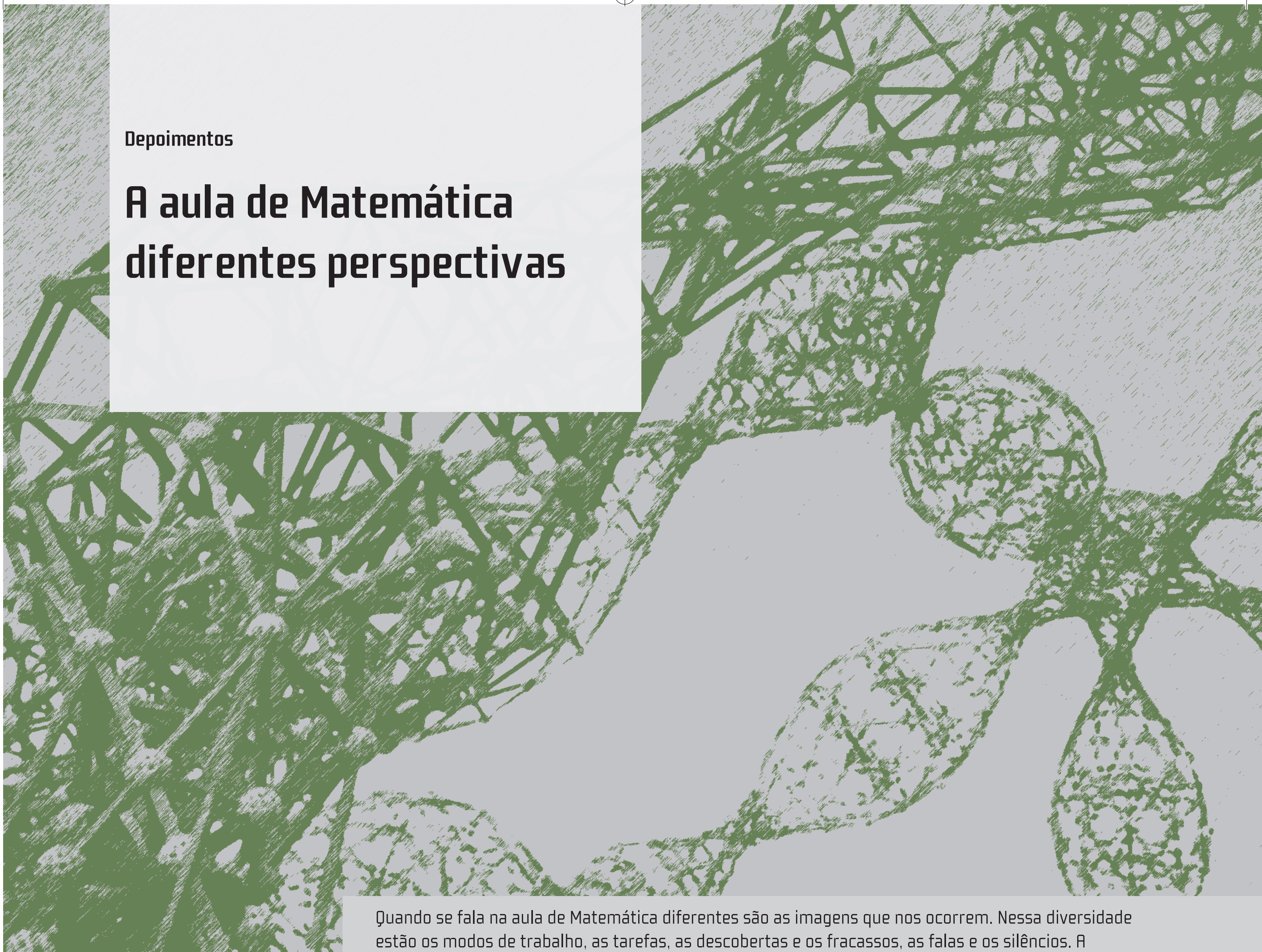


Depoimentos

A aula de Matemática diferentes perspectivas

Quando se fala na aula de Matemática diferentes são as imagens que nos ocorrem. Nessa diversidade estão os modos de trabalho, as tarefas, as descobertas e os fracassos, as falas e os silêncios. A equipa responsável pelo número temático propôs a um conjunto de colegas o desafio de escrever um depoimento sobre a aula de Matemática e posteriormente reagir comentando os restantes depoimentos.

Assim, foram colocadas diferentes questões para que pudessem servir de ponto de partida: Que matemática na sala de aula? Qual o papel das tarefas e dos recursos na aula? Que metodologias podem ser ou são usadas na aula de Matemática? Como proporcionar uma aprendizagem sobre a (e não apenas da) Matemática ao longo de toda a escolaridade?

Foram ainda colocadas algumas questões a cada autor que se prendem com o trabalho que têm vindo a desenvolver até então. Tal como pretendíamos, os depoimentos refletem a diversidade de olhares para a sala de aula bem como as diferentes interpretações sobre o debate solicitado.

Os depoimentos que se seguem contaram com a participação de diferentes autores, o primeiro em co-autoria, de João Pedro da Ponte e Neusa Brando a quem foi solicitado que se centrassem nas questões relativas à aprendizagem da Álgebra, o segundo de Ana Boavida que procurou centrar-se nas questões da argumentação matemática na sala de aula e o terceiro de Eduardo Veloso que a nosso pedido se centrou nas questões da Geometria e sobre como podem ser alteradas as abordagens da geometria na sala de aula.

A equipa agradece aos quatro, Ana, Eduardo, João Pedro e Neusa a dedicação a este espaço de discussão.

Argumentação matemática em acção: Contornos e desafios

Ana Maria Roque Boavida

Um dos desafios das actuais reformas curriculares é o de como transformar o ensino que os alunos encontram na escola de modo a que construam sentido para a Matemática e a aprendam com compreensão, o que está significativamente associado à valorização do raciocínio matemático. Esta valorização traz para primeiro plano a necessidade de desenvolverem um hábito de pensamento relacionado com o entendimento do «porquê das coisas», o que torna incontornável o seu envolvimento em actividades de argumentação. Na sala de aula estas actividades não surgem, em geral, sob a forma de um monólogo, mas como uma interacção face a face em que diversas pessoas tentam ajustar interpretações ou posições apresentando razões. Estamos, assim, na presença de *argumentações colectivas* (Krummheuer, 1995) que nem sempre se desenvolvem de maneira harmoniosa, pois podem ocorrer desacordos que conduzem a correcções ou desvios.

Começo por apresentar um episódio ocorrido numa turma do 1.º ano quando se inicia o tópico *Números naturais* para, tendo-o por referência, me centrar em contornos que pode assumir a argumentação colectiva em Matemática, quer se trate, ou não, dos primeiros anos de escolaridade. O episódio está associado à resolução de um problema que visa a identificação de modos de encher uma caixa com 10 bolos que podem ser de dois tipos. Previamente os alunos conversaram entre si sobre o assunto e quando, no início da discussão colectiva, surge a primeira possibilidade de resolução, a professora afixa no quadro uma tabela em que a regista (tabela 1).

