



O desenvolvimento do sentido de número e as tarefas

Uma reflexão de duas professoras

Alexandra Rocha
Cristina Natália da Fonseca

Neste artigo mostramos de que forma trabalhámos o tema *Números e Operações* no 7.º ano, nesta fase de transição de implementação do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) (PMEB). A nossa intenção é explicar de que forma tirámos partido de materiais já existentes tendo como objectivo o tratamento do tema.

O programa surge com uma estrutura diferente do anterior, permitindo que o professor faça, dentro de cada tema, uma leitura da articulação entre os três ciclos, do propósito principal de ensino, dos objectivos gerais de aprendizagem, das indicações metodológicas e dos tópicos e objectivos específicos. No entanto, tal como os autores mencionam, apesar de os tópicos matemáticos serem apresentados de forma sistematizada e sinté-

tica, o professor não se deve cingir a esta lista de tópicos nem os deve trabalhar de forma isolada na sala de aula. Na preparação das suas aulas, para que não perca de vista o propósito principal de ensino do tema, deverá ter o cuidado de seleccionar materiais que explorem os referidos tópicos, a par das capacidades transversais, por forma a atingir cada um dos objectivos gerais de aprendizagem dos respectivos temas (matemáticos e capacidades transversais).

Nesta perspectiva, exemplificamos como contemplámos na nossa prática o propósito principal de ensino do tema *Números e Operações* — o desenvolvimento do sentido de número — a partir de algumas das tarefas que seleccionámos para os nossos alunos. Esta selecção só foi possível depois de uma apropriação

do que se entende por *desenvolvimento de sentido de número*, pois de outro modo seria difícil compreender a potencialidade de algumas tarefas para o tratamento deste tema. As tarefas por si só não explicam de que modo pode ser desenvolvido o sentido de número, é necessário que o professor tenha um conhecimento aprofundado sobre este assunto, para que a preparação das suas aulas e a sua ação na sala de aula sejam adequadas ao cumprimento deste propósito.

Sentido de Número

O sentido de número está aberto a uma variedade de interpretações, uma vez que depende da compreensão que um indivíduo tem dos números e das operações. Embora esta compreensão seja pessoal, alguns autores referem que podemos identificar um conjunto de características comuns a todos os indivíduos.

Assim, McIntosh, Reys e Reys (1992) referem que o sentido de número, para além de estar relacionado com a compreensão geral que se tem dos números e das operações, também está associado à habilidade e à propensão para usar esta compreensão de modo flexível sempre que seja necessário realizar julgamentos matemáticos e conceber estratégias úteis para lidar com os números e as operações. Além disso, apontam que o sentido de número incide numa capacidade e tendência para usar os números e métodos quantitativos como meios para comunicar, interpretar e processar informação.

No seu modelo destacam-se três componentes do sentido de número relacionadas entre si: conhecimento e destreza com os números, conhecimento e destreza com as operações, aplicação do conhecimento e da destreza com os números e com as operações em situações de cálculo. A primeira componente compreende alguns aspetos relacionados com o sentido da regularidade dos números, múltiplas representações dos números, sentido de grandeza relativa e absoluta dos números e sistemas de referência. A segunda relaciona-se com a compreensão do efeito das operações, das propriedades matemáticas e das relações entre as operações. Por fim, a terceira componente envolve a compreensão da relação entre o contexto de um problema e os cálculos necessários, a consciencialização da existência de múltiplas estratégias, a apetência para usar uma representação e/ou um método eficiente e uma sensibilidade para rever os dados e o resultado.

O modelo possibilita uma operacionalização do desenvolvimento de sentido de número de acordo com as actuais orientações do PMEB (ME, 2007), nomeadamente no tratamento do tema Números e Operações ao longo dos três ciclos.

A sequência de tarefas

Tendo em vista o desenvolvimento do sentido de número, elaborámos uma sequência de tarefas que permitisse aos alunos uma construção de conhecimento sobre o tema e, em simultâneo, a sua compreensão, de forma gradual, implicando a utilização de processos de pensamento cada vez mais complexos e o desenvolvimento das capacidades transversais. Esta sequência foi marcada pela construção, compreensão e mobilização do conhecimento e, por esse motivo, ele próprio desenvolveu-se associado às três componentes do sentido de número definidas

