Grafos e outros conteúdos: algumas (im)possibilidades de conexões

C. Miguel Ribeiro
Rui Feiteira

Este texto resulta de uma reflexão efetuada após a dinamização de uma sessão prática e de um curso no âmbito do ProfMat onde se pretendia, entre outros aspetos, explorar diversas situações que permitissem efetuar uma abordagem informal à teoria de grafos — possível desde o 1.º Ciclo. Durante o decurso das atividades exploradas[1], surgiram algumas dúvidas e discussões relativamente aos casos em que se (poderia) deveria explicitar que se estava a utilizar a teoria de grafos e em que ocasiões uma mesma representação (modelação) poderia ser, ou não, utilizada para estudar outros conteúdos, e, em cada caso, quais.

Com o intuito de podermos elucidar em que casos se pode, ou não, utilizar a modelação, com recurso ao que se denomina por grafos, apresentamos alguns exemplos de tarefas em que a modelação das situações específicas permite abordar conteúdos tão distintos como sejam alguns conceitos base de função ou de probabilidades, mas não permitem, nunca, passar da modelação efetuada nessas mesmas ocasiões para uma exploração geométrica da mesma. Uma das possíveis razões que pode explicar a ocorrência de situações em que isso se verifica poderá ser a de confundir um grafo com a sua representação gráfica ou geométrica, que são, definitivamente coisas bastante distintas.

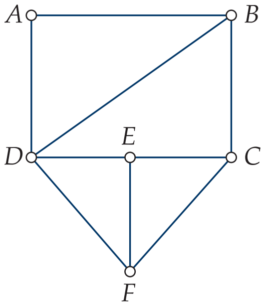


Figura 1

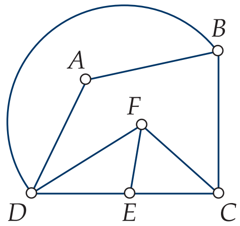


Figura 2

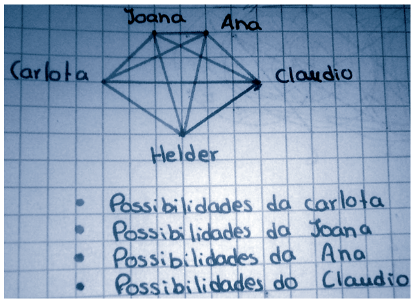


Figura 3

Definir um grafo, de modo a que até um aluno do 1.º Ciclo o entenda poderá ser através de um enunciado simples, por exemplo: «um grafo é uma figura (desenho) formado por dois conjuntos, sendo um deles o conjunto ‹das coisas› (que podem ser alunos, blusas, peças de dominó, …) e o outro o conjunto das relações entre essas ‹coisas›», ou seja, trata-se de figuras compostas por «coisas» que podem estabelecer relações entre si; no caso de estas se verificarem elas são evidenciadas através de ligações entre si. De uma forma menos intuitiva, e mais formal, — para que não possamos ser acusados, pelos mais cépticos, de falta de rigor matemático — um grafo é um par ordenado $G = (V, A)$ de conjuntos finitos, onde V é o conjunto de vértices e A é uma coleção de subconjuntos de dois elementos de V, a que se chama conjunto de arestas. É de salientar que esta nomenclatura nada tem a ver com a de vértices e arestas no contexto geométrico, são portanto homónimas. Este último conjunto, o conjunto das arestas é fundamental, pois são elas que nos informam (ou nos permitem informar) da existência de relações entre os elementos do conjunto dos vértices.

A título de exemplo apresentamos duas representações possíveis da modelação de uma situação em contexto real (por exemplo, possíveis formas de circular pelas divisões de uma habitação). (Figura 1 e 2)

Ambas as figuras podem ser definidas pelo par ordenado $G = (V, A)$ onde $V = \{A, B, C, D, E, F\}$ e

$$A = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{E, C\}, \{E, D\}, \{D, A\}, \{D, B\}, \{E, F\}, \{D, C\}, \{F, C\}\}.$$

Através da figura 1 poderíamos ser tentados a pensar em conceitos geométricos (quadrado, triângulos, pentágono, hexágono). Porém, claramente isso já não poderia ocorrer considerando a figura 2 (o que só por si nos poderá levar a pensar se este tipo de exploração geométrica, neste contexto, teria algum sentido). Este é um dos aspetos que queremos salientar que não podem nunca acontecer considerando situações desta índole como ponto de partida para a modelação.