Areias	Biscoitos de canela
5	5

Tabela 1

Episódio A caixa de bolos[1]

1. P.: Alguém tem uma ideia diferente? Só posso mandar 10 bolos!
2. M.: Podem ser 8 areias e 2 biscoitos.
3. P.: Porque é que pensas que essa é uma maneira de mandar os bolos?
4. M.: Pus os dedos todos no ar. São 10. Para ter 8 baixo 2 e quando levanto estes 2 com os outros 8 são 10 ao todo (*faz gestos ilustrativos*).
5. P.: Temos de acrescentar isso na tabela. Já temos duas maneiras.
6. R.: Também pode mandar para a sua irmã 7 areias e 3 biscoitos.
7. P.: Como é que sabes que assim há 10 bolos?
8. R.: A Maria disse que 8 e 2 são 10 e pensei que podia usar 7 e 3. Estão perto do 8 e do 2 e funcionam!
9. P.: Tens a certeza?
10. R. (*sorrindo*): Já sabia que ia perguntar isso e testei! Disse 7 e (*põe 3 dedos no ar, um de cada vez*) 8, 9, 10!
11. T.: Eu também tenho a certeza mas não contei.
12. P.: Então?
13. T.: 7 mais 1 é 8 e 2 mais 1 é 3. Fica o mesmo.
14. A.: Porque é sabes que assim fica o mesmo!?
15. T. 8 mais 2 é 10 e 8 é 7 mais 1, não é? Então 8 mais 2 é o mesmo que 7 mais 1 mais o 2 que já lá estava. Peguei neste 1 e juntei-o ao 2. Fica 7 mais 3. Só tirei 1 do 8 e acrescentei o 1 a 2. Fica 10 na mesma (*a professora faz registos representativos do raciocínio da aluna*).

(…)

16. P. Vamos procurar maneiras de mandar os 10 bolos que ainda não estejam na tabela.
17. L. Também podia mandar 3 areias e 7 biscoitos.
18. B. Não pode ser. Esses números já lá estão. Têm que ser maneiras diferentes!
19. P. O L. teve uma ideia para mandar os bolos, mas, como diz o B., os números 3 e 7 já estão na tabela. O que é que acham? (*dirigindo-se à turma*)
20. L. Mas são caixas diferentes!
21. C. Pois são. As areias são melhores do que os biscoitos.
22. P. Estão a querer dizer que encher a caixa com 3 areias e 7 biscoitos é diferente de a encher com 7 areias e 3 biscoitos?
23. L. Sim. Uma tem mais areias e a outra tem mais biscoitos. Eu gostava mais de receber a dos 7 biscoitos.

24. B. Ah! Pois é… O número de bolos é o mesmo, mas numa caixa há mais biscoitos do que areias e na outra é o contrário.

(…)

25. P. Bem, na tabela já temos 8 e 2 e mais à frente 2 e 8. São quantidades diferentes, se não pensarmos em bolos de areia e em biscoitos?
26. D. Não. São sempre dez, mas os números estão em lugares diferentes. Trocaram de lugares!
27. P. Ah, então podemos trocar a posição dos números e ainda continuar a ter 10? (*os alunos acenam afirmativamente*). Será que isto funciona sempre?

(…)

28. J. Já temos todas as maneiras?
29. P. Humm… Trabalhem com o colega do lado e pensem se já temos todas as maneiras possíveis de encher a caixa com os 10 bolos. Vou distribuir cubos de encaixe de duas cores para vos ajudar.

Encontramos no episódio várias evidências de que os alunos se envolveram em actividades de argumentação matemática. Antes de mais, a conversação que ocorreu serviu-se sobretudo da linguagem natural como utensílio de comunicação. A grande maioria das argumentações em Matemática utiliza este tipo de linguagem, o que significa que argumentação é uma actividade essencialmente discursiva (Pedemonte, 2002). Esta característica não impede o recurso a elementos não discursivos adaptados às necessidades do campo em que a argumentação se desenvolve. No episódio observa-se o uso de alguns destes elementos: gestos (§ 4 e 10), registos numéricos e tabela. No entanto, nem toda a actividade discursiva em Matemática constitui um discurso argumentativo. Este discurso pode ser, por exemplo, descritivo.

Além disso, os alunos não se limitaram a partilhar resultados. Pensaram logicamente sobre os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos, de modo a conseguirem determinar possíveis combinações dos bolos. O discurso argumentativo é um discurso conectado logicamente, embora não seja necessariamente dedutivo. Em particular, a argumentação que conduz à formulação e fortalecimento de conjecturas decorre, muito frequentemente, de raciocínios plausíveis que, pela sua própria natureza, são provisórios e podem ser objecto de contestação.

Ademais, verificamos que foi comum os alunos fundamentarem as suas ideias indicando razões destinadas a mostrar a sua lógica, verdade ou falsidade (ex. § 10, 15 e 23), ou seja, apresentaram justificações. A função justificativa é, precisamente, a função primeira da argumentação havendo autores que consideram que as outras funções que lhe são atribuídas são, de certa maneira, secundárias e parasitas do papel justificativo que é o primordial (Toulmin, 1993). A argumentação em Matemática é, assim, uma justificação racional. «O carácter justificativo exprime-se na sua forma: o raciocínio. A racionalidade diz respeito à inferência que liga a sequência de proposições de um raciocínio» (Pedemonte, 2002, p. 29). Tal como a argumentação, também a prova matemática é uma justificação racional e, portanto, pode considerar-se uma argumentação particular, embora as suas características sejam demasiado específicas para que se possam generalizar a toda a argumentação. Com efeito, esta apresenta uma gama de possibilidades de raciocínio mais ampla do que a prova: não apenas dedução, mas também, por exemplo, indução, analogias, metáforas e argumentos empíricos em que se recorre, nomeadamente a medições ou dobragens.

Durante o ensino é difícil e não necessariamente frutuoso, distinguir se uma intervenção visa justificar ou, antes, explicar um raciocínio. Requer que se considerem as razões que estão subjacentes ao que se diz e faz. Está-se na presença de uma explicação quando o que se pretende é tornar inteligível para outros o que se pensou (ex. § 4 e 8). Há autores que enquadram nas actividades de argumentação raciocínios tanto de carácter explicativo como justificativo (ex. Whitenack & Yakel, 2002). Como o episódio ilustra, numa argumentação colectiva as justificações surgem frequentemente entrelaçadas com explicações. Assim, embora retendo que a função principal da argumentação em Matemática é a justificação, considero mais prometedor não excluir daí raciocínios explicativos que permitam entender uma ideia cujo valor ou verdade se pretende mostrar, embora considere que estes têm uma função secundária relativamente aos justificativos.

O episódio permite, também, destacar que houve intervenções cuja intencionalidade foi levar os participantes na discussão a aderirem a certas ideias ou posições através da apresentação de razões (ex. § 15, 18, 21 e 23). Obter a adesão daqueles que quem argumenta quer influenciar através da argumentação, ou seja do que Perelman (1993) designa por *auditório*, é uma das características essenciais da argumentação. É em função de um auditório que qualquer discurso argumentativo se desenvolve, podendo acontecer que este discurso se dirija simultânea ou sucessivamente a diversos auditórios. Por exemplo, pode considerar-se que a intervenção de L. (§ 23) tem por auditório a professora, uma vez que decorre de uma interpelação que esta lhe dirigiu e, concomitantemente, a turma, na medida em que visa influenciar os colegas a considerarem legítima a proposta que apresentou. Neste âmbito, importa sublinhar que o valor de uma argumentação não pode ser avaliado apenas através do efeito obtido, pois depende também da qualidade do auditório que lhe adere. O professor tem aqui um papel decisivo, pois, na sala de aula, é o representante da comunidade matemática. Estas considerações remetem para o carácter situado e social da argumentação e para a importância de ter em conta o outro no decurso das actividades argumentativas.