no modelo de McIntosh, Reys e Reys (1992). O modo como o aluno efectua o percurso de aprendizagem decorre da forma de ensino que é traduzida pelo conjunto de tarefas propostas. É de notar que uma tarefa não tem como objectivo desenvolver especificamente uma das componentes do sentido de número. Esta será tanto mais rica se estimular o aluno a trabalhar diferentes componentes, proporcionando-lhe, assim, uma visão mais abrangente, completa e flexível do sentido de número. Assim, ao seleccionarmos e sequenciarmos as tarefas, tivemos a preocupação de que, de umas para as outras, os alunos tivessem a oportunidade de construir conhecimentos a partir de outros já adquiridos, seguindo as orientações do PMEB (ME, 2007). Tivemos também o cuidado de que permitissem o trabalho em torno de mais do que uma componente do sentido de número, trabalhando assim o desenvolvimento de sentido de número na sua globalidade.

O primeiro conjunto de tarefas, centrado nos números naturais, permitiu o estudo dos números primos e compostos, da decomposição de um número em fatores primos, de outros subtópicos associados aos conceitos de divisor e múltiplo e ainda a noção de raiz quadrada e cúbica de um número. O segundo possibilitou o estudo dos números inteiros no que diz respeito à sua identificação, representação, ordenação e comparação. Além disso, proporcionou um trabalho em torno das quatro operações e também uma abordagem às potências de base inteira e expoente natural.

As tarefas seleccionadas para leccionar os tópicos referidos apresentaram características distintas quanto ao contexto, ao grau de dificuldade e de estrutura. Em relação ao contexto, algumas das tarefas continham situações reais e próximas das experiências quotidianas dos alunos (questões 1 e 3 da tarefa *Adição de Números Inteiros*), outras eram formuladas em contexto puramente matemático (questões 1 e 2.1 da tarefa *Multiplicação de Números Inteiros*). Em relação ao grau de dificuldade e de estrutura, algumas tarefas situavam-se no quadrante «difícil e aberta» (tarefa *Retângulos e mais retângulos*), outras no «difícil e fechada» (tarefa *Alvo*) (Ponte, 2005). Além disso, foram também fornecidas tarefas de natureza processual cujo grau de dificuldade era reduzido e a sua estrutura fechada. As tarefas *Adição de Números Inteiros* e *Multiplicação de Números Inteiros* são adaptadas dos materiais de apoio ao professor disponibilizados pela DGIDC e da autoria dos professores das turmas-piloto do 7.º ano (2009). As restantes tarefas aqui apresentadas foram construídas a partir de situações encontradas em manuais escolares.

Neste artigo descrevemos exaustivamente a cadeia de tarefas utilizada, apresentando apenas algumas das tarefas ou parte delas com o objectivo de evidenciar como se pode trabalhar alguns aspetos relativos ao sentido de número, baseando-nos no modelo de McIntosh, Reys e Reys (1992).

O desenvolvimento de sentido de número e as tarefas

Nesta secção será feita uma análise de algumas das tarefas, ou de parte destas, da cadeia utilizada por nós na abordagem do tema Números e Operações do 7.º ano, no ano lectivo de 2009/10. Na nossa análise, enquadrámos as tarefas e as situações nas três componentes do desenvolvimento do sentido de número, não

Retângulos e mais retângulos

1. Quantos retângulos diferentes, com dimensões inteiras (comprimento e largura), consegues desenhar com área igual 12?
Nota: Utiliza o quadriculado do teu caderno e considera como unidade de área uma quadrícula.
2. Será que obténs o mesmo número de retângulos com área 16? E com área 7?
Regista as tuas observações.
3. Estabelece uma relação entre as dimensões dos retângulos que desenhaste e as suas áreas.
4. Investiga se há alguma relação entre o número de retângulos e a sua área. Regista as tuas conjeturas, apresentando uma justificação.

Extensão à tarefa

5. Investiga quais são os números naturais que têm um número ímpar de divisores.
6. Descobre quais são os números que têm exatamente três divisores.

Figura 1. Tarefa *Retângulos e mais retângulos*

1. O João vive num prédio com 20 pisos, em que o piso -1 e o piso -2 correspondem às garagens.
 - 1.1. O João entra no elevador no rés-do-chão.
 - a. Em que botão deve carregar para subir dois andares? E para descer um andar?
 - b. O que acontece se carregar no botão $+3$? E no botão -2 ?
 - 1.2. Imagina que o João está no 6.º andar.
 - a. Em que botão do elevador deve carregar para subir nove andares?
 - b. E para descer sete andares?
 - c. Se carregar no botão $+2$ quantos andares desce?
 - d. E se carregar no botão -2 quantos andares desce?