Feito este importante parêntesis, apresentamos um conjunto de tarefas, bem como suas possíveis explorações, em contextos e anos de escolaridade bastante diversos, justificando como e porquê, se poderão utilizar nuns casos e nunca noutros. Grande parte destas tarefas foi já realizada em contexto de sala de aula — do 1.º Ciclo ao ensino secundário —, e em contextos em que a resolução de problemas ocorreu associada a tarefas promotoras de verdadeiras aprendizagens (Lesh, Hoover, Kelly, & Post, 2000), sendo o processo de resolução encarado como metodologia/processo, por via do qual são desenvolvidos diversos conteúdos (Leal, Veloso, & Abrantes, 1994) e não como um conteúdo *per si*. Com o intuito de que a resolução de problemas e a modelação possam assumir este papel de promoção de efectivas aprendizagens, conduzindo os alunos a um nível de raciocínio superior, é importante que ocorram associados a tarefas preparadas de forma a encorajar a realização de múltiplas abordagens e interpretações; dêem prioridade à comunicação matemática; tornem necessária uma documentação dos resultados finais e façam da auto-avaliação uma sua componente inerente.

No caso concreto, as situações apresentadas foram preparadas tendo por pano de fundo a pretensão de que, durante o processo de resolução, os alunos fossem construindo uma noção de grafo válida bem como de algumas das suas propriedades — sem que para isso se chegue necessariamente a quaisquer tipos de formalização, ocorrendo esta quando exclusivamente necessário ou solicitado pelos alunos como forma de simplificar a sua própria representação.

Com o intuito de permitir que os alunos possam modelar matematicamente momentos do seu quotidiano, contribuindo também para uma consciencialização da presença desta ciência no seu dia a dia, consideramos que devemos, preferencialmente, partir das realidades vivenciadas pelos alunos e trazê-las para a sala de aula, em forma de problema. Uma destas situações em que, pelo menos nas turmas em que foi proposta, os alunos referiram, na fase inicial, que não tinha qualquer tipo de relação com a disciplina de matemática prendia-se com a prática do desporto. De modo a abordar situações de modelação, e sua exploração matemática, centradas em momentos «improváveis» da existência de matemática, optámos por preparar uma tarefa em que se parte de um aquecimento em andebol para a modelação. Este tipo de tarefa é, em tudo, similar, ao caso do problema dos abraços ou dos apertos de mão, mas é, cremos, para os alunos, mais motivadora e desafiante. Vários outros tipos de problemas podem ser utilizados para introduzir a modelação e o conceito de grafo. Muitos deles são utilizados inclusivamente desde o 1.º Ciclo e podem estar relacionados com as famosas máquinas de fazer contas (entra um número e após uma série de operações obtém-se o resultado), com as relações existentes entre um conjunto de animais e um de plantas, com a determinação do número de formas distintas (combinações possíveis) de vestir n saias diferentes e m blusas também elas diferentes, ou diferentes

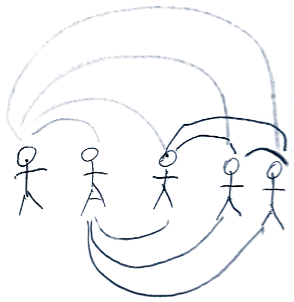


Figura 4

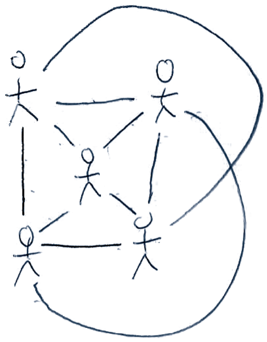


Figura 5

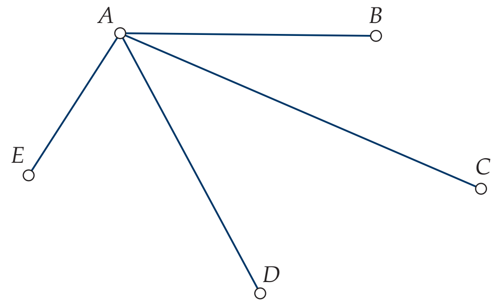


Figura 6

tipos de gelados que se podem fazer com, por exemplo, 2 sabores de entre 3 possíveis.