Constatamos, ainda, que um dos alunos apresentou e fundamentou uma ideia (§ 18) que foi rebatida pelos colegas, até o seu autor ficar convencido do porquê da sua incorrecção (§ 24). Esta situação permite sublinhar que a argumentação em Matemática tem um carácter dialéctico, no sentido em que embora não conduza necessariamente a conclusões verdadeiras, parte daquilo que quem argumenta crê ser verdadeiro (Pedemonte, 2002). Argumentar em Matemática é convencer, um conceito que implica o recurso à racionalidade. É essencial procurar obter a adesão apelando à razão, caminhando, simultaneamente, no sentido da procura da verdade dos enunciados, dada a própria natureza da Matemática. Neste âmbito, o auditório da argumentação, seja ele a comunidade matemática, a turma ou até aquele que argumenta, deve ser entendido como um auditório racional no sentido em que pode, ou não, concordar com o que ouve mas que, em qualquer caso, está apto a responder.

Se observamos o episódio por outro prisma, sobressai que o papel da professora foi essencial para que os alunos argumentassem matematicamente. Escolheu uma tarefa com várias soluções, que pode ser resolvida usando diferentes estratégias e que se foca em ideias matemáticas significativas relacionadas, neste caso, com o sentido de número. Incentivou, persistentemente, a apresentação de explicações e justificações e a reacção de R. (§ 10) é indiciadora de que esta é uma atitude sistemática. Colocou questões desafiadoras do pensamento (ex. § 25 e 27) e criou aberturas no discurso para que fosse explicada uma estratégia diferente de outra já apresentada (§ 12), o que possibilitou que a sua autora construísse um argumento matemático mais forte (§ 15) e que os colegas pudessem entender uma nova forma de lidar com a questão. Perante a emergência de um desacordo (§ 17 a 24), desencadeou a sua exploração, remetendo para a turma a análise das posições em confronto de modo a que os alunos chegassem a um consenso fundamentado. Por fim, em vez de responder negativamente à questão de J. (§ 28), que surge numa altura em que só tinham sido indicadas algumas das combinações de bolos, criou uma oportunidade para que os alunos pensassem mais profundamente sobre o problema (§29). A discussão subsequente permitiu, não só que estes encontrassem as restantes, mas também que justificassem porque é que tinham a certeza de ter descoberto todas as decomposições de 10.

Ensinar a argumentar em Matemática é um empreendimento muito complexo que requer esforços explícitos do professor. Passa, em particular, por criar condições para os alunos aprenderem que o raciocínio é a fonte primeira de legitimação de asserções, para se sentirem confortáveis a partilhar ideias emergentes e titubeantes, para entenderem o valor da expressão audível e da escuta atenta e para se comprometerem com a análise crítica e fundamentada dos próprios raciocínios e dos de outrem. Como caminhar neste sentido? Que aspectos são decisivos? Como lidar com situações que em o conjunto dos alunos da turma chega a consensos que entram em conflito com saberes reconhecidos como matematicamente válidos, sem que ocorram transgressões a normas reguladoras de uma *cultura de argumentação* (Boavida, 2005)? Que cuidados ter para ajudar um aluno, cujas ideias foram questionadas, a entender que o que é posto em causa são essas ideias e não a sua capacidade para fazer Matemática? Como promover o envolvimento dos alunos na apresentação e defesa de argumentos que, do seu ponto de vista, validam as ideias que enunciam e assegurar o carácter matemático de tais práticas argumentativas? A estas questões várias outras se poderiam acrescentar. Discuti-las é essencial para se avançar na compreensão de como encontrar caminhos para os alunos desenvolverem a sua capacidade de argumentação, entendida, simultaneamente, como a capacidade de dialogar, de raciocinar, de optar e de se comprometer.

Nota

[1] Episódio adaptado de Schultz-Ferrel, K., Hammond, B., Robles, J. & O' Connell, S. (2007). *Introduction to Reasoning and Proof, Grades PreK-2*. Portsmouth: Heinemann. No início de cada intervenção, a letra P significa Professora e as restantes correspondem às iniciais do nome dos alunos.

Referências

Boavida, A.M. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração*. Lisboa: APM.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. Em P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–269). Hillsdale, NY: Erlbaum.

Pedemonte, B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de da démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. Genova: Université Joseph Fourier-Grenoble I/ Université de Genova.

Perelman, C. (1993). *O império retórico: Retórica e argumentação*. Porto: Edições ASA.

Toulmin, S. (1993). *Les usages de l' argumentation*. Paris: PUF.

Whitenack, J. & Yakel, E. (2002) Making mathematical arguments in the primary grades: The importance of explaining and justifying ideas. *Teaching Children Mathematics*, 8 (9), 524–527.

Ana Maria Roque Boavida

Escola Superior de Educação/ IPSetúbal, UIDEF–IEUL

Desenvolvendo a linguagem algébrica

João Pedro da Ponte

Neusa Branco

A Álgebra constitui um importante tema do programa de Matemática. Durante muito tempo o seu ensino esteve centrado na manipulação simbólica, causando as maiores dificuldades aos alunos. Kaput (2008) fala mesmo do «*algebra problem*», e, para o resolver, gerou-se um movimento tendo como ideia central o desenvolvimento do pensamento algébrico, envolvendo facetas como a generalização, a simbolização, o estudo de relações entre objetos matemáticos, a variação e a modelação (NCTM, 2007).

Nas aulas de Álgebra são fundamentais as tarefas, os modos de trabalho, o discurso e os papéis do professor e dos alunos. Em muitas aulas de Álgebra os alunos resolvem apenas exercícios e, em alguns casos, um ou outro problema. Mas, para além de exercícios e problemas, o professor precisa também de propor outras tarefas como explorações e investigações (Ponte, 2005), que constituem um terreno favorável à construção de novos conceitos e ao desenvolvimento de modos de representação e do raciocínio matemático. Muitas vezes, ao lado das representações formais ou até antes delas, há vantagem que os alunos trabalhem com representações informais, como notações criadas pelos próprios alunos (Sutherland, 2004). Estreitamente ligadas às representações estão os materiais usados, que determinam em grande medida as representações admissíveis, incluindo materiais manipuláveis, novas tecnologias, etc.

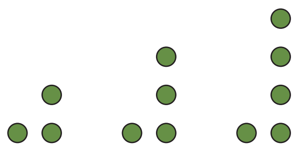
No que respeita a modos de trabalho, registemos a possibilidade de trabalho colectivo, com o professor a interagir com todos os alunos, do trabalho em grupo e a pares, tendo em vista proporcionar aos alunos a possibilidade de partilha de estratégias e representações e esclarecimento de dificuldades e, também o trabalho individual, visando desenvolver a capacidade de concentração e reflexão do aluno.

