



Despertar o pensamento geométrico com a hierarquização de quadriláteros

Joana Latas

Quando iniciamos o estudo de um (sub)tópico em sala de aula existe uma série de tomadas de decisão subjacentes ao trabalho docente que justificam as opções didáticas que nos fazem optar por esta e não por aquela ou a outra abordagem.

No Programa de Matemática do Ensino Básico, a classificação de quadriláteros, bem como a sua construção e investigação das respetivas propriedades está contemplada no tópico «Triângulos e quadriláteros» ao nível do tema Geometria no 3.º ciclo (2007).

De entre as possíveis abordagens de classificações podemos considerar, segundo De Villiers (1994), uma *partição* ou uma *hierarquização* de quadriláteros e cada uma delas pode ser trabalhada numa perspetiva eminentemente *construtiva* ou *descritiva*. Por hierarquização entenda-se a classificação de um conjunto de conceitos de tal forma que os mais particulares formam subconjuntos dos mais gerais, enquanto que numa partição não há interseção entre os subconjuntos em causa e é pela reunião das partes que obtemos o todo. Uma classificação construtiva está associada à descoberta de novos conceitos. Pode ser conseguida, por exemplo, por particularização a partir do paralelogramo ou generalização se tomarmos o quadrado como ponto de partida. Por outro lado, uma classificação descritiva pode ser entendida como uma listagem de propriedades que tornam único cada quadrilátero, depois dos alunos estarem familiarizados com as figuras geométricas e respetivas propriedades.

De Villiers (1994) defende uma classificação de quadriláteros baseada na compreensão da funcionalidade da mesma, nomeadamente valorizando as funções dos tópicos e processos internos da matemática. Segundo o autor, a compreensão da utilidade ou da função determina a motivação para o estudo e aprendizagem da matemática e por isso deve constituir um importante critério de ponderação à abordagem de ensino. Embora a hierarquização seja a abordagem mais habitual, uma classificação por partição dos quadriláteros é aceitável, até porque a vantagem que a hierarquização pode trazer em termos funcionais, não é, por vezes, explorada com os alunos. Aliás, as dificuldades reveladas pelos alunos na hierarquização de quadriláteros remetem para a dificuldade em interpretar significados linguísticos e em perceber a vantagem de uma hierarquização em relação a uma partição.

Tornar a matemática acessível a uma turma implica, por um lado, que o professor conheça os seus alunos, que saiba em que níveis de desempenho se encontram, podendo assim proporcionar o desenvolvimento de estratégias próprias e por vezes informais de raciocínio. Por outro lado, deve implicar também o aprofundamento do conhecimento cultural e histórico da matemática. Este último ponto pode enriquecer uma abordagem em sala de aula e proporcionar uma aprendizagem com significado para o aluno, se forem tomadas em consideração as próprias vivências culturais dos alunos.

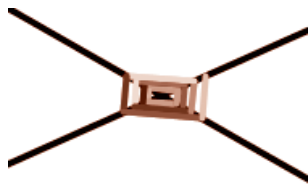


Figura 1. Espiral retangular



Figura 2. Exemplos de boomerangs

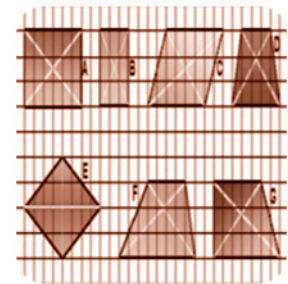


Figura 3. Quadriláteros e suas diagonais

As ideias matemáticas são por vezes desenvolvidas em atividades muito simples mas de forma inconsciente por quem as pratica. A este propósito, vejamos algumas práticas culturais associadas ao desenvolvimento do conceito de retângulo.

