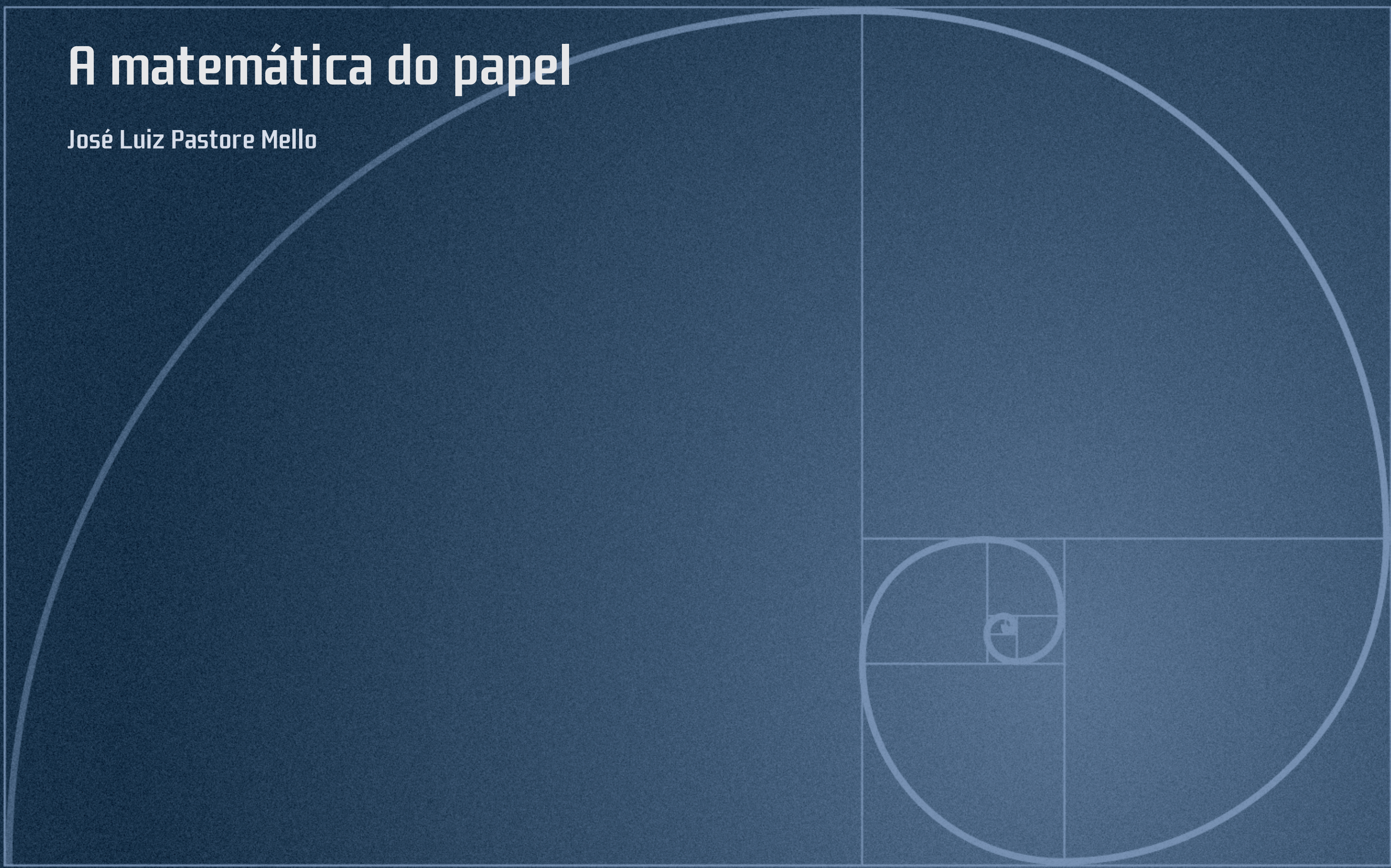


A matemática do papel

José Luiz Pastore Mello

Introdução

O formato do papel que usamos rotineiramente nos serviços de impressão ou fotocópia possui uma história fascinante e repleta de matemática. Neste artigo, partilho algumas idéias que estão por trás dessa história, com o desejo que elas possam servir de material de apoio para aulas de matemática.