Uma aula de cunho exploratório/investigativo estrutura-se usualmente segundo três fases (Ponte, 2005): (i) apresentação e interpretação da tarefa (em colectivo); (ii) desenvolvimento do trabalho pelos alunos (em grupos, pares ou individual); e (iii) discussão e síntese final (em colectivo). Note-se que o discurso da sala de aula é *unívoco*, quando é dominado pelo professor, ou *dialógico*, quando a contribuição dos alunos é fortemente valorizada. As tarefas exploratórias/investigativas possibilitam o surgimento de diferentes estratégias que, muitas vezes, começam com tentativas que progressivamente permitem identificar relações e estabelecer generalizações. O surgimento de uma diversidade de abordagens por parte dos alunos cria uma excelente oportunidade para o desenvolvimento do conhecimento na sala de aula. Bishop e Goffree (1986) indicam que a discussão é a ocasião mais apropriada para que sejam expostas conexões e significados, mostrando como as ideias matemáticas são naturalmente interligadas e como podem descrever situações reais. Os momentos de discussão, com o contributo dos alunos, constituem oportunidades para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento.

Usualmente, é papel do professor propor as tarefas a realizar, estabelecer os modos de trabalho na sala de aula e dirigir o discurso e papel do aluno ao trabalhar nas tarefas que lhes são propostas. Mas um papel muito importante na sala de aula é o de *autoridade matemática*. Quem o exerce? Apenas o professor e o manual ou também os alunos? O raciocínio e argumentação dos alunos são considerados uma fonte válida de conhecimento?

Para ilustrar estas ideias, vejamos alguns episódios de uma aula onde os alunos resolvem a seguinte tarefa enquadrada em objectivos de aprendizagem do *Programa de Matemática do ensino básico* (ME, 2007):[1]

1. Observem a sequência de figuras:



a) Desenhem a próxima figura da sequência.
b) Desenhem a 7.ª figura da sequência. Quantas bolas tem a figura?
c) Sem desenhar, digam, justificando, quantas bolas tem a figura que ocupa a posição 14 da sequência?
d) Escrevam a sequência relativa ao número de bolas que tem cada uma das figuras até à posição 7.
e) A que posição corresponde a figura que tem 19 bolas? Expliquem o raciocínio que efetuaram.
f) Descrevam como é construída qualquer figura desta sequência.
g) Escrevam uma expressão que represente o número de bolas que tem uma figura em qualquer posição.

Trata-se de uma tarefa em que existem questões estruturadas e também questões abertas (como as que pedem para dar justificações ou para fazer generalizações). A regra de formação destas sequências pode surgir da análise de figuras consecutivas ou da identificação da relação entre o número de elementos que constitui uma figura e a sua ordem. É principalmente esta relação que a professora procura explorar.

Os alunos começam por trabalhar aos pares. Passado algum tempo, a professora dá início à discussão colectiva. Na primeira questão, os alunos começam por verificar que podem obter a figura seguinte acrescentando uma bola na vertical à figura anterior. Para obter figuras próximas este processo é adequado. Mas para obter figuras distantes o processo de ir acrescentando sucessivamente um bola não é nada prático. Os alunos rapidamente verificam que o número de bolas da parte que se altera em cada figura está relacionado com a sua ordem. Por isso não precisam de desenhar a sequência até à figura pedida para saber o número total de bolas que a constitui. Conseguem determinar esse número sabendo apenas a sua ordem. Diversas respostas refletem esta generalização, como a de Mariana e Diana, na alínea b):

SE A 1º FIG. TEM 2 BOLAS DE BASE E UMA EM CIMA, A FIG. 2 COMO SE PODE VER TEM 2 BOLAS DE BASE E 2 PARA CIMA E A 3º FIG TEM 2 BOLAS DE BASE E 3 PARA CIMA APLICA-SE O RACIOCINIO PARA A FIG.:

A maior parte dos alunos, faz referência à figura, explicando onde coloca as bolas, Joana e Catarina, na alínea f) são mais sintéticas e sua resposta é um enunciado verbal que apenas considera o número de bolas e evidencia a relação entre este e o número da figura:

A fig:.
Acrescenta-se 2 ao nº da fig.

A partir daqui, a professora procura que, com o contributo de toda a turma, se construa uma expressão que represente o número de bolas de uma figura de qualquer ordem. Como os alunos se mostram confusos com o termo de «expressão», surge uma óptima oportunidade para discutir o seu significado.

A professora questiona então os alunos sobre como se pode determinar o número de bolas de uma figura. Susana propõe que a ordem da figura, como é desconhecida, seja representada por um símbolo, um ponto de interrogação:

Susana — Oh stora, já sei. Faz-se dois mais um ponto de interrogação.
Professora — Pode ser. Dois mais um ponto de interrogação. O que é que representa este ponto de interrogação?
Diana — É o número de bolinhas que temos de acrescentar.

Susana — É o numerozinho da figura porque a gente não tem número.
Professora — É o número da figura quando não temos número específico. Portanto, é a figura número …
Batista — Ponto de interrogação.
Professora — Portanto, a figura número ponto de interrogação, tem quantas bolinhas?
Susana — Duas mais ponto de interrogação.

Os alunos chegam, assim, a uma expressão geral que permite determinar o número de bolas que constitui qualquer figura. De seguida, a professora procura que os alunos percebam que podem usar outros símbolos, adoptando-os de acordo com a situação, com o mesmo significado. Batista, um aluno que frequenta pela segunda vez o 7.º ano, sugere a letra x. Por sua vez, Susana refere poder usar b, c, ou h, letras já usadas anteriormente noutros contextos. Por fim, surge a letra n, como sendo o símbolo que os alunos consideram mais adequado para representar a ordem da figura desconhecida. Assim, nesta situação o uso dos símbolos para representar números (o ponto de interrogação e a letra) surge de um modo natural.

A Álgebra permite conexões com todos os temas, pois em toda Matemática existem estruturas que se podem representar e cujas propriedades se podem estudar com maior ou menor profundidade. Episódios como estes mostram que o trabalho com tarefas de cunho exploratório e investigativo, acompanhado por discussões colectivas onde os alunos apresentam seu trabalho e argumentam uns com os outros, num registo dialógico, constituem importantes situações de aprendizagem, tanto em Álgebra como noutros temas. Para isso é fundamental tanto a tarefa que se propõe como o modo como esta é trabalhada na sala de aula. Na verdade, serve de pouco ter óptimas tarefas, se depois, em termos de discurso, organização da aula e papéis, não se valoriza adequadamente a participação dos alunos.

Nota

[1] Para mais detalhes sobre esta aula ver Branco (2008).

Referências

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309–365). Dordrecht: D. Reidel.

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico* (Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa). Disponível no Repositório da UL.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5–17). New York, NY: Routledge.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Sutherland, R. (2004). A toolkit for analysing approaches to algebra. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 73–96). Norwell: Klumer.

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Neusa Branco
Escola Superior de Educação de Santarém e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Trabalho de Projecto

Eduardo Veloso

I

No dia em que comecei a escrever este depoimento, vi logo pela manhã no Diário de Notícias o seguinte grande título:

Professores alinham com ministro e pedem exames

A palavra professores referia-se, como é cada vez mais habitual na comunicação social, à SPM. E na contracapa do mesmo jornal aparecia uma entrevista com o presidente da SPM intitulada «As máquinas de calcular não deveriam ser usadas no básico». Nessa entrevista Miguel Abreu explicitava as suas duas medidas mais importantes para «melhorar o ensino da Matemática»: *testes intermédios*, por exemplo no 2.º ano, e *proibição de máquinas de calcular no ensino básico*. Salientava que a utilização das máquinas de calcular «pode depois prejudicar o ensino secundário e o ensino superior». Como é tradicional nos professores universitários de matemática, uma das suas principais preocupações é garantir que os alunos chegam ao ensino superior suficientemente amestrados no cálculo.