Um exemplo de um jogo descrito por Gerdes (1992): ao envolver um fio em espiral à volta de dois paus cruzados, esticando o fio cada vez que se alcança um pau, surge, necessariamente um retângulo (figura 1). Observando que os quatro pedaços de paus que divergem a partir do ponto em que se cruzam têm igual comprimento, um olhar matemático permite extrair a essência do pensamento matemático que lhe está subjacente, nomeadamente que as diagonais do retângulo, além de terem o mesmo comprimento, cruzam-se ao meio de ambas, visto todas terem sido envolvidas pelo fio o mesmo número de vezes.

Gerdes (1992) refere a construção de retângulos, dadas as suas diagonais, não apenas como atividade de lazer mas também como atividade resultante de necessidades do dia a dia praticadas por alguns povos em locais tão distintos como Moçambique, Brasil e Egito. Na construção da base de uma casa retangular sem qualquer medição, uma possibilidade apresentada pelo autor é esticar dois fios — diagonais — com o mesmo comprimento colocados de modo que os seus pontos médios coincidam, resultando da união dos extremos dos fios um retângulo.

Perante a análise destas e de outras situações, Gerdes (1992) defende que o interesse pelo retângulo e suas diagonais não é somente de natureza estética mas também de natureza prática e, neste sentido, um meio de despertar o pensamento geométrico. Apesar das abordagens para desenvolver o conceito de retângulo utilizarem essencialmente definições de quadriláteros com base na classificação de ângulos (4 ângulos retos) e/ou posição relativa e comprimento de lados (lados opostos paralelos e geometricamente iguais dois a dois), o incentivo à classificação de quadriláteros com base na comparação de propriedades das diagonais das figuras é considerado, por exemplo, numa das tarefas de exploração (tarefa 7) de sala de aula proposta nos materiais de sala de aula de apoio ao Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte, 2009).

Pensar os boomerangs como (diagonais de) quadriláteros⁽¹⁾

O exemplo aqui apresentado pertence a um estudo mais vasto (Latas, 2011) onde a matemática cultural dos alunos de uma

turma foi integrada na aprendizagem formal da matemática. As práticas culturais foram analisadas à luz dos tópicos e das orientações curriculares para o ensino e aprendizagem da Matemática e, com o objetivo de tornar visível a matemática nelas implícita, optou-se por ter como referência o desenvolvimento dos tópicos e de capacidades matemáticas transversais previstas em ME-DGIDC (2007). Assim, as ideias matemáticas implícitas nas práticas culturais mencionadas pelos alunos foram «descongeladas» sob um «olhar» formal da Matemática. Deste modo, os conceitos matemáticos que emergiram explicitamente durante a exploração das práticas culturais foram alvo de uma análise prévia por parte da professora com o intuito de integrarem o currículo matemático dos alunos. Esta ação foi consciente e orientou a elaboração do conjunto das cinco tarefas implementadas.

Uma das práticas culturais trabalhadas foi o lançamento de boomerangs. Depois da orientação do vento ser identificada como um aspeto transversal a diferentes práticas culturais dos alunos, o lançamento de boomerangs surge como uma prática culturalmente distinta das identificadas localmente, mas envolvendo o mesmo conhecimento cultural, a orientação do vento, e acessível aos mesmos por consistir numa atividade de lazer usual de um dos professores do grupo de Educação Física da escola⁽²⁾. O conhecimento cultural que os alunos aprofundaram e do qual se apropriaram permitiu-lhes estabelecer um paralelismo entre os processos e conceitos por eles utilizados, intuitiva e exaustivamente, durante a experiência de lançamento e análise dos boomerangs, e a classificação de quadriláteros formalizada posteriormente em contexto de sala de aula. É esse processo que se procura aqui explorar.

Tornar visível a matemática sob o ponto de vista de uma professora de Matemática do 3.º ciclo

A diversidade de formas e de número de pás dos boomerangs impulsionaram uma associação entre as pás dos boomerangs e figuras geométricas ou, mais especificamente, diagonais de figuras geométricas. Afunilando para o caso específico das diagonais dos quadriláteros, começou a emergir a possibilidade de estudar a eficiência de boomerangs com a forma de diagonais de diversos quadriláteros para, a partir da análise das características das mesmas, formalizar o estudo das propriedades das diagonais dos paralelogramos.