A folha de papel A4

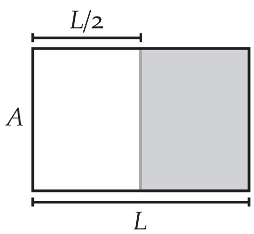
O formato de papel mais usado para impressões e fotocópias, que recebe a denominação A4, tem 210 milímetros de altura por 297 milímetros de largura. Analisaremos, a seguir, de onde vem essas medidas. Antes de mais, importa clarificar que, neste artigo, as palavras largura e altura sempre serão usadas como referência ao maior e ao menor lado de um retângulo, respetivamente.

Imagine-se tendo que resolver o problema seguinte: qual deve ser a largura e a altura de uma folha retangular de modo que quando ela for dividida ao meio, os dois novos retângulos mantenham proporção entre altura e largura da folha original?

O problema é de solução simples, como se vê na figura 1.

Portanto, a folha retangular com razão L/A igual a $\sqrt{2}$ é a única que, quando dividida ao meio, conforme processo descrito, resultará em retângulos semelhantes ao da folha original. Lembro que de forma diferente dos triângulos, onde bastam ângulos congruentes para que sejam figuras semelhantes, no caso dos quadriláteros a semelhança só se garante se os ângulos forem congruentes e se razão entre os lados das figuras for preservada. No caso das medidas de uma folha A4, note que 297/210 é uma ótima aproximação racional para $\sqrt{2}$, cometendo um erro muito pequeno, da ordem de centésimo de milésimo.

A classificação de papéis da qual A4 faz parte chama-se série A, que começa com o A0 e vai até o A10. Essas folhas têm em comum a razão $\sqrt{2}$ entre largura e altura. A série inicia-se com uma folha retangular de área 1 m², definida como A0. A partir dela obtemos a folha do formato seguinte, A1, dividindo-se



$$\frac{L}{A} = \frac{A}{\frac{L}{2}} \rightarrow L^2 = 2 \cdot A^2 \rightarrow L = \sqrt{2} \cdot A$$

Figura 1

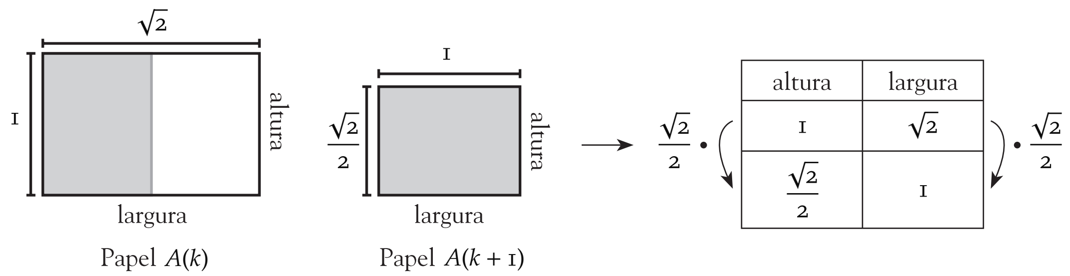


Figura 2

A0 ao meio. As dimensões da folha A0, em metros, podem ser obtidas a partir da solução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} L=\sqrt{2}\cdot A\\ L\cdot A=1\end{cases} \rightarrow A=\frac{\sqrt[4]{8}}{2} \quad \text{e} \quad L=\sqrt[4]{2},$$

ou, com potências de 2, $A = 2^{-\frac{1}{4}}$ e $L = 2^{\frac{1}{4}}$.

Passando essas medidas para milímetros, e aproximando para o milímetro mais próximo, encontramos as dimensões da folha A0, que são 841 mm de altura por 1189 mm de largura.

Façamos agora os cálculos da folha A1, que é obtida a partir da divisão ao meio da folha A0:

$$\begin{cases} L=\sqrt{2}\cdot A\\ L\cdot A=\frac{1}{2}\end{cases} \rightarrow A=2^{-\frac{3}{4}} \quad \text{e} \quad L=2^{-\frac{1}{4}}.$$

Adota-se, nesse caso, a aproximação 594 mm por 841 mm.