Figura 2. Questão 1 da tarefa *Adição de Números Inteiros*

sendo nossa preocupação exibí-las pela ordem como surgiram na cadeia de tarefas fornecidas aos alunos.

Conhecimento e destreza com os números

No 7.º ano, foi necessário abordar os conceitos de números primos e compostos, tendo como ponto de partida conceitos adquiridos em anos anteriores, uma vez que nos encontrávamos na fase de reajustamento do programa. A tarefa que selec-

cionámos e adaptámos *Retângulos e mais retângulos* permitiu alargar o conhecimento que os alunos têm sobre os números e respectivas características. Ao ser-lhes pedido que desenhem todos os retângulos com uma determinada área, em que o comprimento e a largura são números inteiros, os alunos conseguem identificar mais facilmente regularidades e associá-las a propriedades dos números envolvidos a partir das construções geométricas efectuadas.

Nesta tarefa, os alunos são convidados a construir retângulos com uma determinada área numa grelha quadriculada, sendo levados a relacionar os números que representam as dimensões dos retângulos com o número que representa a medida da sua área. Esta abordagem possibilita que os alunos, de uma forma intuitiva, determinem todos os divisores de um número, revisitem este conceito — que em alguns casos está esquecido ou é confundido com o conceito de múltiplo de um número — e adquiram uma estratégia para os determinar a partir da decomposição num produto de dois fatores inteiros. A par disto, os alunos são confrontados com diferentes decomposições de um número num produto de dois fatores inteiros antecipando o trabalho em torno da decomposição em fatores primos.

Durante a atividade em torno desta tarefa, processos matemáticos como a organização de dados e a formulação de conjeturas são postos em evidência pelos alunos, facilitando uma atividade de exploração que conduz à identificação de regularidades. Nesta investigação, entre outras observações, espera-se que os alunos assinalem as medidas de áreas para as quais só é possível construir um único retângulo com dimensões diferentes. Deste modo, serão criadas condições para que os alunos construam um novo conceito — número primo. Pelo facto da exploração ser feita no contexto geométrico e os alunos utilizarem representações gráficas dos números, é-lhes possível construir mais facilmente este conceito.

De forma análoga, a representação gráfica dos números também possibilita a aprendizagem do conceito de número quadrado perfeito. Na exploração realizada pelos alunos, estes devem deparar-se com medidas de área para as quais é possível construir quadrados. Este aspeto pode levantar a discussão em torno da classificação de quadriláteros, mais especificamente, se o quadrado é um retângulo. Sendo ultrapassada esta questão, os alunos tomam conhecimento de um conjunto de números que podem ser decompostos num produto de dois fatores iguais, associando, de modo natural, a sua forma de representação gráfica à designação destes números — quadrados perfeitos. A exploração em torno dos números quadrados perfeitos pode permitir uma abordagem inicial ao conceito de raiz quadrada, também trabalhada neste tema, neste ano de escolaridade.

Conhecimento e destreza com as operações

O tópico relativo à adição de números inteiros é tratado no 7.º ano, nesta fase de transição entre os dois programas. A tarefa seleccionada *Adição de Números Inteiros* apresenta aos alunos três situações do quotidiano que, em conjunto, permitem um trabalho que favorece o desenvolvimento de sentido de número. O contexto real e próximo das vivências dos alunos dá significado aos números inteiros envolvidos nessas situações assim como à operação de adição entre eles (que surge de forma natural na procura de resposta às questões formuladas).

2.1. Na tabela seguinte multiplica os números de cada linha e de cada coluna.

+3	-2	+4	
-4	+4	+2	
-2	+3	-3	

Figura 5. Questão 2.1 da tarefa *Multiplicação de Números Inteiros*

da multiplicação, os alunos compreenderão que o produto de um número negativo por um positivo é um número negativo. Importa assinalar que neste ciclo de ensino não é suposto que os alunos provem que a propriedade comutativa da multiplicação continua a ser verdadeira no conjunto de números inteiros.