II

Assim, quando leio a primeira questão na mensagem que me foi enviada — «que matemática na sala de aula?» — surge-me logo uma questão prévia: matemática para quê? para facilitar a vida dos professores do ensino superior? Se assim não é, então não será de reflectir e mudar radicalmente o que temos andado a fazer? Atrevendo-me a um pequeno desvio em relação ao que me é pedido, gastarei os dois pontos seguintes para apontar alguns elementos dessa reflexão. Depois tentarei voltar à questão posta pela equipa deste número temático.

III

Como estamos em matéria de grandes questões e de respostas radicais, nesta época dita de «transparências», devo dizer que as palavras «sala de aula» me suscitam o desejo de gritar uma palavra de ordem: Abaixo a sala de aula! Viva o trabalho de projecto! Como todas as palavras de ordem, não é para tomar à letra, é apenas para assinalar que devemos repensar a educação comum para todos os jovens, e em particular a organização da vida escolar, libertando-as do modelo de produção de trabalhadores do industrialismo do séc. XIX e da escola-fábrica com toques de sirene de 45/90 em 45/90 minutos. Em 1988, a APM disse em Milfontes que o professor tinha que descer do seu estrado, na sala de aula, para se colocar junto dos alunos e transformar os tipos de trabalho que dominavam a sala de aula. Um quarto de século mais tarde, e perante a situação actual, não chega continuar a dizer o mesmo e a detalhar cada vez mais esses modelos. Devemos reflectir melhor sobre *os objectivos de uma experiência matemática prolongada* de todos os alunos na escolaridade obrigatória, e certamente perceberemos que essa experiência irá exigir espaços na escola muito diferentes da sala de aula tradicional: espaços para trabalho individual dos alunos ou em grupo, bibliotecas, salas de computadores, espaços oficinais, etc.

O ponto seguinte apresenta algumas notas sobre esses objectivos.

IV

A) Exactamente há 25 anos, quando eu frequentava como aluno livre a cadeira de Metodologia da Matemática do Mestrado em Educação Matemática na FCUL, João Pedro da Ponte deu-nos a ler um artigo de um professor inglês que questionava a pertinência das razões que se apresentavam habitualmente para justificar a longa aprendizagem da Matemática no ensino obrigatório — não sermos enganados na mercearia, sabermos quanta alcatifa comprar para forrar o chão da sala, saber se temos dinheiro suficiente para encher de gasolina o depósito do carro e assim por diante. Depois propôs-nos que fizéssemos um trabalho sobre o que pensávamos relativamente aos objectivos de ensino da matemática. Discutimos em pequenos grupos, e lembro-me que o Henrique Guimarães, a Leonor Moreira e eu apresentámos o nosso trabalho tendo como resultado principal a seguinte afirmação (talvez não nestes termos precisos): «a razão pela qual se ensina matemática no ensino obrigatório é a mesma pela qual se ensina (ou deveria ensinar) música». A ideia era a seguinte: tal como uma (desejável mas infelizmente por concretizar) experiência musical prolongada e diversificada no ensino obrigatório não se destinaria a começar a formar músicos, também a experiência matemática não se destina a dar os primeiros passos numa opreparação matemática de nível superior e profissional. Ou seja, defendíamos uma prioridade para objectivos de carácter cultural.

B) Em 1990 a equipa do projecto MAT789 (Paulo Abrantes, Leonor Santos, Paula Teixeira, Margarida Silva e eu próprio) — um projecto de desenvolvimeno curricular relativo ao 3.º ciclo, nessa altura já com dois anos de execução — publicou um resumo do Projecto reflectindo a sua experiência de dois anos. Nesse resumo, a equipa apresenta a *visão da matemática* como um pressuposto essencial do currículo e afirma:

«O Projecto entende que a escola deve, acima de tudo, contribuir para desenvolver a compreensão do papel e da importância da matemática na vida dos alunos e na sociedade (ao longo da história e no presente) (...)».

Assim, de novo são defendidos objectivos de carácter cultural para o ensino da matemática.

C) Em 2001 é publicado o Currículo Nacional, onde se pode ler:

«A razão primordial para se proporcionar uma educação matemática prolongada a todas as crianças e jovens é de natureza cultural, associada ao facto de a matemática constituir uma significativa herança cultural da humanidade e um modo de aceder ao conhecimento.»

Os pontos A), B) e C) referem-se todos a uma opção bem clara que eu perfilho quanto aos objectivos da experiência matemática que deve ser proporcionada a todos os alunos durante a escolaridade obrigatória (ou seja no ensino básico e secundário). Esses objectivos são de natureza eminentemente cultural e, dada a natureza específica da matemática como ciência, poderão apenas ser prosseguidos através de um longo e diversificado trabalho matemático. Isto implica obviamente a aprendizagem gradual de técnicas básicas nos principais temas da matemática elementar — números, geometria, álgebra — de forma a capacitar os alunos para resolver problemas, fazer investigações matemáticas e desenvolver trabalhos de projecto, sejam de natureza matemática ou interdisciplinar com relevante presença da matemática. Mas a aprendizagem de técnicas *não é em si uma finalidade*, depende dos problemas, das investigações e dos projectos que são propostos aos alunos. Para se compeender bem o que quero dizer dou um exemplo extremo (e mesmo absurdo): se ao longo da escolaridade, nos problemas que encontrou, nas investigações que fez e nos projectos que desenvolveu um aluno não precisou nunca de resolver uma equação do 2.º grau, essa técnica pode nunca ter sido ensinada…

V

Como é evidente, uma tal opção em relação aos objectivos de ensino da matemática na escolaridade obrigatória teria, a ser escolhida — o que está longe de acontecer, mesmo por parte da comunidade da educação matemática —, fortes implicações relativamente a outras questões centrais da política educativa:

- que estrutura para o programa de matemática? — um programa com listas de tópicos como objectivos, como o actual, seria totalmente inadequado; em particular, as metas publicadas não fariam qualquer sentido;
- o sistema de avaliação actual, baseado fundamentalmente em testes e exames escritos com tempo limitado, teria obrigatoriamente que ser abandonado.

Deixando para outra ocasião a discussão importante destes pontos, prossigo agora o meu depoimento sobre «que matemática …?», mas agora naturalmente num contexto diferente no que diz respeito aos objectivos.

VI

Se a experiência matemática dos alunos deve conduzir, ao longo da escolaridade obrigatória, a uma apreciação da natureza da matemática como ciência e do seu papel na nossa sociedade, no passado e no presente, o professor de matemática deve escolher conteúdos matemáticos, nas suas propostas de problemas, investigações e projectos, próprios para essas finalidades. No caso dos projectos interdisciplinares o conteúdo matemático a desenvolver é determinado pelas próprias necessidades do projecto. No caso dos projectos (problemas, investigações) de carácter matemático, essa escolha depende do tipo de conhecimento matemático que os professores adquiriram na sua formação inicial: se o ensino de matemática, nas ESE's e nas Universidades, lhe tiver dado a ele, como aprendiz, apenas factos, técnicas, definições e teoremas e não essa componente histórica e conceptual sobre a própria matemática — como é o caso em geral — ele será incapaz de fazer boas escolhas para os seus alunos.