Dividindo-se A1 ao meio obtemos A2, que dividida ao meio resultará A3, e assim por diante até A10. Pode-se verificar de maneira simples que a altura e a largura de uma folha $A(k)$, em metros, serão dadas, respetivamente, por $2^{-\frac{1+2k}{4}}$ e $2^{\frac{1-2k}{4}}$, sendo k o número que identifica a série. Para o caso da folha A4, aplicando $k = 4$ na fórmula obtemos os «misteriosos» valores padronizados do formato, que são 210 mm por 297 mm.

Qual a vantagem da proporção $1 : \sqrt{2}$?

A literatura sobre artes gráficas cita dois aspetos importantes sobre a conveniência do uso de uma folha retangular de proporção $1 : \sqrt{2}$. As páginas de um livro são impressas em uma folha de máquina de grande formato. Nela são feitas dobras e cortes e, a partir disso, são montados os cadernos que, juntos, compõem o livro. Normalmente as dobras são feitas «ao meio», fazendo com que o número de páginas seja uma potência de 2. Se o papel for dobrado ao meio por uma dobra, resultará em 2 folhas (chamado *in-fólio*) que, quando impressas frente e verso, constituirão 4 páginas do livro. Se esta última folha for novamente dobrada ao meio, agora com dobras cruzadas, resultará em 4 folhas (*in-quarto*), ou seja, 8 páginas de livro. Com uma nova dobra teremos o *in-oitavo:* 3 dobras, 8 folhas e 16 páginas de livro; e assim sucessivamente.

Uma vez que cada formato deriva do seu precedente fazendo uma dobra sobre o maior lado do rectângulo, a proporção inicial $1 : \sqrt{2}$ sempre será mantida em todas as páginas do livro, seja qual for o número de dobras feitas na composição. Outros formatos não permitiriam isso como, por exemplo, um retângulo de proporção 3:4 (também usado na confeção de livros) que obedece um padrão de alternância no decorrer das sucessivas dobras. A primeira dobra gera retângulos na proporção 2:3; a segunda gera retângulos 3:4, a terceira retângulos 2:3, e assim sucessivamente. Deixo por conta do leitor a seguinte demonstração: dada a proporção $x : y$, se $y/2 \leq x$, então as proporções se alternam entre $x : y$ e $y : 2x$ no decorrer das sucessivas dobras que dividem o lado maior do retângulo ao meio (obs: o único caso em que não há alternância será quando $x/y = y/2x$, que é justamente o caso em que temos a proporção $1 : \sqrt{2}$).

Refiro, ainda, que nem todos os estudiosos de composição em artes gráficas estão de acordo sobre a relevância da vantagem que acabamos de descrever da proporção $1 : \sqrt{2}$ sobre outras proporções. Para um bom acabamento final das dobras de um livro recomenda-se que as dobras sejam feitas paralelamente às fibras do papel. Com isso, folhas de papel que, em virtude da direção das fibras, são adequadas ao *in-quarto* não poderiam ser usadas para livros *in-oitavo* porque a fibra correria em direção errada. Portanto, a vantagem da proporção preservada em $1 : \sqrt{2}$ após as dobras fica comprometida quando levamos em consideração a direção das fibras [1].

Outra vantagem que os papéis de proporção $1 : \sqrt{2}$ da série A apresentam — e essa aceita por todos os especialistas — é a de que evitam o desperdício de papel nos trabalhos de fotocópias.

Imagine que você queira copiar duas folhas quadradas, juntas, em uma nova folha quadrada. Essa tarefa não pode ser realizada sem o desperdício de papel. Se os quadrados têm lado 10 cm, lado a lado formarão um retângulo de 10 por 20 cm, o que exigirá uma folha quadrada de 20 por 20 cm para que o serviço seja feito. Nesse caso, haverá desperdício de metade da folha. O mesmo não ocorre, por exemplo, com duas folhas A4 lado a lado, que podem ser copiadas, sem desperdício de papel, em uma folha A3.

Se você observar com atenção, as fotocopiadoras que fazem ampliação e redução a partir das folhas da série A possuem alguns comandos pré-definidos como, por exemplo, os de redução de 71%, 50%, 35%, 25%, 18% e 12,5%. Você já se perguntou de onde vem essas estranhas porcentagens?