Gerdes (1992) mostra como, a partir de contextos práticos do dia a dia em culturas distintas, o conhecimento das propriedades das diagonais determina a forma (quadrilátero) que lhe está associada e vice-versa. Na verdade, a evolução histórica e a necessidade humana apontam para uma hierarquização de quadriláteros a partir das suas diagonais, pelo que, esta abordagem mostrou ser um método didaticamente aceitável para a classificação de paralelogramos prevista no programa de Matemática ao nível do 3.º ciclo de escolaridade.

Deste modo, tornar explícita a matemática das práticas culturais potencializa uma aprendizagem matemática com significado por ser rica no estabelecimento de conexões entre a matemática e os conhecimentos prévios dos alunos (Bishop, 2005; Boaler, 1993; Gerdes, 1992, 1997, 2007). No caso específico da Geometria, este processo surge como consequência do próprio caráter experimental com que pode ser entendido este domínio matemático.

Orientações metodológicas

No que respeita às orientações curriculares portuguesas as atividades geométricas «efetuar estimativas de medidas», «descobrir propriedades de figuras» e «aplicar as propriedades descobertas em diversas situações», estão presentes em Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) como importantes características do pensamento geométrico a desenvolver nos alunos no âmbito da aprendizagem da Geometria durante a Educação Básica. Este documento reforça ainda a inquestionável importância da Geometria na educação matemática e na relação que estabelecemos com o mundo que nos rodeia: «A Geometria é essencialmente um meio para a criança conhecer o espaço em que se move, pelo que se torna importante promover a aprendizagem baseada na experimentação e na manipulação» (Idem, 1999, p. 67). Também nos materiais de apoio ao professor disponíveis no site da DGIDC, uma das ideias matemáticas a desenvolver na abordagem aos «Triângulos e quadriláteros» é de que «uma figura geométrica, em particular um triângulo ou um quadrilátero, tem *propriedades* envolvendo os seus elementos (lados, ângulos internos, ângulos externos), diagonais, soma de ângulos internos, soma de ângulos externos, área e perímetro, etc., que é interessante analisar.» (Ponte, 2009, p.4).

Neste sentido, a interação, a partilha de ideias e a negociação de significados entre os alunos, inerente às atividades geométricas em causa, podem constituir também um excelente meio para desenvolver a comunicação matemática, aliás a abordagem didática presente na brochura «Geometria e medida no Ensino Básico» reforça o desenvolvimento desta capacidade transversal, a comunicação matemática, integrada na aprendizagem da Geometria (Breda, Serrazina, Menezes, Sousa & Oliveira, 2011).

A tarefa

Na sequência de um trabalho prévio proporcionado aos alunos, nomeadamente pela saída de campo onde experimentaram lançar *boomerangs* e procederam ao registo dos dados obtidos, a «Qual o melhor *boomerang*?» foi uma tarefa pensada para fazer a integração do conhecimento matemático cultural dos alunos com a formalização de alguns aspetos da matemática ao nível do 7.º ano de escolaridade, mais especificamente, com o estudo

dos paralelogramos e suas propriedades. A tarefa consistiu num estudo da robustez dos *boomerangs* com base no registo e análise das suas propriedades. A partir do *boomerang* disponibilizado a cada grupo, os alunos efetuaram as medições necessárias a fim de enumerarem características de unicidade do mesmo.

Significado desta experiência para a turma

Durante o trabalho em grupo os alunos discutiram ideias intra-grupo, fazendo uso de uma linguagem específica criada pela situação estudada. A formalização dos conceitos geométricos surgiu posteriormente a um trabalho prévio e informal com esses mesmos conceitos, pelo que se sustentou numa necessidade de partilhar a informação com qualquer indivíduo, conhecedor ou não, das práticas culturais exploradas.

