# Uma <lente> para analisar tarefas numéricas

**Joana Brocardo**

A resolução e discussão de tarefas têm uma importância central na aula de Matemática. Por isso, no trabalho de planificação, o professor tem de se centrar na análise das tarefas. Antes de pensar da sua acção na aula, o professor precisa de seleccionar tarefas analisando as suas potencialidades e a sua adequação ao trabalho que pretende desenvolver com os alunos. Trata-se de uma fase importante da planificação e que poderá determinar muito do que se irá passar na aula de Matemática, ao nível das aprendizagens dos alunos. No entanto, nem sempre é fácil perceber as potencialidades ou limitações de tarefas que o professor nunca usou ou que usou sem reflectir intencionalmente sobre a sua adequação aos propósitos definidos.

Cada vez mais existem recursos diversificados e, sobretudo, um grande número de tarefas que o professor pode seleccionar para usar nas suas aulas. Por isso, é importante desenvolver uma ‹lente› para analisar tarefas que permita perceber o seu ‹valor› e decidir sobre a adequação da introdução de pequenas alterações que permitam construir uma nova tarefa, que pode, potencialmente, estimular mais os alunos a usar um pensamento flexível e a «olhar para os problemas» antes de usar um algoritmo.

A construção desta ‹lente› assenta numa perspectiva global de desenvolvimento do sentido de número e dá particular relevo ao que Gravemeijer e van Eerde (2009) designam por construção de um sistema de relações numéricas baseado na estrutura decimal dos números e que combina factos numéricos e relações entre números e operações.

Numa primeira fase os alunos operam sobre quantidades e medidas: sabem quanto se paga por 4 bilhetes de cinema que custam 5 euros cada um ou quantas maçãs estão em 4 sacos de 5 maçãs cada um. Progressivamente, começam a operar sobre os números e a estabelecer relações entre eles e entre as operações: $4 \times 5$ tem sentido em si sem que seja necessário pensar em preços de bilhetes ou número de maçãs; sabe-se que $4 \times 5 = 5 \times 4$; associa-se 20 a $4 \times 5$ e a $5 \times 4$ e percebe-se que $20 \div 5 = 4$ e que

$20 \div 4 = 5$. Finalmente, os alunos são capazes de estabelecer relações de relações: $4 \times 50 = 200$ pois $4 \times 5 = 20$; $2000 \div 4 = 500$ pois $2000 \div 5 = 400$; $4 \times 55 = 200 + 20$ pois $4 \times 55 = 4 \times (50 + 5)$.

Um aspecto central deste sistema de relações numéricas é que ele se constrói com base na dedução de factos relacionados (*derived facts* no original). Um exemplo de como esta dedução pode ser pensada é dado por Kraemer (2011) no esquema seguinte, construído a partir do conhecimento de que $4 \times 5$ é 20 (figura 1).

Igualmente importante é ter em conta que este sistema de relações deve ser usado na resolução de problemas. A investigação conduzida por Fátima Mendes evidencia a diferença entre conhecer relações entre os números e as operações e conseguir usá-las de forma eficaz na resolução de problemas. No trabalho de investigação que realizou concluiu que, embora os alunos conseguissem, por exemplo, usar a propriedade associativa da multiplicação no caso particular da relação dobro/metade na resolução de cadeias numéricas, tendiam a não o fazer na resolução de problemas de multiplicação que, muitas vezes, envolviam os mesmos valores numéricos que tinham trabalhado nas cadeias (Mendes, Brocardo e Oliveira, 2011).

Neste artigo centro a atenção em algumas tarefas, propondo uma forma de o professor as analisar avaliando se elas poderão, ou não, contribuir para o desenvolvimento do sistema de relações numéricas que caracterizei anteriormente. Ao longo do artigo identifico os traços gerais de uma ‹lente› para analisar tarefas numéricas focada no desenvolvimento deste tipo de sistema de relações numéricas, aspecto essencial subjacente ao desenvolvimento do sentido de número. Termino com uma pequena reflexão que integra a relevância do papel do professor e que deixa a interrogação da validade desta ‹lente› para apoiar a acção do professor na aula.