Vejamos um exemplo. Naturalmente, os diversos tipos de números — naturais, inteiros, racionais, reais — fazem parte da experiência matemática dos alunos. Mas as propostas dos sucessivos professores que os alunos vão ter ao longo da escolaridade apenas poderão colectivamente contribuir para esse tal conhecimento da matemática e dos seus processos se os próprios professores não encararem o trabalho com os números como apenas operacional. Ou seja, se conscientemente, nas suas propostas, tiverem em atenção e como objectivo criar progressivamente nos alunos, como resultado desses tipos diferentes de actividades, esse conhecimento cultural e histórico deste tema dos números e da sua construção histórica ao longo de milénios.

Assim, tal como no caso da construção dos diversos tipos de números, todos os tópicos habituais da matemática elementar — como era de esperar — fazem parte de *percursos temáticos*, cujo conhecimento será imprescindível para os professores do ensino básico e secundário.

Terminarei o meu depoimento apresentando de forma muito breve dois exemplos (pontos VII e VIII) de percursos desse tipo, no domínio da geometria. Deve notar-se que:

- cada um dos percursos descreve, apenas em grandes linhas e de forma indicativa, os conteúdos matemáticos que os professores deveriam aprender na sua formação inicial (ou contínua, para os actuais professores); uma descrição completa de cada um destes percursos (aquilo que poderia constituir um programa de uma cadeira) excede o âmbito deste depoimento;
- cabe aos professores, munidos de um conhecimento sólido relativamente a um dado percurso, e conhecendo bem os seus alunos, transformá-lo didacticamente em projectos (problemas, investigações) próprios; cada professor deve conhecer os produtos relativos a essas propostas relativamente aos alunos que está a receber nesse novo ano ou ciclo (portefólios) e escolher, tendo isso em conta, as suas próprias propostas;
- ao professor do ensino secundário deveria naturalmente competir servir-se da experiência acumulada dos alunos para desenvolver com eles trabalhos de síntese relativos a cada um dos percursos, tentando assim obter os objectivos culturais pretendidos.

VII. Construções geométricas[1]

a) As construções geométricas nos *Elementos* de Euclides. Instrumentos e postulados. O significado das três primeiras proposições dos *Elementos*. Necessidade de formalização.
b) Os problemas clássicos: duplicação do cubo, trissecção do ângulo, quadratura do círculo (com compasso euclidiano e régua não graduada). «Soluções» não ortodoxas: quadratriz de Hippias de Elis, concóide de Nicomedes, hipérbole (Papo de Alexandria), caracol de Étienne Pascal, cónicas de Menecmo, cissóide de Diocles, espiral de Arquimedes, etc.
c) Outras regras do jogo nas construções geométricas: só com o compasso (teorema de Mohr-Mascheroni), só com régua (teorema de Poncelet-Steiner), com régua graduada, com outros instrumentos (esquadro de carpinteiro, trissector de Kempe, etc.)
d) Algebrização das construções geométricas. Teoremas da impossibilidade dos três problemas clássicos.

VIII. Área

a) Euclides — comparação de áreas puramente geométricas; composição (por justaposição) e decomposição de polígonos
b) Arquimedes — método de descoberta: áreas e volumes por pesagens
c) Conexão com os números: do número natural (contagem) ao número racional (medição)
d) Torricelli e Cavalieri (discípulos de Galileu) — o método dos indivisíveis
e) Roberval — a área da ciclóide por indivisíveis
f) Kepler — área do círculo
g) Teorema de Bolyai-Gerwien — dois polígonos com a mesma área são equidecomponíveis
h) Equidecomposições de polígonos com a mesma área: os *puzzles* de Dudeney e outros exemplos
i) Definição axiomática de área
j) 3.º problema de Hilbert — conjectura: existirá um análogo do teorema de Bolyai-Gerwien no espaço (poliedros e volume)?; sua resposta negativa
k) Paradoxo de Banach-Tarski

Nota

[1] Para mais informação, ver Educação & Matemática n.º 100, *Reflexão sobre a Geometria* (I).

Eduardo Veloso

Reacção aos depoimentos (Ana Maria Roque Boavida)

Começo por sublinhar que a ideia de incluir na revista um conjunto de depoimentos comentados sobre a aula de Matemática constitui não só uma proposta interessante, mas também um repto significativo. É que, no 1º. ciclo do ensino básico, não existem «aulas de Matemática», se atribuirmos a esta expressão o significado que, em termos sociais, é dominante: período de 45 ou 90 minutos dedicado ao ensino desta disciplina na escola e que, na maioria das vezes, é assinalado pelo toque da campainha. Além disso, se entendermos a «aula de Matemática» numa perspetiva mais abrangente, considerando-a como um espaço em que o professor e os alunos se encontram, na sala de aula, para trabalhar em Matemática — posição que adoto neste comentário —, há muitas portas de entrada para se pensar este espaço, tanto mais que ele é influenciado por uma enorme multiplicidade de fatores entre os quais há relações complexas.

Esta diversidade conduz a que a aula de Matemática possa ser equacionada a partir de diferentes pontos de vista, como está bem patente nos depoimentos de Eduardo Veloso (EV) e de João Pedro da Ponte e Neusa Branco (JPP&NB) que usam diferentes «lentes» para se debruçar sobre o tema em questão. Se, por um lado, esta diferença acarreta um desafio acrescido para o comentador, pois comentar pressupõe fazer escolhas, por outro, constitui uma mais valia na medida em que contribui para enriquecer e ampliar a visão do que deve ser a aula de Matemática hoje e, por esta via, ajuda a perspetivar o que poderá ser feito para melhorar a qualidade das aprendizagens matemáticas dos alunos.

O depoimento de EV inicia-se uma palavra de ordem que entendi ser escrita em jeito de provocação: «Abaixo a sala de aula! Viva o trabalho de projeto!». Como bem sublinha, as palavras de ordem não se devem interpretar literalmente e a prossecução da leitura do texto revela, a meu ver, isso mesmo: aquilo a que me parece que EV diz não é a uma sala de aula dita tradicional, onde o professor se limita a apresentar uma Matemática «pronta a usar», onde a aprendizagem de técnicas é uma finalidade em si mesma e em que a experiência matemática proporcionada aos alunos exclui a possibilidade de se envolverem na resolução de problemas, na realização de investigações e no desenvolvimento de projetos que, no seu conjunto, façam surgir a necessidade destas técnicas, contribuam para uma compreensão conceptual da Matemática e conduzam os alunos a apreciar a natureza desta ciência e o seu papel na sociedade.

Também eu digo não a uma aula de Matemática assim, seja qual for o ano de escolaridade em que pense. A este propósito, ocorrem-me as palavras de Stewart (1995) quando sublinha que a Matemática não é sobre símbolos e cálculos — que considera serem apenas as ferramentas do ofício —, mas antes sobre ideias, em particular, sobre o modo como diferentes ideias se relacionam entre si, destacando que os problemas são a sua força motriz. Aqui o conceito de problema deve ser entendido em sentido abrangente, ou seja, inclui, outro tipo de tarefas com um grau de desafio elevado.

