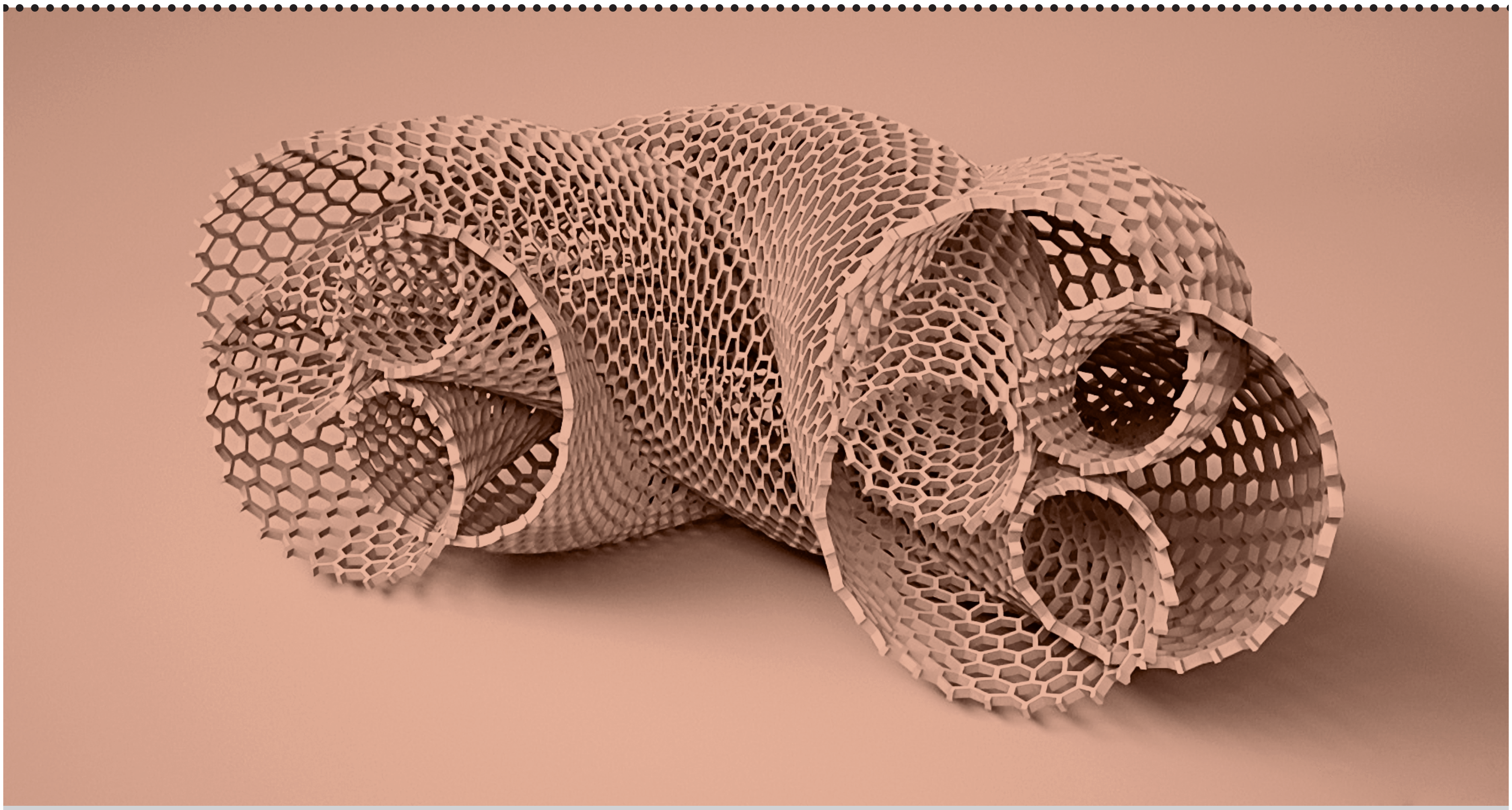

Conexões matemáticas envolvendo o conceito de dízima infinita periódica

Paulo Afonso

Em Matemática ouvimos muitas vezes falar em dízimas infinitas periódicas e a minha reflexão visa conectar este tipo de números ao tema das regularidades e padrões numéricos.

1 — Vejamos, qual será o número a dar continuidade a esta sequência numérica:

5; 6,(6); 10; 16; 26,(6); ______;

Aparentemente esta tarefa não é de fácil resolução ou de resolução imediata, pois não surge evidente a lei de crescimento desta sequência numérica. Contudo, a existência de duas dízimas infinitas periódicas neste conjunto de cinco números poderá servir de chave para a resolução deste desafio.

Assim sendo, a minha sugestão vai no sentido de se converter cada dízima na respetiva fração. Recordemos o procedimento matemático para que isso possa ocorrer. Como o período de ambas as dízimas ocorre logo ao nível das décimas, podemos seguir os cálculos que se descrevem de seguida. Relativamente a 6,(6): de $x = 6,(6)$ resulta que $10x = 66,(6)$, ou seja, $10x - x = 66,(6) - 6,(6)$, equivalente a $9x = 60$ que, resolvendo em ordem a x permite obter a solução $x = 20/3$; quanto a 26,(6): de $x = 26,(6)$ obtém-se $10x = 266,(6)$, resultando daqui a equação $10x - x = 266,(6) - 26,(6)$, equivalente a $x = 240/9$ que, resolvendo em ordem a x, permite obter a solução $x = 80/3$.