Tendo em conta os exemplos apresentados na própria tabela, os alunos efetuam o seu preenchimento, assumindo que o produto de dois números inteiros negativos é um número positivo, sem questionar a veracidade desta regra. O professor poderá antecipar uma explicação caso esta seja posta em causa pelos alunos. Um modo de os tentar convencer será recorrer à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de números inteiros (mais uma vez não é suposto que os alunos provem que esta propriedade é válida no conjunto dos números inteiros), utilizando um exemplo do tipo:

$(-3) \times (8 + (-2)) = (-3) \times (+6) = -18$ (efectuar o cálculo tendo em conta a prioridade da operação entre os parêntesis)

$(-3) \times (8 + (-2)) = (-3) \times (+8) + (-3) \times (-2) = (-24) + ?$ (efectuar o cálculo aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição)

Como $(-24) + ? = -18$, então $? = +6$

Deste modo, conclui-se que $(-3) \times (-2) = +6$

Este é um exemplo, entre outros, que pode facilitar a aceitação de que o produto de dois números inteiros negativos é um número positivo.

A questão 2.1. tem, aparentemente, como objectivo desenvolver a destreza de cálculo. No entanto, os alunos poderão resolvê-la de modos diferentes, por exemplo:

$$(+3) \times (-2) \times (+4) = (-6) \times (+4) = (-24)$$

ou

$$(+3) \times (-2) \times (+4) = (+3) \times (-8) = (-24)$$

Tirando partido das resoluções dos alunos, o professor deverá pôr em evidência que a multiplicação goza da propriedade associativa.

Com a exploração da tabela da primeira questão e da resolução da questão 2.1. é possível trabalhar todas as propriedades relativas à multiplicação de números inteiros.

Aplicação do conhecimento e da destreza com os números e com as operações em situações de cálculo

A tarefa *Alvo* foi trabalhada pelos alunos após o tratamento do subtópico adição de números inteiros. Trata-se de um problema numérico que envolve múltiplas representações de um número, mais especificamente, a decomposição de um número na soma de números inteiros.

A resolução deste problema implica que os alunos tenham, inicialmente, de compreender a relação entre o contexto do problema e os cálculos necessários para obter uma resposta. Neste caso, é importante que compreendam que para obterem uma dada pontuação registada na tabela têm de adicionar três dos números apresentados no alvo. Posteriormente, terão de encontrar uma estratégia de resolução do problema que lhes permita determinar as diferentes combinações para cada pontuação obtida pelos quatro amigos. É esperado que os alunos comecem por efectuar combinações de forma aleatória e, só depois de observarem as experiências realizadas, se apercebam que existe um processo mais eficiente para determinar as soluções do problema. Esta estratégia envolve dois aspetos das componentes *Conhecimento e destreza com os números* e *Conhecimento e destreza com as operações*, nomeadamente, a decomposição de um número e a utilização do conhecimento das propriedades das operações na eficiência do cálculo. Por exemplo, para obter a pontuação do Joel, os alunos terão de compreender que a soma de duas das parcelas terá de ser simétrica em relação à terceira para que o resultado seja zero. Por fim, os alunos terão de elaborar um pequeno texto, onde deverão explicar se é possível os amigos obterem as pontuações de diferentes maneiras, nos três lançamentos, justificando as suas ideias com base nas diferentes combinações efectuadas. Deste modo, promover-se-á também o desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática.

A concluir

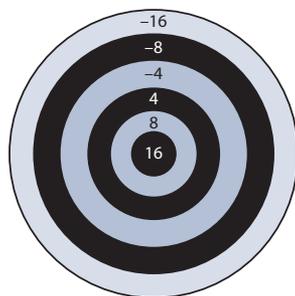
A componente *conhecimento e destreza com os números* envolve, entre outros aspetos, a capacidade de efectuar múltiplas representações de um número, sendo a decomposição num produto de fatores um modo particular de encontrar formas numéricas equivalentes. Outro aspeto desta área do sentido de número é o sentido de ordenação dos números, que envolve a capacidade de estabelecer relações entre diferentes tipos de números. Com a tarefa *Retângulos e mais retângulos*, os alunos ao tomarem conhecimento dos números quadrados perfeitos e das formas de os representar (numérica e gráfica) adquirem bases para compreenderem as relações numéricas entre estes números e as suas raízes quadradas. Desta forma, os alunos ficam mais aptos para compararem números representados por raízes quadradas, sendo capazes de estabelecer o enquadramento de uma dada raiz quadrada de um número inteiro entre dois números inteiros consecutivos.

Os aspetos chave da componente *conhecimento e destreza com as operações* são a capacidade de compreender o efeito das operações, a relação entre elas e as propriedades das operações.