O papel assumido pela professora foi, como sugere Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), mais de retaguarda ao desafiar os alunos, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o seu trabalho, promovendo uma postura ativa e gradualmente mais autónoma por parte do aluno. O equilíbrio que envolveu a aceitação e identificação dos papéis de alunos e professora na sala de aula, foi um processo moroso e sob constante negociação. A valorização da comunicação matemática intra e inter grupos como meio de sintetizar conhecimentos foi uma estratégia assumida pela professora para desenvolver nos alunos capacidades de autonomia e confiança.

Com base no quadro síntese de apresentações dos alunos à turma (Quadro 1), foram tornados visíveis e formalizados conceitos na discussão em grande grupo, especialmente no que se refere às propriedades das diagonais dos quadriláteros.


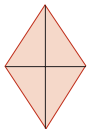
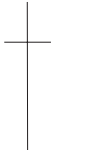
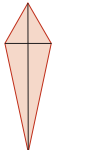

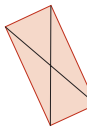
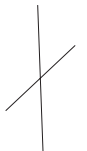
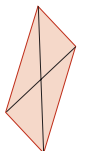
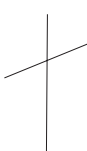
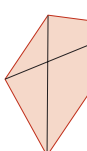

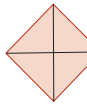
Deste modo as aulas de Geometria tiveram como suporte não só o contexto mas, essencialmente, o conhecimento desenvolvido pelos alunos e manifestado durante as apresentações (formalizadas com recurso à projeção de acetatos) dos diversos grupos e nas discussões das tarefas.

Ao falarem e ouvirem os colegas, os alunos estabeleceram uma interação que lhes permitiu clarificar significados e construir conhecimento. A apropriação da linguagem específica dos *boomerangs* deu origem a expressões como: «(...) as pás do quadrado (...)», referindo-se às diagonais da figura ou « (...) o ponto de cruzamento das diagonais do retângulo (...)», referindo-se ao ponto de interseção das diagonais do quadrilátero.

Durante o estabelecimento do paralelismo entre as propriedades dos paralelogramos e dos «nossos» *boomerangs*, como passaram a ser chamados pelos alunos, os objetos ficaram expostos no quadro para que os vários grupos os pudessem observar enquanto realizavam a tarefa.

Houve uma tendência para os alunos considerarem o quadrado como o quadrilátero mais perfeito comparando-o também com a forma do *boomerang* mais eficiente no voo. A atribuição do adjetivo «especial» ao quadrado é identificado por De Viliers (1994) como meio de ajudar a compreender o significado do que é um subconjunto como, por exemplo, na frase «o quadrado é um retângulo especial». As seguintes intervenções de dois alunos distintos mostram uma tentativa de definir os quadriláteros a partir do seu conhecimento cultural prévio: «(...) então o quadrado é tudo, porque tem todas as propriedades (...)» ou «(...) o quadrado tem tudo, sim, por isso é que é o melhor *boomerang*». O paralelismo entre a situação

Quadro 1. Grelha síntese da tarefa Qual o melhor boomerang?

Boomerang (forma)	Número de pás	Medida de comprimento das pás	Medida da amplitude dos ângulos formados pelas pás	Ponto de cruzamento das pás	Quadrilátero
	2	Diferentes (40/22)	4 ângulos retos (90)	Ponto médio de ambas (2) (20/11)	 Losango
	2	Diferentes (30/20)	4 ângulos retos	Ponto médio da pá menor (10 (20)/10)	 Papagaio
	2	Iguais (40/40)	Ângulos iguais 2 a 2 (120/60)	Ponto médio de ambas (20/20)	 Retângulo
	2	Diferentes (40/25)	Ângulos iguais 2 a 2 (120/60)	Ponto médio de ambas (20/ 12,5)	 Paralelogramo
	2	Iguais (40/40)	Ângulos iguais 2 a 2 (110/70)	Mesma distância do ponto de cruzamento até aos extremos	 Trapézio
	2	Iguais (40/40)	4 ângulos retos	Ponto médio de ambas (20)	 Quadrado