2 — Será que a identificação das respetivas frações ajuda a interpretar a sequência numérica?:

5; 20/3; 10; 16; 80/3; ______;

Em contexto de sala de aula é bem possível que um dos vários alunos possa avançar com a proposta de que a fração 80/3 é equivalente à fração 160/6. Se esta sugestão não ocorrer, pode ser indicada pelo professor, no sentido de que os resolvedores não desanimem e, consequentemente, desistam.

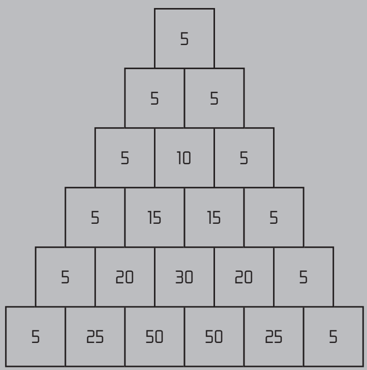

Figura 1

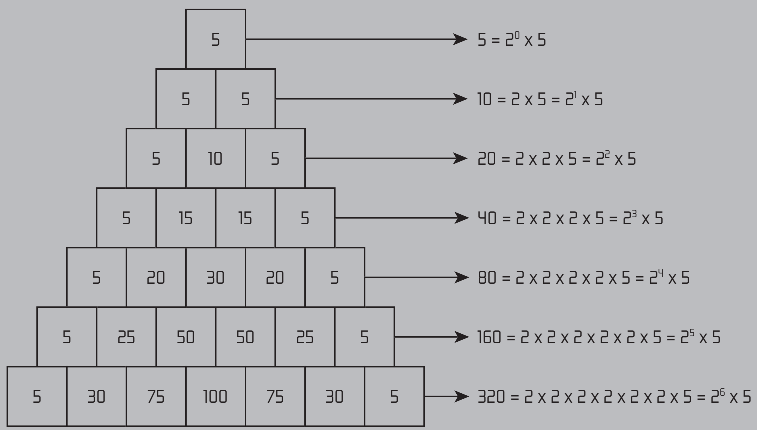

Figura 2

No fundo, o que se pretende é olhar para a sequência numérica neste novo formato:

5; 20/3; 10; 16; 160/6; ______;

3 — *Ajuda?*

Talvez, pois poderá haver alguém que sugira a conversão de todos os números inteiros para as respetivas frações. Eis uma aproximação interessante:

10/2; 20/3; 40/4; 80/5; 160/6; ______;

Logicamente que quando esta conversão for feita, o desafio colocado ficará imediatamente resolvido, pois facilmente se percebe que estamos perante números fracionários cujos denominadores são os números naturais, iniciados no 2, e os respetivos numeradores são dobros sucessivos de cinco ($10 = 2 \times 5$; $20 = 2 \times 2 \times 5$; $40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$; $80 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$; $160 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$). Logo, poder-se-á concluir que os numeradores dessas frações resultam do produto das potências de base dois, de expoente natural, com o cinco ($10 = 2^1 \times 5$; $20 = 2^2 \times 5$; $40 = 2^3 \times 5$; $80 = 2^4 \times 5$; $160 = 2^5 \times 5$).

Neste momento é fácil avançar com o número que dá continuidade à sequência numérica, pois o numerador será $2^6 \times 5$, isto é, o valor 320, e o denominador será o valor 7:

10/2; 20/3; 40/4; 80/5; 160/6; 320/7;

Note-se que este 6º termo da sequência volta a ser uma dízima infinita periódica cujo período é o seguinte: 714285. A dízima é, pois, a seguinte: 45,(714285).

Ora, os numeradores destas frações podem ser conectados a uma outra disposição numérica, baseada no conceito de Triângulo de Pascal, em que o valor inicial e os que iniciam e terminam cada linha deixam de ser uns para serem cincos (figura 1).

4 — *Que tipo de conexão matemática é, pois, possível fazer-se entre os numeradores das frações da sequência numérica e esta figura?*

Uma vez que referimos as potências de base dois, de expoente natural, a multiplicar com o fator 5, teremos de efetuar as somas dos valores existentes em cada linha horizontal da figura 2

Fica, pois, confirmada esta possibilidade de conectar matematicamente a sequência numérica inicial com esta figura numérica.

Mas as conexões matemáticas não se ficam por aqui. Voltemos ao 6.º termo da sequência numérica: 45,(714285). Centremo-nos no seu período: 714285 e dividamo-lo por 5. Obteremos o valor 142857.

5 — *Comparem-se os dígitos existentes neste quociente com os dígitos do dividendo. O que poderemos concluir?*

Curioso, não é? Os dígitos são, de facto, os mesmos, apesar de estarem posicionados de forma diferente!

6 — *Multiplique, agora, este quociente obtido por 3, por 4 e por 6. O que pode concluir?*

Bibliografia

Afonso, P. (2010). A Matemática Recreativa e o estabelecimento de Conexões Matemáticas. *Educação e Matemática*, 107, 12–17.

Afonso, P. (2008b). *O Mundo Mágico das Conexões Matemáticas*. Castelo Branco: Instituto Politécnico de Castelo Branco.

Enzensberger, H. (1998). *O Diabo dos Números*. Porto: ASA.

Paulo Afonso

Instituto Politécnico de Castelo Branco — Escola Superior de Educação