A tarefa seguinte foi apresentada a várias turmas desde o 3.º até ao 12.º ano de escolaridade e em todas elas, apesar de apresentarem resoluções que evidenciavam níveis de desenvolvimentos distintos (mas não de forma necessariamente linear com o avançar dos anos), sem grande dificuldade, os alunos apresentaram uma solução.

O aquecimento

Numa aula de educação física, em que se vai jogar andebol, durante o aquecimento, em grupos de cinco, para quem é que cada um dos alunos pode passar a bola? Como poderemos representar todas as distintas situações possíveis?

Esta situação, tal como problema que é, poderá ser resolvida de distintas formas recorrendo a diversos processos de representação (e. g. tabela, listagem, desenhos) devendo todas elas ser exploradas para que os alunos se possam consciencializar disso mesmo. Recorrendo ao desenho/esquema os alunos fazem diferentes tipos de representações (equivalentes). (Figuras 3, 4 e 5)

Através da exploração deste caso «simples», para além da modelação e do estudo dos grafos (que nem era um dos pressupostos iniciais), podemos tornar óbvias algumas relações possíveis de estabelecer entre distintos tópicos e conteúdos matemáticos que os alunos frequentemente consideram encontrarem-se de costas voltadas, ignorando-se completamente. Podemos explorar contextos tão variados como sejam, por exemplo, o conceito de função e de variável dependente e independente, sequências numéricas, generalizações de termos gerais de progressões e probabilidades.

Com a exploração deste tipo de atividades, sem que seja para isso necessário um contexto formal de obrigatoriedade de abordagens de determinados conteúdos, estamos a facultar aos alunos um contacto antecipado com eles — ainda que de forma intuitiva — bastante mais cedo do que ocorre normalmente. Mas por serem abordagens informais, que resultam de ocasiões que os alunos assumem como suas, permitimos-lhes, desta forma, que vão construindo os conceitos ao longo do tempo com verdadeira compreensão, cimentando assim de forma mais sólida os pilares da sua formação matemática. Vejamos exemplos de como se poderia partir desta situação para explorar cada um dos conteúdos referidos anteriormente. Poderíamos efetuar uma primeira (ou mesmo intensiva) abordagem ao estudo das

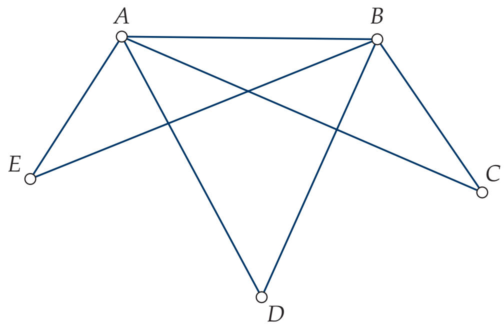


Figura 7

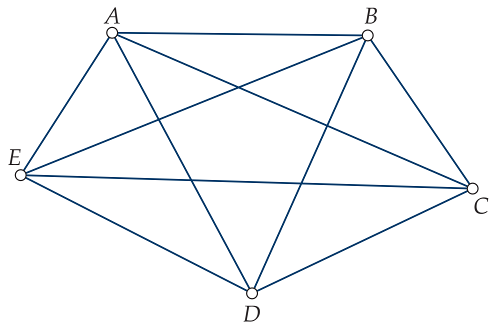


Figura 8

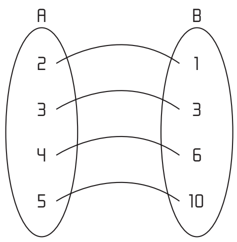
funções, utilizando a tarefa anterior bastando para isso ir efetuando a modelação passo a passo, supondo que é o amigo A que possui a bola. (Figura 6)

O amigo *A* poderá passar a bola aos amigos *B*, *C*, *D* e *E*. Por sua vez, o amigo *B* pode passar a bola ao amigo *C*, *D* ou *E*. (Figura 7) É de salientar que estamos interessados em registar as relações entre os amigos, relações essas que se referem ao facto de a bola ter já, ou não, circulado entre cada um deles. (Situação análoga à que ocorre com os apertos de mão onde *A* cumprimentar *B* é o mesmo, em termos de modelação da situação, que o inverso — não se considerando os sentidos, isto porque a relação «passar a bola» é de facto uma relação simétrica.)