O conceito de uma operação só é totalmente adquirido quando existe uma compreensão do efeito da operação num conjunto de números. Com a tarefa *Adição de números inteiros* os alunos constroem um modelo (reta numérica) que os ajuda



Na figura está representado um alvo. O resultado obtido corresponde à soma das pontuações em cada conjunto de lançamentos. Após três lançamentos, os resultados obtidos por quatro amigos foram:



Nome	Número de pontos
João	16
Carlos	32
Joel	0
Cláudio	20

Numa pequena composição, explica se é possível, após três lançamentos, os amigos obterem, de maneiras diferentes, os resultados apresentados na tabela.

Figura 6. Tarefa *Alvo*

a compreender a ação da adição entre números inteiros. Mais tarde, recorrem, por iniciativa própria, à reta numérica para trabalhar a subtração entre números inteiros, apreendendo também o efeito desta operação neste conjunto de números. O facto de se optar por situações do quotidiano, em particular a situação da peixaria, sobre as quais os alunos têm intuições fortes que lhes permitem fazer asserções seguras sobre a adição de números inteiros, reforça a compreensão do efeito desta operação neste conjunto de números.

Com a tarefa *Multiplificação de números inteiros* os alunos tiram partido do conhecimento que têm da operação adição para compreenderem o efeito da multiplicação no conjunto dos números inteiros, relacionando as duas operações. O efeito da multiplicação de números inteiros é totalmente entendido quando os alunos recorrerem às propriedades da operação de multiplicação para operar.

Ao propor tarefas que permitam trabalhar os três aspetos da componente conhecimento e destreza com as operações (o efeito das operações, a relação entre elas e o conhecimento das suas propriedades), os alunos compreendem os conceitos envolvidos e, quando efetuam cálculos, recordam-se mais facilmente e de forma correta dos métodos de cálculo. De facto, existindo uma relação de equilíbrio entre esta compreensão e a competência de cálculo promove-se o desenvolvimento da destreza de cálculo.

A componente aplicação do *conhecimento e da destreza com os números e operações* surge muito associada aos processos envolvidos na resolução de problemas, como por exemplo o aspeto relativo à compreensão da relação entre o contexto do problema e o cálculo necessário confunde-se com a definição de uma estratégia de ataque ao problema. Além disso, como esta componente envolve o conhecimento sobre os números e as operações e a facilidade de lidar com eles, naturalmente, tal como McIntosh *et al.* (1992) referem, alguns dos aspetos das outras duas componentes confundem-se com esta componente. Na tarefa *Alvo*, o aspeto «múltiplas representações de um número», relativo à componente conhecimento e destreza com os números, surge associado à «inclinação para utilizar

uma representação eficiente e/ou um método de cálculo» desta componente.

Neste artigo, através de algumas tarefas e alguns exemplos, descrevemos como procurámos desenvolver o sentido de número dos nossos alunos no tratamento do tema Números e Operações no 7.º ano. Este trabalho resultou, por um lado, da necessidade de nos adaptarmos a um reajuste do PMEB (ME, 2007), e, por outro, do hábito que temos de refletir sobre a nossa prática e aprofundar o nosso conhecimento científico e didático.

No fim deste trabalho, reconhecemos que para implementar o programa na aula de Matemática é fundamental que o professor seja capaz de definir um percurso de aprendizagem refletido nas tarefas que propõe aos seus alunos. Neste sentido, se as tarefas de algum modo traduzem o percurso de aprendizagem, impõe-se ao professor um grande desafio na selecção dos materiais a utilizar na aula de matemática. Apesar da sequência de tarefas por si só não conduzir à concretização das aprendizagens matemáticas dos alunos, é um recurso fundamental para ajudá-los a realizar o percurso definido.

Referências

- Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC. (disponível online)
- McIntosh, A., Reys, B., Reys, R. (1992). A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the Learning of Mathematics*, vol. 12 (3), 2–8.
- Professores das turmas-piloto do 7.º ano de escolaridade (2009). *Números inteiros — Proposta de sequências de tarefas para o 7.º ano — 3.º ciclo (materiais de apoio ao professor)*. Lisboa. (retirado de http://area.dgicd.min-edu.pt/materiais_NPMEB/016_Sequencia_Numeros_Inteiros_TP_3c7.pdf em 02/08/2011)
- Ponte, J. P. (2005). *Gestão Curricular em Matemática*. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Alexandra Rocha

Escola Secundária de S. Pedro da Cova

Cristina Natália da Fonseca

Escola Secundária de Valongo