Responderemos a essa pergunta calculando qual deve ser o fator de redução usado na altura e na largura de uma folha $A(k)$ para que ela seja reduzida a uma folha $A(k+1)$. (Figura 2)

Como $\sqrt{2}/2 \approx 0{,}71$, uma redução de 71% fará o serviço desejado. As demais reduções indicadas nas fotocopiadoras referem-se, respetivamente, às reduções de $A(k)$ para $A(k+2)$, $A(k+3)$, $A(k+4)$, $A(k+5)$ e $A(k+6)$.

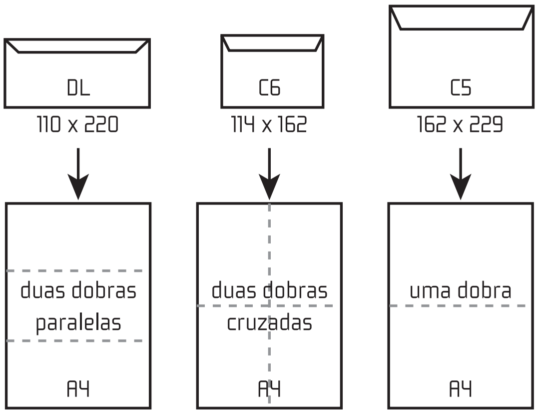
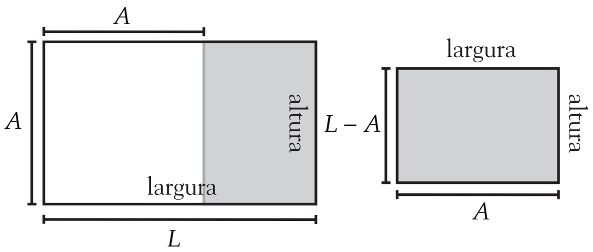


Figura 3



$$\frac{L}{A} = \frac{A}{L - A} \rightarrow L^2 - A \cdot L - A^2 = 0$$

Adotando-se $A = 1$, temos $L^2 - L = 0$, cuja raiz positiva é $(1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618$.

Figura 4

Outros formatos de papel

Há registros do uso da proporção $1 : \sqrt{2}$ durante a Alta Idade Média, quando muitos livros eram escritos em duas colunas. Gutenberg (1398–1468), porém, preferia para suas páginas a proporção 2:3, e durante a Renascença raramente se produziu livro na proporção $1 : \sqrt{2}$.

A idéia de se padronizar um formato de papel surge no século XX, e tem a ver com aspetos relacionados à praticidade e economia. Com o uso generalizado de um formato padrão de papel — o que se reflete diretamente na padronização dos formatos de livros, revistas jornais, envelopes — as bibliotecas podem planejar de forma mais eficiente as alturas de suas prateleiras, as gráficas podem trabalhar com ajustes de máquina pré definidos, as fotocopiadoras e impressoras podem padronizar programas para redução e ampliação etc.

O padrão internacional para o tamanho de papéis é o ISO 216 (*International Organization for Standartization*, norma 216), que é adotado por todos os países industrializados do mundo, exceto EUA, Canadá e partes do México. Essa norma regulamenta o formato de algumas séries básicas de papel, como as séries A, B e C. As séries B e C destinam-se, entre outras aplicações, aos formatos de envelopes que podem ser usados para conter folhas da série A. O formato de uma folha $B(k)$ é definido como a média geométrica entre $A(k)$ e $A(k-1)$, e o da folha $C(k)$ como a média geométrica entre $A(k)$ e $B(k)$. Usando a fórmula que vimos anteriormente para altura de uma folha $A(k)$, as fórmulas de cálculo da altura das folhas $B(k)$ e $C(k)$ serão:

$$B(k) = \sqrt{A(k) \cdot A(k-1)} \qquad C(k) = \sqrt{A(k) \cdot B(k)}$$

$$B(k) = \sqrt{2^{-\frac{1+2k}{4} - \frac{1+2(k-1)}{4}}} \qquad C(k) = \sqrt{2^{-\frac{1+2k}{4}} \cdot 2^{-\frac{k}{2}}}$$

$$B(k) = \sqrt{2^{-k}} \qquad C(k) = \sqrt{2^{-\frac{1+4k}{4}}}$$

$$B(k) = 2^{-\frac{k}{2}} \qquad C(k) = 2^{-\frac{1+4k}{8}}$$

Deixo por conta do leitor a formulação de $B(k)$ e $C(k)$ para a largura das folhas dessas duas séries, bem como a demonstração de que também nas séries B e C a proporção $1 : \sqrt{2}$ se preserva.