## Chegando à tarefa Comprimidos

No contexto da aprendizagem das relações entre as medidas de tempo hora, dia e semana podem ser colocados vários tipos de tarefas. Uma delas poderá ser a seguinte:

*O Manuel toma um comprimido de 6 em 6 horas e a Ana Carolina toma um comprimido de 8 em 8 horas. Quantos comprimidos toma cada um deles por dia? E por semana?*

O enunciado deste problema está elaborado com algum cuidado do ponto de vista do significado do contexto. A toma de comprimidos de 6 em 6 horas e de 8 em 8 horas, para além de corresponder a um tipo de prescrição médica usual, pode apoiar os raciocínios baseados na manipulação do contexto como os que estabelecem uma relação entre os intervalos de tempo e o número de tomas diárias:

6 horas — 1 comprimido; 12 horas — 1 comprimido;
18 horas — 1 comprimido, 24 horas — 1 comprimido.

Compare-se esta tarefa com a seguinte «Se dividir 24 maçãs por 6 sacos, com quantas maçãs fica cada saco?». Note-se que nesta última se colocam directamente os valores a manipular (24 e 6) e se usa a palavra «dividir». Pelo contrário, na tarefa inicial, os alunos têm de usar valores que não estão no enunciado

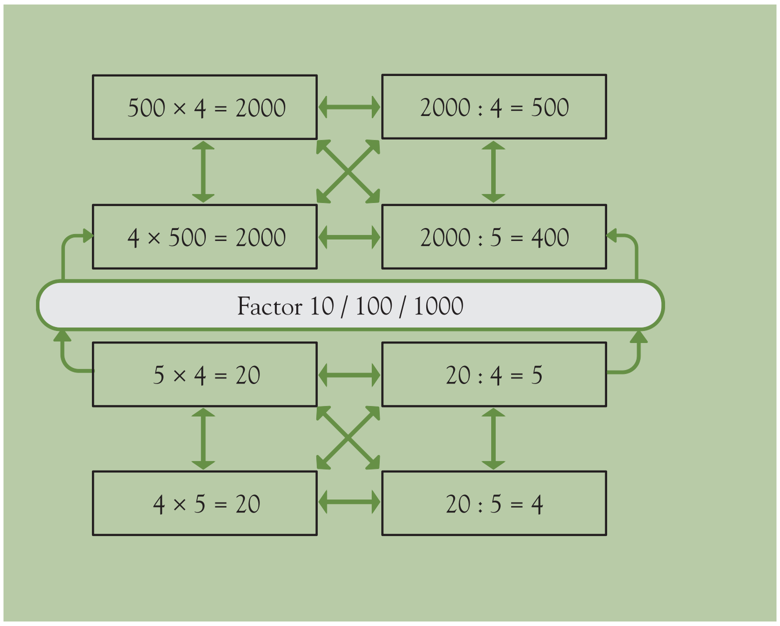



**Figura 1**

(24 — número de horas que tem um dia e 7 — número de dias de uma semana) e não têm qualquer palavra-chave que lhes dê indicação de uma operação que possam usar para responder à questão colocada. Contudo, também a tarefa inicial é de aplicação directa de procedimentos pois, à parte de se pensar quantas horas tem um dia e quantos dias tem uma semana, exige pensar num número reduzido de relações. Tal como a tarefa dos sacos de maçãs, está apresentada sem qualquer suporte visual o que pode ser pouco facilitador, sobretudo para os alunos com mais dificuldade que, se não percebem a situação, não têm qualquer imagem a que se «agarrar» para começar a interagir com o problema.

Pode argumentar-se que, no problema das maçãs, os alunos poderão desenhá-las. No entanto, passam a resolver a tarefa a um nível muito baixo, fazendo contagens de 1 em 1. No caso da tarefa sobre a toma de comprimidos é mais difícil pensar em representações concretas de intervalos de tempo, pelo que o recurso a um desenho, embora possível, parece mais problemático.

Estas duas tarefas, embora correspondendo a tipos de propostas que os alunos terão necessariamente de resolver para progredir na sua aprendizagem numérica, não correspondem ao que Ainley (2011) designa por tarefas produtivas e Dolk (2009) designa por problemas ricos. Este último autor, numa perspectiva de desenvolver o sentido de número focando a construção de um sistema de números e relações baseado na estrutura decimal dos números, destaca a importância de «usar problemas ricos em que os números e operações surgem de modo natural a partir de um contexto significativo, convidando os alunos a compreender o problema e os números e operações envolvidos» (p. 6).