Adotar esta perspetiva sobre a Matemática conduz a que seja incontornável a necessidade de se criarem, na sala de aula, ambientes de aprendizagem com contornos bem diferentes da «tradicional aula de Matemática» e que penso serem compatíveis com o envolvimento dos alunos em qualquer um dos tipos de propostas de trabalho que EV refere (problemas, investigações e projetos); com o que designa por objetivos de caráter cultural; e com o que é preconizado, nomeadamente no Programa de Matemática do Ensino Básico português. Diferentemente do que me parece ser a sua posição, não considero que, em particular, a estrutura deste programa seja desadequada face a estes objetivos.

Um desses ambientes de aprendizagem é o que JPP&NB designam, no seu depoimento, por «aula de cunho exploratório/investigativo». Os episódios apresentados, embora associados à aprendizagem da Álgebra, são reveladores de aspetos a valorizar em qualquer aula de Matemática, como bem destacam os autores. Em particular, evidenciam que a exploração de tarefas que incentivam o raciocínio e a resolução de problemas, concomitantemente com uma discussão coletiva de estratégias de resolução bem orquestrada pelo professor, possibilita que os alunos construam conhecimento matemático novo e atribuam significado aos símbolos que usam para representar noções matemáticas (no caso, a noção de variável).

No depoimento de JPP&NB, há dois aspetos que considero serem merecedores de atenção. O primeiro diz respeito ao facto da Álgebra permitir que se estabeleçam conexões com qualquer outro tema matemático. Esta ideia conduz-me a destacar que, mais do que propor aos alunos tarefas algébricas pré-desenhadas em momentos específicos do ano letivo, o essencial, em particular nos primeiros anos de escolaridade, é que os professores incorporem nas práticas planeadas para ensinar tópicos matemáticos diversos, conversações de caráter algébrico. Estas são conversações que favorecem a aprendizagem de formas de representação de ideias que tornam visíveis as estruturas matemáticas subjacentes, que incentivam os alunos a envolver-se nalguma forma de generalização ou formalização, explicando e justificando os seus modos de pensar, e que promovem a atividade de raciocinar com generalizações. Trata-se, como diz um dos autores de referência sobre esta temática, de infiltrar a Álgebra ao longo de todo o currículo desde o início da escolaridade, de modo a que o raciocínio algébrico se torne um hábito de pensamento para os alunos.

O segundo aspeto prende-se com as discussões coletivas de ideias matemáticas que, tal como JPP&NB, considero poderem constituir importantes momentos de aprendizagem. Quando penso nos contornos destas discussões de modo a serem um meio privilegiado de promover a compreensão conceptual, a palavra que, de imediato, lhes associo é «orquestração». Esta palavra tem ressonâncias com processos de organizar e dirigir um debate, com combinações harmoniosas de sons, com os sons que devem ser ouvidos e o quê ou quem os origina, quando devem ser ouvidos, com que ritmo e dinâmica devem surgir e como se devem articular para o seu conjunto concorrer para um mesmo fim. A orquestração de discussões coletivas pelo professor prende-se com movimentos de ensino que têm ligações próximas com estes significados.

Passará esta orquestração apenas por dar a palavra aos alunos e valorizar, adequadamente, a sua participação? Penso que não. Antes de mais, é essencial que o professor encoraje e apoie uma participação com certas «qualidades»: é importante, por exemplo, mostrar-lhes que o que espera não é só a partilha das conclusões a que chegam, mas também o compromisso com a explicação, justificação e coerência dos seus raciocínios, com a colocação de questões aos colegas quando estes dizem algo que não entendem e com a avaliação e análise crítica e fundamentada do que ouvem. Além disso, o professor tem que ser capaz de tirar partido dos contributos dos alunos, de modo a dirigir a atividade da aula em direção a questões matemáticas significativas que tenham em conta a sua agenda de ensino. É que conseguir que os alunos exprimam publicamente as suas ideias é uma coisa; saber o que fazer com estas ideias é outra bem diferente.

Orquestrar, na sala de aula, uma discussão matemática produtiva cujo ponto de partida são tarefas cognitivamente desafiadoras, é um empreendimento extremamente exigente em que o papel do professor é particularmente difícil. No entanto, a sua concretização não é uma missão impossível. Práticas que se têm revelado úteis para fazer face à complexidade deste empreendimento são: (a) *antecipar*, previamente à aula, possíveis resoluções da tarefa a propor; (b) *monitorizar* o trabalho dos alunos durante a sua exploração; (c) *selecionar* criteriosamente, de entre as resoluções que surgem, as que serão partilhadas na turma; (d) *sequenciar* a sua apresentação; e (e) *estabelecer conexões* entre resoluções e ideias matemáticas (Smith *et al.*, 2009). Adoptar estas práticas pressupõe encarar as resoluções de alunos particulares como recursos que o professor pode usar para melhorar a compreensão matemática da globalidade da turma, permite que haja algum controlo sobre o que é provável que aconteça na aula e possibilita que sejam enfatizadas as principais ideias matemáticas a aprender.

Referências

Smith, M., Hughes, E., Engle, R. & Stein, M. (2009). Orchestrating discussions Mathematics *Teaching in the Middle School*, *14* (9), 548–556.

Stewart, I. (1995). *Os problemas da Matemática*. Lisboa: Gradiva.

Reacção aos depoimentos (João Pedro da Ponte e Neusa Branco)

No seu texto, Ana Boavida refere-se à importância do raciocínio matemático — uma capacidade transversal de grande importância — mostrando de uma forma muito sugestiva como se pode promover o seu desenvolvimento na sala de aula. Para isso é fundamental que o discurso coletivo do professor e alunos valorize os momentos de argumentação, ou seja, a procura dos fundamentos para as afirmações que se vão fazendo, quer relativamente às respostas para as tarefas resolvidas, quer relativamente às propriedades matemáticas conjeturadas. O desenvolvimento do raciocínio matemático tem muito a ver com este trabalho de justificação das afirmações, que deve merecer grande atenção desde os primeiros anos da escola. Em Matemática, tirando as convenções, tudo o resto acontece sempre por uma ou outra razão…

Concordamos inteiramente com a autora quando diz que ensinar a argumentar «é um empreendimento muito complexo». Fica-nos, no entanto, a dúvida qual é o melhor modo de abordar estas questões com um público profissional — é preferível colocar a ênfase na «argumentação», como faz a autora, ou falar em «raciocínio» e «justificação», como fazem a maioria dos documentos curriculares? A nossa experiência em momentos de formação com professores dos diferentes níveis de ensino sugere-nos que estas ideias precisam de um trabalho aprofundado e que, para a maioria dos participantes, é bastante mais fácil adequar os seus significados espontâneos de «raciocínio» e «justificação» do que de «argumentação», muito mais distante do seu discurso quotidiano.

Por outro lado, Eduardo Veloso faz uma defesa apaixonada do trabalho de projeto. Não podemos estar mais de acordo com ele quanto às grandes potencialidades deste tipo de trabalho. O que já não nos parece muito bem é opor «trabalho de projeto» e «sala de aula», uma vez que que o trabalho de projeto só tem a ganhar se começar na sala de aula (com uma boa discussão sobre os objectivos e propósitos do trabalho a realizar), se se desenvolver em ligação com a sala de aula (monitorizando o seu desenvolvimento e integrando aspectos da experiência anterior), e se terminar na sala de aula (com uma apresentação e discussão coletiva de pares — os outros alunos que, pelo seu lado, realizam outros projetos). Também não podemos perder de vista que, para que o trabalho de projeto ganhe sentido, são precisas muitas e boas aulas de trabalho continuado e sistematizado, a partir de tarefas devidamente organizadas, que não podemos de forma alguma descurar. Numa discussão sobre a sala de aula, mais do que gritos contra a sala de aula, seria interessante procurarmos ver como tirar o melhor partido desse espaço de trabalho conjunto que a sociedade (ainda) põe à disposição de alunos e professores. E dizemos «ainda», pois não tardarão muito as propostas para acabar de vez com as salas de aula, tal como existem hoje, deixando os alunos em casa, *on-line*, a fazer exercícios e projetos. Não se trata de uma questão retórica, mas de uma questão premente para quem se interessa pelo ensino da Matemática — a sala de aula é algo a eliminar ou a defender?