concreta e os objetos matemáticos proporcionou a formulação, a comparação e a enunciação de definições próprias e espontâneas. A primeira intervenção assume uma perspectiva essencialmente de hierarquização, «o quadrado é tudo», utilizando o conceito de subconjunto, enquanto a segunda apela a uma partição, «o quadrado tem tudo». Refira-se ainda que este tipo de linguagem utilizada de forma espontânea pelos alunos afastou alguns equívocos de significado de linguagem identificados na investigação. Por exemplo, De Velliers (1994) sublinha que a palavra «é» numa frase como «o quadrado é um retângulo» quando interpretada como «o quadrado é equivalente a ou o mesmo que um retângulo» leva a uma falsidade da afirmação.

Os alunos revelaram capacidade de resposta na experimentação e formulação de conjeturas, especialmente nas relações que envolveram propriedades dos quadriláteros e as suas diagonais. Por exemplo, durante a discussão em grande grupo sobre as propriedades dos paralelogramos, uma das alunas afirmou que «todos os paralelogramos têm 360° [referindo-se à soma dos ângulos internos]. Um quadrilátero são dois triângulos e $180 + 180 = 360$ porque a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° ». Perante a expressão surpreendida de alguns colegas, a professora solicitou que a aluna explicasse melhor. A aluna dirigiu-se ao quadro, desenhou um quadrilátero e decom pôs a figura em dois triângulos traçando uma das diagonais do

mesmo. De seguida explicou o seu raciocínio aos colegas da turma com o auxílio do esquema. Uma outra aluna acrescentou, referindo-se à soma dos ângulos internos, «(...) todos os quadriláteros, e não apenas os paralelogramos como disseram alguns colegas, têm 360°».

Como complemento ao trabalho desenvolvido com os manipuláveis — *boomerangs* — houve a integração de tecnologia na procura de definições e identificação de propriedades dos paralelogramos que envolveu o recurso a um programa de Geometria Dinâmica — *Geogebra* que proporcionou aos alunos a visualização e manipulação dos quadriláteros e respetiva análise de propriedades segundo posição relativa dos lados, comprimentos dos lados, classificação de ângulos, diagonais e eixos de reflexão. Deste modo foi exigido aos alunos um olhar dos quadriláteros sob diferentes perspetivas e um maior nível de abstração em relação a estes objetos matemáticos.

Reflexões

A classificação hierárquica surgiu sem imposição da parte da professora e desenvolveu uma perspetiva global útil para enfatizar as relações entre os diferentes tipos de paralelogramos e economizar nas definições que tornam únicos os quadriláteros. Os cuidados referentes à negociação de significados e utilização de exemplos partindo das vivências dos alunos contribuíram para desbloquear eventuais dificuldades sentidas pela utilização de uma linguagem informal e partilhada por todos. Salienta-se que esta postura de não apresentar definições e classificações já prontas, mas em vez disso incentivar uma participação ativa do aluno nestes processos, enquadra-se num paradigma construtivista da aprendizagem.

A utilização de manipuláveis e de um programa de Geometria Dinâmica proporcionou aos alunos o desenvolvimento da destreza quer manual, quer tecnológica, além de permitir perspetivas complementares. A utilização dos *boomerangs* permitiu uma análise geométrica estática e concreta, enquanto que a passagem para o dinamismo do *Geogebra* proporcionou uma abstração no trabalho com objetos matemáticos e uma visualização destas figuras com «vida», isto é, com movimento. A valorização da integração da tecnologia nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática está presente em documentos curriculares portugueses (Breda *et al.*, 2011; ME-DGIDC, 2007; Ponte, 2009).