Seja qual for o número k da série, sempre teremos, tanto para a altura quanto para a largura a relação $A(k) < C(k) < B(k)$. Verificaremos tal facto para a altura, cujos dados já foram calculados anteriormente:

$$2^{-\frac{1+2k}{4}} < 2^{-\frac{1+4k}{8}} < 2^{-\frac{k}{2}} \rightarrow -\frac{2+4k}{8} < -\frac{1+4k}{8} < -\frac{4k}{8}$$
$$\rightarrow -2 < -1 < 0, \text{ para qualquer } k.$$

Demonstração análoga pode ser feita entre as larguras das três séries.

Os formatos das séries B e C são maiores que os da série A e, por esse motivo, são usados nos envelopes que deverão conter folhas da série A. Como $A(k) < C(k) < B(k)$, se queremos enviar pelo correio um documento com poucas folhas A4, devemos usar um envelope C4, porém, se a quantidade de folhas for muito grande, é provável que elas fiquem melhor acomodadas em um envelope B4. Se você quiser enviar uma folha A4 dobrada uma única vez, recomenda-se um envelope C5. Para uma folha A4 com duas dobras cruzadas, o envelope ideal é o C6 e, se as duas dobras forem paralelas, o envelope ideal é o DL (figura 3).

Outros dois belos formatos de papel

As artes gráficas têm especial predileção pela proporção 5:8, fato que explico a seguir.

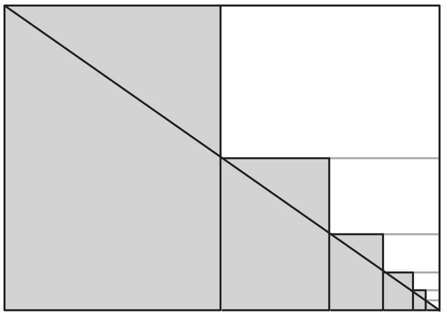
A proporção áurea, muito utilizada por artistas no Renascimento e com inúmeras aplicações práticas — entre elas a relação que mantém com a série de Fibonacci — pode ser assim definida a partir do retângulo áureo:

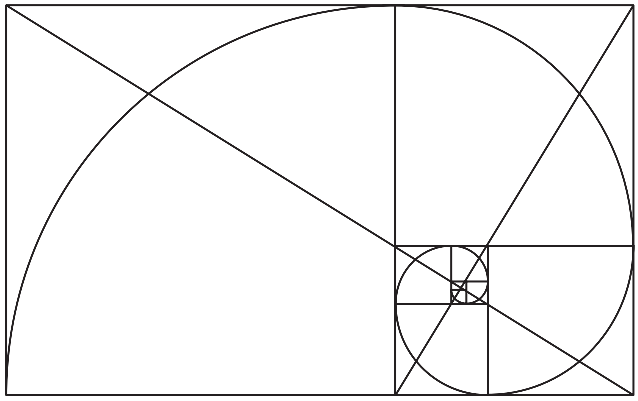
O retângulo áureo de altura A e largura L é aquele que, quando dele retiramos um quadrado de lado A^2, a razão entre lado e altura no retângulo remanescente será igual a razão L/A do retângulo original.

Na prática, procuramos o retângulo apresentado na figura 4. Aproximando a proporção 1:1,618 do retângulo áureo para uma razão entre inteiros encontraremos 5:8 que, segundo especialistas, é uma proporção esteticamente agradável ao olho humano e, por esse motivo, muito utilizada nas artes gráficas.

