José Paulo Viana

Na sala de aula

Disse o professor para os alunos:

– Imaginem que escrevíamos todos os números de 1 a 10000 encostados uns aos outros de modo a formar um número enorme: 123456789101112131415…99989999910000. Qual é a soma de todos os algarismos deste «supernúmero»?

Não foi preciso nem um minuto para que o menino Frederico G. Auss respondesse corretamente.

Como terá ele conseguido?

(Respostas até 19 de Fevereiro para zepaulo@armail.pt)

Um número de restos

O problema proposto no número 113 de Educação e Matemática foi o seguinte:

– Repara neste número tão curioso – disse a Eva para a Francisca.
– É formado por cinco algarismos ABCDE e tem as seguintes propriedades:
A é o resto da sua divisão por 6,
B é o resto da sua divisão por 5,
C é o resto da sua divisão por 4,
D é o resto da sua divisão por 3,
E é o resto da sua divisão por 2.
No dia seguinte, a Francisca foi ter com a Eva:
– Olha, descobri outro número com as mesmas características. Será verdade?

Recebemos apenas 8 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Edgar Martins (Queluz), Graça Braga da Cruz (Ovar), Ilca Cruz, Jorge Filipe, Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e Sérgio Rosa (Pinhal Novo).

O Sérgio resolveu o problema usando exclusivamente o programa Excel no computador.

O Edgar usou o programa Scratch para encontrar os números mas depois chegou também à solução por dedução.

Todos os restantes foram tirando implicações a partir dos dados e testando depois os vários casos possíveis. O que se segue é uma condensação das várias resoluções que nos foram enviadas.

Do enunciado resulta imediatamente que:

$A \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$B \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$
$C \in \{0, 1, 2, 3\}$
$D \in \{0, 1, 2\}$
$E \in \{0,1\}$

O resto da divisão inteira de um número por 5 depende apenas do algarismo das unidades. Se E = 0 então B = 0 e se E = 1 então também B = 1.

Ficamos com duas possibilidades: A0CD0 e A1CD1.

Caso A0CD0

Substituindo D por cada um dos valores possíveis, temos:

A0C00, A0C10, A0C20

Para saber o resto da divisão inteira de um número por 4 apenas precisamos de dividir o número formado pelos dois últimos algarismos (dezenas e unidades). Daqui deduzimos o valor de C para cada um dos três números anteriores. Ficamos com:

A0000, A0210, A0020

Estes números são pares, logo o resto da divisão por 6 também tem de ser par.

A0000 é divisível por 2 e por 3, logo também é divisível por 6. Ficaria A = 0. Impossível.

A0210 dividido por 3 tem resto 1, logo A só pode ser 1 ou 4. O número 40210 cumpre as condições.

A0020 dividido por 3 tem resto 2, logo A só pode ser 2 ou 5 mas 20020 dividido por 3 tem resto 1. Impossível.

Caso A1CD1

Substituindo D por cada um dos valores possíveis, temos:

A1C01, A1C11, A1C21

Usando o critério para o resto da divisão por 4, ficamos com:

A1101, A1311, A1121

Estes números são ímpares, logo o resto da divisão por 6 também tem de ser ímpar.

A1101 dividido por 3 tem resto 0, logo A tem de ser 0 ou 3. Serve o número 31101.

A1311 dividido por 3 tem resto 1, logo A só pode ser 1 ou 4. Serve o 11311.

A1121 dividido por 3 tem resto 2, logo A só pode ser 2 ou 5 mas 51121 dividido por 3 tem resto 1. Impossível.

Como diz o Edgar: *Obtemos assim 3 soluções: 11311, 31101 e 40210. A Francisca não só está a dizer a verdade como poderia ter encontrado dois números com as mesmas características.*