Esta ideia de Dolk (2009), embora clara, não dá indicações precisas, pelo que pode revelar-se de difícil concretização. No entanto, parece-me ter sido conseguida na tarefa Comprimidos que, tal como a tarefa apresentada inicialmente, tem por

Depois de distribuir a folha do aluno, o professor deve apresentar a seguinte história desafiando os alunos a tentar explicar o comentário de Manuel e a perceber se a afirmação final de Ana Carolina estará correcta:

*Manuel conta a Ana Carolina que no sábado passado tinha ido a uma médica, porque estava doente, e que estava a tomar comprimidos de Melhorex: 1 comprimido de 6 em 6 horas. A Ana Carolina riu-se porque há uma semana atrás também tinha ido a uma médica e também começou a tomar um comprimido de Melhorex, só que de 8 em 8 horas. O medicamento e a quantidade eram iguais: 2 caixas de Melhorex de 2 placas de 24 comprimidos cada uma.*

*— Tomo mais do que tu —, diz o Manuel.*
*Ana Carolina pensa um pouco e responde hesitante:*

*— Sim … mas como …. como comecei antes de ti, se calhar … parece-me que vamos terminar os comprimidos ao mesmo tempo.*

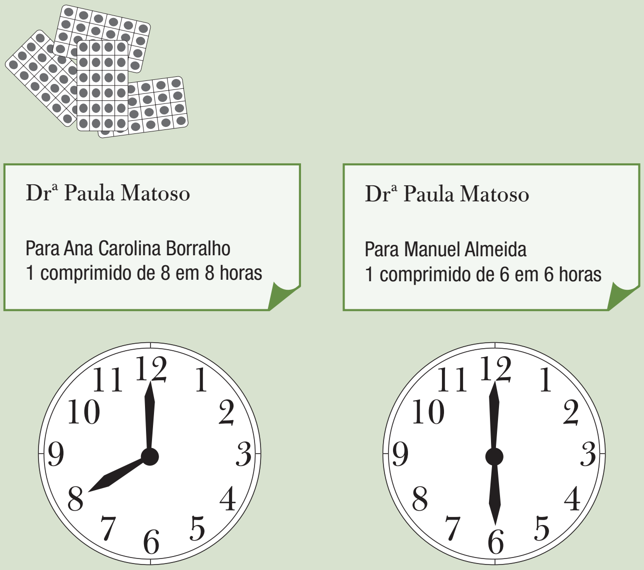



**Figura 2**

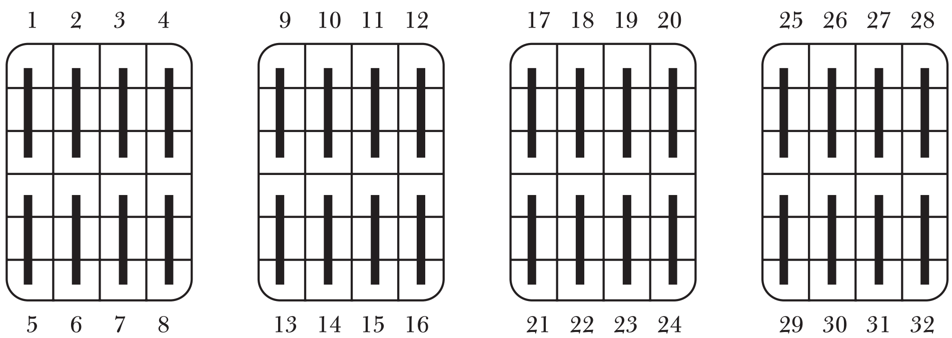



**Figura 3.** Modo como Francisco, um aluno de 2.º ano, usa as imagens incluídas no enunciado para calcular o número de dias de tratamento de Ana Carolina

contexto uma prescrição de comprimidos. Esta tarefa, construída no âmbito do projecto *Desenvolvendo o sentido de número* (Equipa do projecto DSN, 2005), inclui, na folha para o aluno, um conjunto de imagens ilustrativas da situação (figura 2).

Ao analisar esta tarefa começa por sobressair o ‹tom intrigante› em que é apresentada que convida a ‹arregaçar as mangas› e ir verificar se o que Manuel e Ana Carolina afirmam é verdade ou não. Em algumas aulas em que foi usada foi visível o modo como os alunos estiveram atentos à história contada pelo professor e como ficaram interessados em ‹decidir› se as duas personagens da história terminam o tratamento ao mesmo tempo, ou não, e o que é que Manuel quererá dizer ao afirmar «tomo mais do que tu». Em suma, trata-se claramente de uma tarefa que pode potencialmente criar surpresa e suscitar questões.