Procede-se de forma análoga para os outros dois amigos que faltam. (Figura 8)

Facilmente se constata que são dez as formas distintas de a bola circular entre todos. E se agora fossem 6 amigos? E 8? E n amigos? (dependendo do nível de desenvolvimento dos alunos).

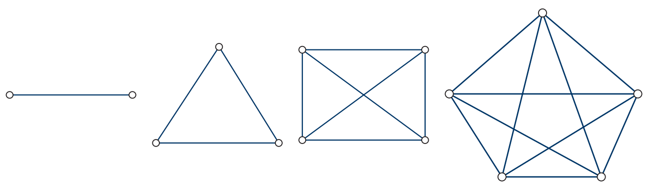
Com este processo de construção, os alunos rapidamente se apercebem de que ao introduzirem um novo amigo no grupo, o número de formas de passar a bola vai depender de quantos já se lá encontram. Assim, se considerarmos o número de amigos como conjunto de partida, $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ e $B = \{1, 3, 6, 10, \ldots\}$



o número de ligações como conjunto de chegada, podemos transformar a modelação em diagrama sagital, tabela, gráfico ou padrão, surgindo a noção de correspondência unívoca, mas também, intuitivamente, de dependência. Permite ainda explorar as conexões entre as diferentes formas de representação, partindo de um grafo, com os seus vértices e arestas, e obtendo, em última instância, uma representação gráfica (relembramos que um grafo não fica definido pela sua representação gráfica).

N.º amigos	2	3	4	5
N.º de passes	1	3	6	10

Um outro conteúdo que se encontra ao alcance deste ponto de partida (o aquecimento em andebol) é o das sequências numéricas como forma de determinar padrões numéricos. Começamos por considerar que no aquecimento só participam 2 alunos e registemos as possibilidades de passes. Depois vamos pedindo a outros alunos para se juntarem ao grupo. O caso descrito pode ser representado utilizando os esquemas seguintes:



Convertendo em forma de tabela, de modo a que os alunos tenham de completar a informação em falta — também para que tomem contacto e se habituem a que uma mesma situação poderá ser apresentada de distintas formas, obtemos, por exemplo:

2 alunos			8 alunos	n alunos
1 possibilidade	3 possibilidades	10 possibilidades		

O preenchimento das 4 primeiras colunas é relativamente fácil, basta para tal analisar figura a figura. O problema coloca-se na última coluna. Quantas ligações existem para n alunos? Para responder a esta questão comecemos por notar que, em qualquer das figuras, todos os vértices estão ligados entre si — existe uma relação entre todos os alunos. Uma abordagem possível começa por contar quantas ligações chegam a cada vértice; para obter o total de ligações das figuras, basta somá-las. Assim,

Número de pontos	Soma das ligações	N.º de ligações
2	$1+1=2$	1
3	$2+2+2=6$	3
4	$3+3+3+3=12$	6
5	$4+4+4+4+4=20$	10
8	8×7	
N	$n(n-1)$	

Em cada uma das situações anteriores o número de ligações de cada vértice é inferior em uma unidade ao número total de vértices (pontos). Assim, para conhecermos qual o número total de ligações basta multiplicar o número de pontos pelo número de ligações que cada ponto apresenta, dividindo posteriormente por dois, obtendo-se assim o resultado para qualquer n pertencente ao contexto ($n \in \mathbb{N}$). Este resultado foi facilmente determinado, até por alunos do 1.º Ciclo, referindo um deles que, «se contássemos todas estávamos sempre a dobrar as ligações de cada ponto, portanto temos de fazer o contrário, dividir por dois».

Utilizando a mesma situação do aquecimento, podemos modela-la, através de representação gráfica de grafos de modo a abordar o tema das probabilidades[2]. Se os alunos — dez no total — estiverem vestidos com quatro coletes brancos e os restantes pretos, de que forma pode o professor escolher, ao acaso, (por exemplo atirando a bola ao ar e quem a apanhar será o escolhido) dois deles para exemplificar um determinado exercício? Qual a probabilidade de que o colete de ambos seja branco?