Repetindo-se o processo de formação do retângulo áureo indefinidamente encontramos retângulos cada vez menores,

Figura 5


razão 1:1,414 (série A)

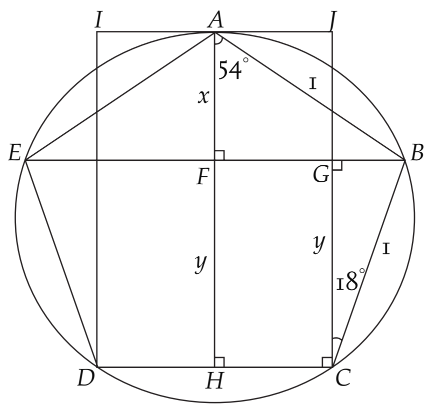

razão 1:1,618 (retângulo áureo)

e neles podemos inscrever uma espiral que recebe o nome de espiral logarítmica. A espiral logarítmica converge para um pólo localizado no ponto de encontro da diagonal do retângulo maior com a diagonal do retângulo obtido após a primeira divisão. As figuras a seguir mostram o processo de formação dos retângulos de razão 1:1,414 (série A) e 1:1,618 (retângulo áureo). (Figura 5)

Para finalizar, apresentarei uma última proporção de tamanho de papel, e esta devido a uma razão especial. Ao ler o livro de Jan Tschichold [1], fiquei encantado com o universo de ciência e arte que está por trás da confeção de um livro de proporções equilibradas ao nosso olhar. Como não podia deixar de ser, Tschichold, que é um especialista no assunto, cuidou muito bem da edição gráfica da sua obra: mancha, margens, tipografia, cor do papel, uso de espaços e tamanho do papel, tudo no mais radiante equilíbrio.

Depois da leitura, não pude conter meu interesse em pegar a régua e medir o formato das páginas para ver qual havia sido a proporção usada pelo mestre no seu próprio livro. Sabia de antemão que não seria $1 : \sqrt{2}$ dado o evidente desconforto de Tschichold com o uso generalizado do formato A nos meios editoriais mas, por outro lado, minha hipótese de que ele tivesse usado a proporção áurea também não se confirmou depois das medidas com a régua.

Figura 6



Do ΔABF, $x = \cos 54°$, e do ΔBCG, $y = \cos 18°$.
Segue que $x + y = \cos 54° + \cos 18°$, ou seja, a proporção CJ/CD do retângulo é 1:1,538.

Tschichold usou nas páginas do seu livro uma proporção citada rapidamente por ele na página 63, quando se referiu a um «belíssimo retângulo, quase desconhecido, derivado do pentágono». Conforme veremos a seguir, o retângulo $CDIJ$, com a proporção usada por Tschichold nas páginas do seu livro, é obtido a partir de um pentágono regular $ABCDE$ de lado 1 (fgura 6).

Finalizo o artigo com informações adicionais que podem ser úteis ao professor na planificação de aulas sobre o assunto apresentado.

— *Gramatura do papel:* é a massa de papel, em gramas, por m². Quando se lê na embalagem de papel A4 que a gramatura é 75 g/m², significa dizer que uma folha A0 dessa série de papel tem massa igual a 75 g.
— *Resma:* conjunto de 500 folhas de papel. Como no A0 cabem 16 folhas A4, bastam algumas contas para concluir que uma resma de A4 tem massa 2343,75 g.
— *Tolerância de erro:* a norma ISO 216 padroniza as seguintes margens de erro nas dimensões das folhas das séries A, B e C: ± 1,5 mm para dimensões até 150 mm, ± 2 mm para dimensões de 150 a 600 mm, ± 3 mm para dimensões acima de 600 mm.
— *Formato Carta:* EUA, Canadá e algumas regiões do México adotam como padrão o formato Carta, cujas medidas são 8 ½ × 11 polegadas, ou 216 × 279 mm.

Bibliografia

[1] Tschichold, Jan. *A forma do livro: ensaios sobre tipografia e estética do livro*. Ateliê Editorial: Cotia, São Paulo, 2007.

Sites consultados em 27/12/2007:

www.portaldasartesgraficas.com
www.cl.cam.ac.uk/~mgk25/isso-paper.html
www.glossary.ippaper.com
www.pascal.iseg.utl.pt/~ncrato/Expresso/NumeroDeOuro_Expresso_20030614.htm
www.pascal.iseg.utl.pt/~ncrato/Expresso/A4_Expresso_20030607.htm

José Luiz Pastore Mello
São Paulo, Brasil