Um outro aspecto que se destaca é a possibilidade de, ao incluir no seu enunciado as imagens das placas de comprimidos, alunos com diferentes níveis de desenvolvimento a resolverem. De facto, os alunos podem usar as placas para pensar (figura 3) o que, do ponto de vista da aprendizagem numérica, corresponde a promover o uso de um modelo de grupo (na disposição rectangular), mais ‹sofisticado› que o uso de objectos não agrupados e que constitui um marco importante na progressão ao nível da aprendizagem da multiplicação.

A inclusão de uma imagem com um relógio tinha idêntica intenção: possibilitar o uso do modelo do relógio para pensar na afirmação de Manuel. Contudo, a aplicação da tarefa mostra que os alunos tendem a não recorrer a este apoio. Provavelmente porque os que dele necessitariam (alunos que não conseguem ‹manipular› mentalmente grupos de horas ou não encontram


**Figura 4**. O modelo do relógio

uma forma alternativa de registo que permita pensar no problema) precisavam de um modelo mais estilizado, do tipo dos que são habitualmente usados nos manuais ler e marcar as horas (ver figura 4).

No 1.º e no 2.º ciclos a inclusão de determinado tipo de representação gráfica associada a modelos como a que referi anteriormente pode ser decisiva para que um maior número de alunos seja capaz de ‹manipular› a tarefa e de a resolver autonomamente. Noutros níveis de ensino têm maior relevância outro tipo de representações como as tabelas incompletas, a rectas dupla (um modelo de proporcionalidade) ou o modelo da balança. Note-se que me refiro a representações que nada têm a ver com ilustrações gráficas, habitualmente introduzidas com a ideia, muitas vezes discutível, de tornar mais apelativa a tarefa. Em alguns casos essa ilustração tem mesmo um papel contraproducente ao nível do desenvolvimento da aprendizagem como acontece, por exemplo, se no problema das mação, se ‹ornamentar› o seu enunciado com a imagem de algumas maçãs. Refiro-me, pelo contrário, à integração de ‹modelos para pensar› ou seja, de esquemas gráficos que podem apoiar produtivamente a exploração da tarefa por parte de um maior número de alunos.

Um aspecto muito importante na análise de uma tarefa diz respeito à diversidade de aspectos que ela relaciona. Tarefas como as duas que inicialmente apresentei são relativamente pobres pois requerem o uso de um procedimento em que se usa directamente a informação disponível. Pelo contrário, na tarefa Comprimidos, a análise da afirmação de Ana Carolina envolve a compreensão de vários aspectos como, por exemplo: quantos comprimidos têm duas caixas, quantos dias dura o tratamento de cada criança, relacionar o número de semanas do tratamento de cada uma com facto de uma delas o ter começado mais cedo, para decidir quem o acaba primeiro. Trata-se de uma rede de aspectos relacionados que faz apelo ao uso, e dá sentido, de diferentes relações numéricas (figura 5).

Este sistema local de relações evidencia uma outra característica das tarefas, essencial quando se tem como objectivo trabalhar o cálculo mental, aspecto de fulcral importância para desenvolver o sentido de número: a escolha intencional dos números a manipular. Uma vez que não se está no ‹terreno› do uso de algoritmos os valores numéricos escolhidos importam. Por isso, é mais adequado pensar em caixas com 48 ($2\times24$) comprimidos do que, por exemplo, em caixas com:

— 32 ($2\times16$) comprimidos, pois Ana Carolina não tomaria uma placa num número inteiro de dias;
— 50 ($2\times25$) comprimidos, pois tanto Ana Carolina como Manuel não tomariam uma placa num número inteiro de dias.

Finalmente, esta tarefa pode facilmente suscitar outras questões: «E se a prescrição fosse de 12 em 12 horas?», «E se cada caixa tivesse 3 placas »? … A possibilidade de, no final da exploração de uma tarefa, formular «E se …? » é igualmente uma característica importante que pode levar ao prolongamento das relações numéricas e que ajuda a desenvolver o hábito de investigar outros aspectos que podem surgir de um mesmo contexto.