Uma forma de modelar esta situação é através de uma representação gráfica de um grafo; denominada tradicionalmente por diagrama de árvore ou por árvore de probabilidade. (Figura 9)

Voltando à questão anterior, para responder basta escolher o caminho adequado, ou seja, procurar a forma de ir desde o início até ao final sempre perseguindo a mesma cor — a primeira bola é apanhada por um aluno (com colete preto ou branco) e após lançar a segunda bola, procurar as situações que podem ocorrer de forma que o aluno que a apanhe tenha um colete da mesma cor do anterior. Recorrendo à visualização gráfica do grafo facilmente se determina a probabilidade pretendida

$$P\text{ (escolher dois atletas de camisola branca)}=$$
$$= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}.$$

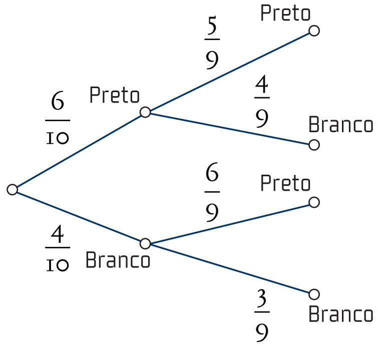


Figura 9

Com este conjunto de atividades pretendemos ilustrar algumas possíveis formas de, partindo de uma mesma situação, abordar áreas matemáticas bastante distintas ao longo dos ciclos de escolaridade. Esta abordagem pode ser efetuada nos anos em que esses conteúdos fazem parte do currículo ou, tal como no nosso caso, em anos bastante anteriores (com as necessárias adaptações), de modo a que os alunos tomem contacto com eles o quanto antes. Esta tomada de contacto permitir-lhes-á irem efetivamente integrando estes conceitos no seu conhecimento matemático, de forma a que quando forem formalizados não lhes sejam de todo estranhos.

Pretendemos também, a um outro nível, salientar que, apesar de muitas das situações do quotidiano serem suscetíveis de modelação através de grafos, nem todas são exequíveis noutros contextos que envolvam ou explorem conteúdos relativamente aos quais não existe qualquer tipo de relação. O facto de se efectuarem modelações que permitam ao aluno criar os seus significados e a capacidade de aplicar os conhecimentos adquiridos em contextos diferentes daqueles onde foram apreendidos, conduz a que estes lhes atribuam um caráter móvel através de uma rede conceptual. Porém, se nas oportunidades que lhes facultamos, introduzimos alguma alteração (de forma, conteúdo ou contexto) menos adequada, poderemos levar à formação de buracos negros em tais redes conceptuais (tornando-as portanto menos densas), traduzindo-se mais previsivelmente na criação de lacunas e incongruências nos conhecimentos adquiridos e entre estes e os anteriores/posteriores do que em progressos efetivos no processo de generalização dos conhecimentos.

Como último apontamento queremos salientar, mais uma vez, que nem sempre é possível recorrer aos grafos ou à sua representação gráfica para explorar alguns conteúdos, como sejam, por exemplo, conteúdos geométricos. Esta impossibilidade não é imediatamente óbvia, — pois podemos representar as arestas dos grafos como segmentos de reta e os pontos imagem da modelação por vértices — sendo necessária alguma análise para averiguar em que situações, e para que contextos, essa transposição se torna possível, sendo matematicamente coerente.

Notas

[1] Algumas das tarefas propostas na sessão prática podem ser consultadas nas atas do ProfMat2008.

[2] Apesar de fazer parte integrante do Programa do 9.º ou do 12.º ano, esta forma de representação é (pode ser) também utilizada logo no 1.º Ciclo, para modelar, por exemplo problemas envolvendo multiplicação interpretada como reunião de conjuntos, modelo combinatório, bem como envolvendo a reta numérica e o modelo retangular.

Referências

Leal, L., Veloso, E., & Abrantes, P. (1994). Pode haver um currículo de Matemática centrado na resolução de problemas? In D. Fernandes & A. Borralho & G. Amaro (Eds.), *Resolução de problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 239–259). Lisboa: IIE.

Lesh, R., Hoover, M. B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thoughts-revealing activities for students and teachers. In R. A. Lesh & A. Kelly (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591–646). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

C. Miguel Ribeiro

CIEO, Universidade do Algarve

Rui Feiteira

Escola Secundária Poeta António Aleixo, Portimão