A discussão em grande grupo promoveu a negociação de significados entre elementos da turma e do pequeno grupo antes da sua apresentação à turma. De facto, a partilha de informação como fonte de negociação de significados, começou a dar lugar à necessidade dos alunos justificarem os seus raciocínios, primeiramente perante o grande grupo, estendendo-se ao longo da experiência para o pequeno grupo. Verificou-se ainda uma evolução na capacidade de comunicação matemática oral dos alunos no questionamento e no desenvolvimento do sentido crítico apresentados na argumentação utilizada em grande grupo.

A formalização de conceitos surgiu após uma exploração informal de conceitos e do estabelecimento de conexões matemáticas com esses mesmos conhecimentos prévios. Este método de trabalho parece ter sido adequado ao perfil dos alunos participantes, além de constituir uma orientação curricular presente

em ME-DGIDC (2007). Também a utilização de práticas culturais na partilha de ideias matemáticas e não matemáticas revelou-se um elemento catalisador de um ambiente confortável para os alunos onde o erro foi encarado com naturalidade e a diferença reconhecida com respeito. Um aluno seguro dos seus saberes empíricos tem tendência a arriscar a participação perante a turma e, deste modo, desbloqueia o caminho para evoluir no domínio da comunicação matemática. A inclusão de práticas culturais exploradas sob o ponto de vista matemático sugere a promoção da participação dos alunos e, consequentemente, do desenvolvimento de autoconfiança e da capacidade de comunicar matematicamente, além de revelar utilidade na tomada de decisões no mundo dos alunos.

Nota

- ^[1] *Boomerangs* são objetos de arremesso com origem em várias partes do mundo e foram criados para voltar à mão do lançador quando não atingem um alvo. Atualmente o lançamento de *boomerangs* é também um desporto.
- ^[2] A identificação das práticas culturais locais e culturalmente distinta, como é o caso do lançamento do boomerang, surgiram de um processo metódico e moroso que não se enquadra no objetivo deste artigo; contudo, a descrição detalhada de todo este processo pode ser consultada em Latas (2011).

Referências bibliográficas

- Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: ME-DEB.
- Bishop, A. (2005). *Aproximación sociocultural a la educación matemática*. Colombia: Universidad del Valle.
- Boaler, J. (1993). The role of contexts in the mathematics classroom: do they make mathematics more «real»? *For the Learning of Mathematics*, 13(2), 12–17.
- Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H. & Oliveira, P. (2011). *Geometria e medida no Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.
- Gerdes (1997). On culture, geometrical thinking and mathematics education. Em A. Powell & M. Frankenstein (Eds), *Ethnomathematics: Challenging eurocentrism in mathematics education* (pp. 223-247). New York: SUNY Press.
- Gerdes, P. (1992). *Sobre o despertar do pensamento geométrico*. Curitiba: Universidade Federal de Panamá.
- Gerdes, P. (2007). *Etnomatemática — Reflexões sobre a diversidade cultural*. Ribeirão: Edições Húmus.
- Latas, J. (2011). *O reconhecimento e a exploração da Matemática cultural: uma abordagem etnomatemática com alunos do 7.º ano de escolaridade*. Tese de Mestrado. Universidade de Évora.
- ME-DGEB (1991). *Programa de matemática — Organização do Ensino-Aprendizagem, Ensino Básico 3.º Ciclo*. Lisboa: ME-DEGEB.
- ME-DGIDC (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: ME-DGIDC.
- Ponte, J. P., Oliveira, P., & Candeias, N. (2009). *Triângulos e quadriláteros: Materiais de apoio ao professor*. Acedido em 20 de janeiro de 2012 de http://area.dgicd.min-edu.pt/materiais_NPMEB/002_Sequencia_Geometria_TrianguloseQuadrilateros_NPMEB_3c%28atual17maio2010.pdf
- De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11–18.

Joana Latas

EBI/JI de Aljezur