Em suma, a análise detalhada desta tarefa evidencia a relevância de cinco aspectos que proponho como ‹lentes› para analisar as tarefas numéricas: suscitar curiosidade, permitir que diferentes alunos tenham ‹acesso› à tarefa, permitir estabelecer uma teia de relações numéricas, existir ‹intencionalidade› nos números envolvidos e favorecer a formulação de novas questões.

## Calcular expressões numéricas

Em todos os manuais se encontram séries de exercícios propondo o cálculo de expressões numéricas. Trata-se de tarefas curtas, destinadas a praticar procedimentos de cálculo e que têm sentido continuar a ser propostas aos alunos. De seguida apresenta-se um exemplo de uma tarefa habitual em manuais de 7.º ano:

Calcula:
a) $-2\times4\times5$
b) $6\times(-2)\times5$
c) $40\times(-2)\times5$
d) $67\times(-5)\times2$

Na resolução deste tipo de tarefas os alunos tendem a resolver uma a seguir à outra, sem se questionarem sobre relações entre elas ou se as podem resolver mentalmente. As mesmas expressões numéricas podem ser usadas na tarefa que passamos a descrever, focada no pensar em relações entre as expressões:

Analisa as seguintes expressões numéricas e propõe uma ordem para as efectuares. Justifica o modo como pensaste.

| | |
|---|---|
| $67\times(-5)\times2$ | $-2\times4\times5$ |
| $6\times(-2)\times5$ | $40\times(-2)\times5$ |

Se preferires podes começar por seleccionar duas expressões que penses poder relacionar e indicar qual é que calcularias em primeiro lugar e porquê.

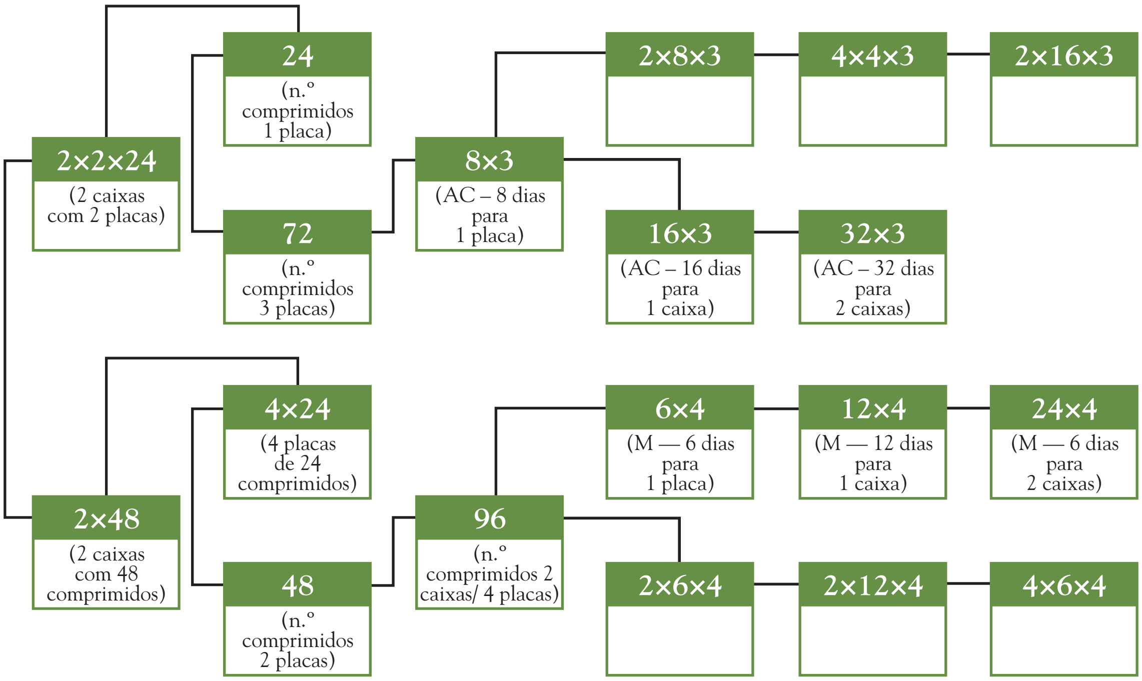



**Figura 5**

Esta tarefa é um exemplo[1] de como uma sucessão de expressões numéricas pode abrir caminhos de exploração de relações numéricas e de aplicação de propriedades das operações. Note-se que nela estão presentes, potencialmente, as cinco características que realcei para a tarefa Comprimidos:

**Suscitar curiosidade.** As situações em que os alunos podem livremente pensar ‹jogando› com diversas possibilidades tendem a despertar uma vontade de começar a ‹mexer› nos dados e a pensar. Naturalmente que haverá alunos que preferem resolver exercícios rotineiros, por preferirem a ‹segurança› de usar procedimentos que dominam. No entanto, potencialmente, esta tarefa tem ‹ingredientes› para suscitar a curiosidade uma vez que os alunos se podem interrogar sobre o que acontece se escolherem esta ou aquela expressão para iniciar a ordenação das expressões. Também poderão sentir curiosidade de determinar o valor numérico de cada uma (que dificilmente sentiriam na tarefa de cálculo directo do valor de cada expressão), pois ele pode confirmar uma proposta de ordenação.

**Permitir que diferentes alunos tenham ‹acesso› à tarefa.** Nas tarefas com contexto este aspecto traduz-se, habitualmente, na inclusão de modelos que podem ser usados para pensar. Nas tarefas sem contexto, pode recorrer-se, por exemplo, à delimitação dos aspectos a analisar, como se faz com a sugestão de focar a atenção em apenas duas expressões que se pense poderem estar relacionadas.

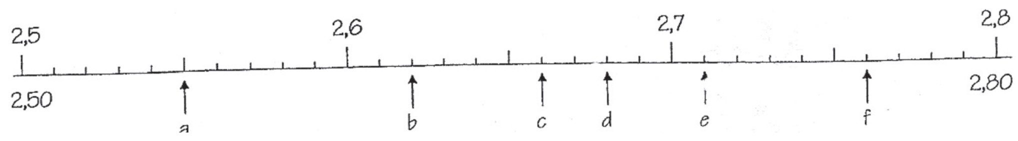
**Permitir estabelecer uma teia de relações numéricas.** Este é claramente o foco desta tarefa uma vez que se baseia em pensar em relações numéricas que possam ser estabelecidas para justificar uma determinada ordenação.

**Existir ‹intencionalidade› nos números envolvidos na tarefa.** Esta tarefa foi construída com base na escolha intencional de números que potencializavam o uso de relações que se pretendiam trabalhar. Por isso, se escolheram números cujo produto é 10 (2 e 5), se usa o 4 para se poder relacionar com 40 e o 67 na tentativa que ele possa ser relacionado com 60 e com 7.

A escolha intencional dos números, embora sempre interligada à possibilidade de estabelecer teias de relações numéricas, é particularmente importante quando se pensa numa cadeia de tarefas, planeada para trabalhar determinado tópico. Neste caso, deve ser cuidadosamente analisada a relação entre os valores numéricos usados em cada uma das tarefas, tendo o cuidado de ir explicitamente pensando no modo de evoluir para propostas com números sucessivamente mais ‹exigentes› do ponto de vista do cálculo mental.

**Favorecer a formulação de novas questões.** Este é um aspecto intrinsecamente presente na tarefa. Para a resolver os alunos têm de se interrogar: *E se pensar em começar pela expressão* $6 \times (-2) \times 5$*? E se começar pela expressão* $40 \times (-2) \times 5$*? E se…*.

**Tarefas de manuais escolares** (Dolk, 2009, p. 5)




**Tarefa transformada** (Dolk, 2009, p. 6)

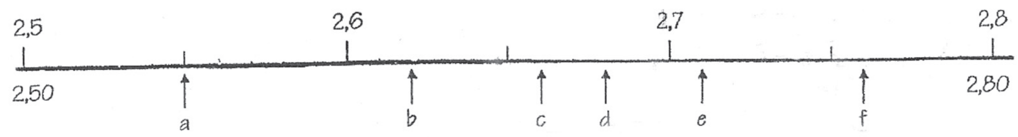



**Figura 6.** Duas tarefas de localização de pontos na recta numérica

## Localizar números na recta

Dolk (2009) apresenta um exemplo de transformação de uma tarefa usual em manuais que me parece bastante inspirador (figura 6).