A discussão que Eduardo Veloso faz sobre os grandes propósitos do ensino da Matemática parece-nos bastante afastada do tema proposto. Quaisquer que sejam os grandes propósitos, haverá muitas questões a equacionar em termos da sua concretização. Pensar que se chega, por raciocínio dedutivo, dos propósitos aos espaços de trabalho em meia dúzia de linhas, é um tanto temerário… dada a complexidade dos fenómenos educacionais sublinhada, como vimos, por Ana Boavida. Devemos no entanto deixar claro que tanto são objetivos de ordem cultural trabalhar com a cissóide de Diocles como trabalhar os problemas verbais dos egípcios, babilónicos ou europeus da idade média. A cultura é tudo o que o homem socialmente organizado acrescenta à natureza, e existem múltiplas culturas, para todos os gostos, desde a cultura erudita à cultura popular… Ou seja, os objetivos do ensino da Matemática são sempre culturais, podem é estar mais associados a uma ou outra cultura. Parece-nos, pois, preferível manter como referencial o enunciado do novo programa de Matemática sobre as finalidades do ensino da Matemática, que nos parece claro, do que a formulação ambígua proposta pelo autor. Igualmente afastadas do tema são os seus comentários sobre os mais diversos assuntos, onde não faltariam pontos de concordância e discordância. Mas para que não fiquem dúvidas, reafirmamos aqui a nossa posição — a escola tem muito a ganhar com a diversificação dos espaços de trabalho e com as potencialidades das TIC para a aproximar do mundo exterior, mas para que esse potencial seja efetivamente aproveitado é fundamental a valorização da sala de aula como um espaço de trabalho, de discussão e de reflexão conjunta de professor e alunos.

João Pedro da Ponte
Neusa Branco

Reacção aos depoimentos (Eduardo Veloso)

1. Confesso que fiquei perplexo quando recebi os dois depoimentos para comentários. O convite que tinha recebido da equipa do número temático dizia expressamente que «Pretendemos recolher diferentes pontos de vista sobre a aula de Matemática, em jeito de debate». E eu respondi com uma espécie de manifesto a favor do trabalho de projecto e propondo novos objectivos para a matemática na sala de aula, incluindo um novo paradigma para esta, sem a habitual militarização dos 45 ou 90 minutos… Afinal, tinha que comentar dois artigos de investigação. Não se tratava portanto de um debate de opiniões. Mas de qualquer coisa que não estava ao meu alcance, pois estou inteiramente fora do meio da investigação, não conheço a maior parte dos autores citados nos artigos nem outros que possam ter opiniões diferentes sobre os assuntos tratados. Comuniquei a minha perplexidade à equipa que me tinha convidado. E é apenas pela amizade que me liga a esses colegas que aqui estou a tentar dizer qualquer coisa…

2. Duas notas prévias:

- Parecem-me muito interessantes os tipos de actividade propostos nos dois artigos e a análise e considerações que são feitas a propósito do seu desenvolvimento e do discurso da sala de aula. Bom seria que cada vez mais fosse este o ambiente nas salas de aula.
- O que vou escrever nos pontos seguintes não pressupõe quaisquer diferenças de opinião com os autores, dado que as actividades e os objectivos propostos nestes artigos não implicam que os autores rejeitem um outro tipo de propostas e objectivos que vou referir nesses pontos.

3. Uma observação comum aos dois artigos (que vou referir como Texto 1 — Desenvolvendo a linguagem algébrica e Texto 2 — Argumentação matemática em acção: Contornos e desafios).

Em quaquer dos textos, as actividades desenvolvidas são uma preparação para um tema matemático central. No Texto 1, estamos a caminho da manipulação simbólica, como é percebido por «Batista, um aluno que frequenta pela segunda vez o 7.º ano» [quando] sugere a letra *x*». No Texto 2, iremos entrar no tema da demonstração. Em qualquer dos casos, trata-se do conhecimento matemático e não do conhecimento sobre a matemática. Insisto, tal como fiz no meu depoimento, que este deve ser um objectivo central do ensino da matemática durante a escolaridade obrigatória e que, embora do facto de nenhum dos dois depoimentos se referir a este objectivo não se poder inferir que não está no pensamento dos seus autores, sentimos necessidade de insistir neste ponto.

4. Qual o papel característico da álgebra na construção da ciência matemática?

Ainda não compreendi bem o que é o pensamento algébrico — mas isso pode ser um problema pessoal, está claro… — mas as suas facetas, listadas no início do Texto 1 — generalização, simbolização, estudo de relações entre objetos matemáticos, variação e modelação — parecem-me processos característicos da matemática e não em especial da álgebra. O que me parece importante, do ponto de vista cultural, é que os alunos, depois da longa aprendizagem matemática no ensino básico e secundário. Fiquem a compreender que papel desempenha a álgebra na construção da matemática.

Henri Lebesgue escreveu num dos seus livros que «a geometria estimula-nos a pensar, ao passo que a álgebra pensa por nós». Eu acrescentaria: e até resolve problemas por nós, se tiverem sido bem formulados — na minha juventude dizia-se: se tiverem sido bem postos em equação. Não julgo que aquela frase de Lebesgue tivesse um sentido pejorativo. Aproxima-se da afirmação de Felix Klein, a propósito da resolução por métodos algébricos dos problemas clássicos da geometria (como a trisecção do ângulo): «uma coisa singular é o facto da geometria elementar não dar respostas para estes problemas. Temos que recorrer à álgebra e à análise superior. Surge então a seguinte questão: Como devemos usar a linguagem destas duas ciências para exprimir o emprego do compasso e da régua não graduada? Este novo método de ataque torna-se necessário porque a geometria elementar não possui um método geral, um *algoritmo*, como estas duas ciências» (*Famous problems of Elementary Geometry*, Felix Klein).

Esta longa história, com mais de dois mil anos, da demonstração pela álgebra da impossibilidade de resolução dos problemas clássicos da geometria grega, devia ser motivo para investigações e projectos na escolaridade obrigatória.

5. O Texto 2 diz respeito à argumentação e pode prever-se que mais tarde a questão da demonstração será abordada. Este é um tema fundamental para que os alunos adquiram um bom conhecimento da natureza da matemática. Não tenho espaço aqui para contar uma história exemplar a este respeito. Fica para uma próxima Nota sobre o Ensino da Geometria. Trata-se da resposta a dar a uma pergunta que recebi por e-mail de uma sobrinha-neta: «Estou no quinto ano, a começar a aprender sólidos geométricos e não sei responder a esta questão do trabalho de casa: Pode existir um sólido com 9 arestas e 9 vértices?»

Como responder?