Este autor reflecte sobre as potencialidades da nova tarefa a partir das respostas dos alunos, aspecto que poderia igualmente ser considerado para aferir a ‹lente› de análise de tarefas numéricas que tenho vindo a propor. No entanto, tendo em conta o âmbito que delimitei para este texto, saliento apenas que ela convida os alunos a experimentar e a formular novas questões (por exemplo, *E se os valores marcados fossem 2.5, 2.9, 3.3 e 3.7?*), envolve um conjunto de relações numéricas que dizem respeito a números escolhidos intencionalmente e que, com a inclusão de algumas sugestões adicionais (por exemplo, *Depois de saberes que valor corresponde a* ***a*** *pensa em como poderias relacionar* **c** *com* ***e***) poderia, igualmente, permitir que um maior número de alunos tivesse ‹acesso› à tarefa.

## Nada é ‹à prova› de professor

Tenho vindo a argumentar a favor de olhar para as tarefas numéricas a partir de uma ‹lente› focada em cinco aspectos: suscitar curiosidade, permitir que diferentes alunos tenham ‹acesso› à tarefa, permitir estabelecer uma teia de relações numéricas, existir ‹intencionalidade› nos números envolvidos na tarefa e favorecer a formulação de novas questões.

Considero que estes aspectos têm valor por si próprios e que podem ser produtivamente usados para seleccionar e adaptar tarefas e sequências de tarefas. No entanto, não basta ter tarefas potencialmente ricas. O modo como o professor organiza a sua exploração e discussão é determinante para que os alunos evoluam na sua aprendizagem numérica, desenvolvendo o sentido de número. Como revela o trabalho colaborativo com dois professores em que participou Catarina Delgado no âmbito do seu trabalho de investigação (Delgado, Brocardo e Oliveira, 2011) , é preciso acreditar que é possível mudar. E acredita-se depois de incluir na sua prática aspectos com que se está pouco familiarizado, mas que parecem relevantes para a aprendizagem numérica dos alunos, e depois de reflectir sobre eles.

A argumentação para a construção da ‹lente› que proponho neste artigo foi feita ‹sem› o professor sabendo que ela não é ‹à prova› de professor. Ainda assim, considero que os cinco aspectos em que se foca esta ‹lente› são propostas de reflexão para o professor não só ao nível da selecção das tarefas como também ao nível da sua exploração na aula.

### Nota

[1] Em Brocardo, Delgado e Mendes (2009) a tarefa «Relacionar para calcular» (p. 113), veicula o mesmo tipo de ideia.

### Referências bibliográficas


Ainley, J. (2011). Developing purposeful mathematical thinking: A curious tale of apple trees In Ulbuz, B. Tzekaki, (Ed.), (2011). *Proceedings of the 35rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1 pp 1–16). Ankara, Turkey: PME.

Brocardo, J., Delgado, C. & Mendes, F. (2009). *Números e operações — 1.º ano. Materiais de apoio ao Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação (http://www.dgidc.min-edu.pt).

Delgado, C., Brocardo, J., Oliveira, H. (2011). Teacher's practice and number sense development in elementary school. In Ulbuz, B. Tzekaki, (Ed.), (2011). *Proceedings of the 35rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1 p. 449). Ankara, Turkey: PME.

Dolk, M. (2009). Looking at numbers: Young children developing number sense. In C. Costa, E. Mamede & F. Guimarães (Eds.) *Actas do XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática* (em CD). Vila Real.

Equipa do projecto DSN (2005). *Desenvolvendo o sentido do número: perspectivas e exigências curriculares*. Lisboa: APM.

Gravemeijer, K. P. E., & van Eerde, D. (2009). Design Research as a Means for Building a Knowledge Base for Teachers and Teaching in Mathematics Education. *The Elementary School Journal*, 109(5).

Kraemer, J.M. (2011). *Como identificar níveis intermédios de pensar, simbolizar e de cálculo mental nas respostas dos alunos do ensino primário?* Apresentação realizado no quadro da formação interna de consultores de avaliação. Cito (Holanda) (não publicada).

Mendes, F., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2011). Os procedimentos usados pelos alunos do 1.º ciclo quando resolvem tarefas de multiplicação e a sua evolução. *Indagatio Didactica*. Universidade de Aveiro: Aveiro.


*Nota:* Os comentários de Fátima Mendes sobre versões preliminares deste texto foram muito importantes para a sua concretização.

**Joana Brocardo**

Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal

Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa