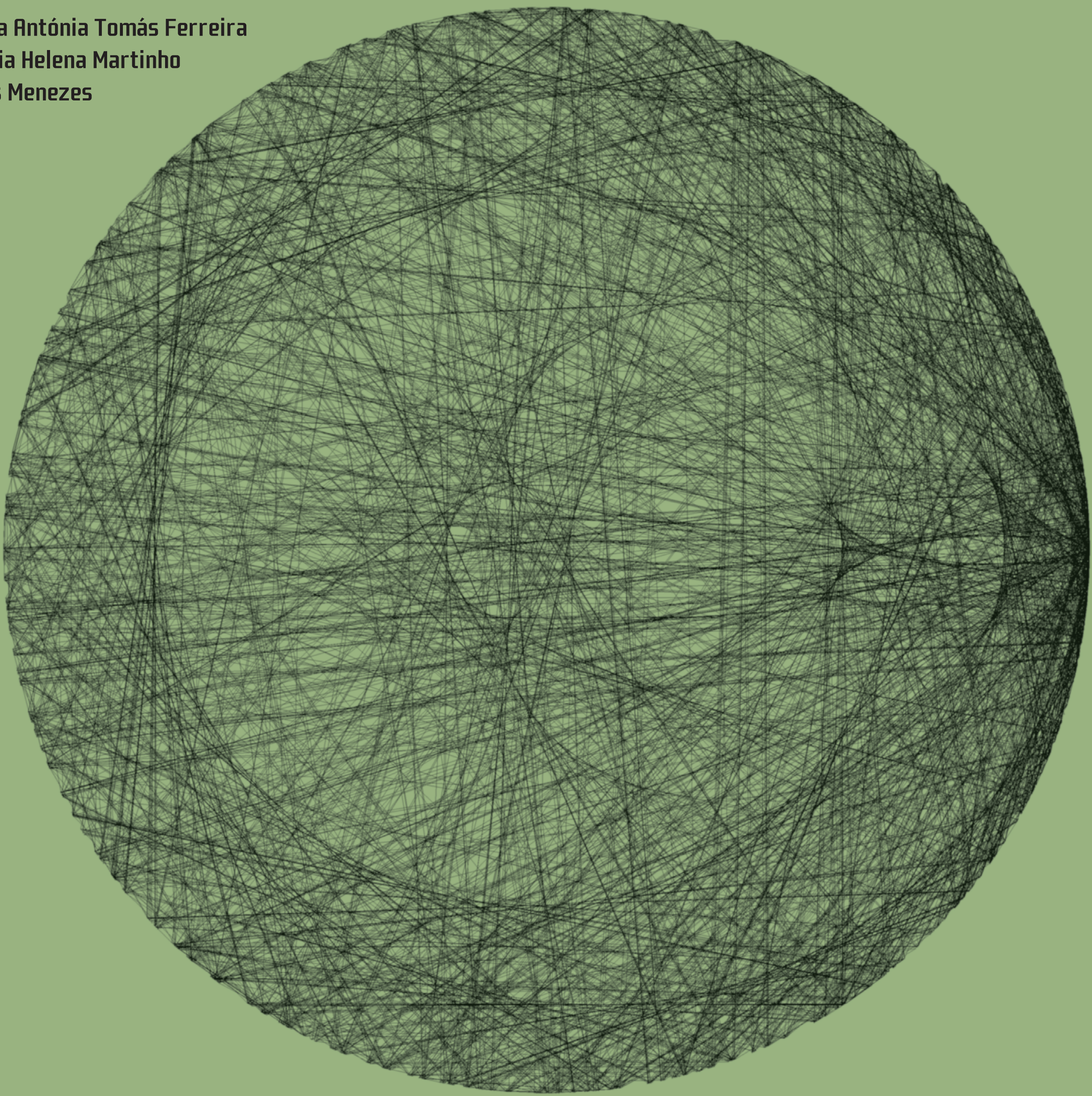
Teachable Moments: oportunidades a não perder

Rosa Antónia Tomás Ferreira
Maria Helena Martinho
Luís Menezes



O trabalho em torno do papel do professor na comunicação na sala de aula é um imperativo da formação de professores, seja ela inicial ou contínua (Bishop e Goffree, 1986; Brendefur e Frykholm, 2000; Ponte e outros, 2007; Ruthven, Hofmann e Mercer, 2011). De facto, se os alunos aprendem a comunicar, comunicando, os professores também aprendem a gerir a comunicação na sala de aula experienciando e refletindo sobre situações que envolvem desafios vários inerentes a essa vertente do seu papel. Uma das formas mais comuns de concretizar este objetivo consiste, precisamente, na análise e discussão de pequenos episódios de sala de aula (Bishop e Goffree, 1986; Ruthven e outros, 2011), como o que apresentamos a seguir (Boavida, 2001, adaptado de Prince, 1998). Neste texto começamos por analisar um episódio ao nível das ações desencadeadas por uma professora e do conhecimento didático que as suporta. Depois, analisamos a forma como futuros professores de Matemática, a iniciarem o seu mestrado profissionalizante entendem o episódio, do ponto de vista matemático e do ponto de vista da gestão da aula. Finalmente, terminamos com algumas questões para a formação de professores que decorrem desta análise.

A Rita e os números primos

A professora da Rita propôs à sua turma que encontrasse todos os números primos inferiores a 50. Depois de algum tempo de trabalho, a Rita reparou que os números primos maiores do que 5, que tinha identificado até ao momento, terminavam em 1, 3, 7 ou 9. Chamou a professora para lhe mostrar a sua descoberta e esta solicitou-lhe que analisasse com a colega a melhor forma de a comunicarem à turma durante a apresentação colectiva do trabalho realizado. Nesta altura, a Rita escreveu no quadro todos os números primos inferiores a 50 e leu o que tinha escrito no caderno:

Rita: Os números primos menos o 2 e o 5 terminam em 1, 3, 7 ou 9.

A professora propôs, então, à turma que analisasse se aconteceria o mesmo com outros números primos. Os alunos começaram a observar vários casos de números primos, alguns dos quais muito superiores a 100, e não encontraram nenhum que não terminasse em 1, 3, 7 ou 9. Não tardou muito que, convictamente, afirmassem que o que a Rita tinha descoberto era verdadeiro para todos os números primos, independentemente de os terem observado ou não, porque não conseguiam encontrar nenhum que não terminasse nesses algarismos. Nessa altura, a professora escreve no quadro:

Conjetura da Rita: Todos os números primos, excepto 2 e 5, terminam em 1, 3, 7 ou 9.

Certifica-se se os alunos se recordam do significado de conjetura e desafia-os a encontrarem um processo que permita ter a certeza se a conjetura é, de facto, válida para todos os números primos e por que o é.

Os alunos tentam corresponder ao desafio e, no processo, reforçam a convicção de que a conjetura é verdadeira, mas o seu trabalho não progride.

É, então, que a professora, optando por trabalhar com toda a turma, decide escrever no quadro, os números de 0 a 9 e assinala com um círculo 1, 3, 7 e 9. Quase de imediato, começam a surgir várias sugestões:

Maria: «Stora» risque os números 0 e 5. Um número primo maior do que 5 não pode terminar nem em 0 nem em 5.

Professora: Porquê?

Maria: Se terminar em 0 ou 5 é múltiplo de 5 e por isso não era primo.

Daniel: Tem que riscar também o 2, o 4, o 6 e o 8. Se é maior que 2 e é um número primo, não pode ser par!

Bernardo: Pois não. O 2 é divisor…

Professora: E então?

Bernardo: Um número primo só pode ter dois divisores.

Rosa: Pois. Se termina em 2, 4, 6 ou 8 é porque é par e os números pares são múltiplos de 2.

Rita: Só sobram o 1, o 3 o 7 e o 9. Afinal todos os números primos menos o 2 e o 5, terminam da forma que eu descobri. Já temos a certeza.

Inês: Mas o contrário não é verdade. Por exemplo, 21 termina em 1 e não é primo.

Professora: Porque é que 21 não é primo?

Vários alunos: Porque 3 é divisor de 21; 3 vezes 7 é igual a 21.

Bernardo: Tem divisores diferentes de 1 e de 21.

Professora: Então vejam lá se é verdade, ou não, o que eu vou escrever no quadro: todos os números que terminam em 1, 3, 7 ou 9 são primos.

Ouvem-se várias vozes dizendo «não é verdade». Referem 21, 27, 33…

(…)

Análise de um episódio

Apresentamos o episódio «A Rita e os números primos», que acontece numa aula de Matemática correspondente ao nosso 7.º ano de escolaridade. Em seguida, propomos uma análise do episódio, onde enfatizamos as ações didáticas da professora, nas quais ela mobiliza o seu conhecimento didático da Matemática.

Neste episódio, a tarefa proposta inicialmente pela professora (encontrar todos os números primos inferiores a 50) é fechada e com baixo nível de exigência cognitiva para os alunos a que se destinava. Contudo, a partir de um comentário de uma aluna, no decorrer do episódio, a atuação da professora rapidamente elevou o nível cognitivo da tarefa, transformando um simples exercício (para estes alunos) numa tarefa que envolveu uma prova matemática e a discussão de aspetos de lógica elementar (por exemplo, implicações, implicações recíprocas, exemplos e contraexemplos). Mas, especificamente, o que fez a professora? Quais foram as suas ações instrutivas para dar seguimento à aula? Fazemos, em seguida, uma breve análise das principais decisões tomadas pela professora resultantes da sua reflexão na ação (Schön, 1987), suscitadas pelas contribuições que os alunos foram dando para o discurso da sala de aula.

A primeira decisão da professora, face ao comentário da Rita no decurso da resolução da tarefa, foi *não validar imediatamente a ideia da aluna*, mas remeter a validação para a própria Rita e a sua colega de carteira com o objetivo de, posteriormente, ambas apresentarem a descoberta à turma. De facto, alguns momentos volvidos, a Rita foi ao quadro e começou por escrever a resposta à questão inicialmente proposta pela professora; só depois comunicou aos colegas a descoberta que tinha feito: «Os números primos, menos o 2 e o 5, terminam em 1, 3, 7 ou 9».

A segunda decisão da professora consistiu em *prolongar a tarefa inicial à custa da descoberta da Rita*, desafiando os alunos a verificarem se o que a aluna tinha afirmado seria válido para outros números primos. A reação dos alunos não foi surpreendente: escolheram vários números aleatoriamente (muitos deles de uma ordem de grandeza bastante elevada) e verificaram se o que a Rita afirmara se verificava ou não. Não sendo capazes de encontrar números que contrariassem a ideia da Rita, foi com naturalidade que os alunos aceitaram a veracidade dessa mesma ideia.

Consciente do facto de que o que estava em jogo era a prova ou refutação de uma conjetura, bem como o papel dos exemplos nesse processo, a professora tomou uma terceira decisão, que se veio a mostrar crucial no desenrolar da aula: *escrever no quadro* «Conjetura da Rita: Todos os números primos, excepto 2 e 5, terminam em 1, 3, 7 ou 9». A escrita no quadro da palavra conjetura não foi irrefletida pois a professora tinha a noção de que esta designação podia não ser familiar a todos os alunos ou não ser entendida por todos de forma correta. Além disso, a forma como a professora formulou a conjetura da Rita tornou inequívoca a abrangência da afirmação da aluna pois não existe informação no episódio sobre se a Rita teria ou não analisado casos de números primos superiores a 50.

A quarta decisão importante da professora consistiu em *discutir com os alunos o significado de conjetura*, ancorando essa discussão na descoberta da Rita e no lançamento dos alunos num processo de prova ou refutação de uma conjetura, envolvendo explicitamente a justificação do seu raciocínio. Este desafio não se mostrou fácil para os alunos e, de facto, eles não conseguiram mais do que reforçar as suas ideias à custa de mais exemplos que, no entanto, nada provavam. Surgiu mais uma decisão marcante da professora: *escrever no quadro todos os algarismos e assinalar com um círculo aqueles que correspondem ao algarismo das unidades de um número primo, segundo a conjetura da Rita (1, 3, 7 e 9)*.

De acordo com o que é relatado no episódio, os alunos parecem ter intuído que o que a professora escrevera no quadro eram as possíveis terminações dos números naturais. E rapidamente começaram um processo de eliminação dos algarismos escritos usando os seus conhecimentos de critérios de divisibilidade. Como acordado, a professora procurou que todas as afirmações dos alunos fossem justificadas, inquirindo os alunos: «Porquê?», «E então?».

A Rita parece ter ficado muito satisfeita ao sentir que se tinha chegado a uma certeza, a certeza de que a sua conjetura era mesmo verdadeira. A Inês rapidamente avançou com outra descoberta: «Mas o contrário não é verdade. Por exemplo, 21 termina em 1 e não é primo». Após se certificar que os alunos compreendiam por que razão 21 não era primo, pois eles avançavam com várias explicações, a professora tomou mais uma decisão fundamental: *escrever no quadro a implicação recíproca da conjetura da Rita*, dando voz ativa à constatação da Inês. E os contraexemplos começaram a surgir, não restando dúvidas aos alunos de que esta nova conjetura não era verdadeira.

Sintetizando, foram vários os momentos em que a intervenção da professora foi decisiva para a qualidade do discurso produzido na aula, elevando consideravelmente o desafio cognitivo da tarefa inicial e envolvendo os alunos em atividade matemática significativa. Importa realçar que toda esta atividade em torno de questões de lógica elementar, mas complexa para estes alunos, não estava planeada, tendo resultado de a professora ter aproveitado um *teachable moment*, ao perceber a potencialidade da afirmação de uma aluna e ao aproveitar essa oportunidade para explorar matematicamente noções bem mais exigentes do que a noção de número primo.

Conhecimento didático do professor e ações instrucionais

O conhecimento didático do professor é basilar num ensino de qualidade e imprescindível na identificação e aproveitamento didático de um *teachable moment*, como pretendemos ilustrar com o episódio «A Rita e os números primos».

A noção de conhecimento didático não é consensual e muitos autores se têm dedicado a este assunto (Ponte, 1999, no prelo). Neste texto, entendemos o conhecimento didático do professor como o relativo a aspetos da prática do professor, um conhecimento «essencialmente orientado para a ação» (Ponte, 1999, p. 61), e envolvendo quatro dimensões: conhecimento do currículo, conhecimento da Matemática, conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem, e conhecimento dos processos de trabalho em sala de aula (Ponte e Oliveira, 2002).

Apesar da sua marcada orientação para a prática letiva, o conhecimento didático envolve também outros aspetos como o conhecimento do contexto (escola e comunidade, entre outros) e o conhecimento de si mesmo como professor (Ponte, no prelo), tendo um carácter dinâmico, uma vez que as experiências e situações da prática que o professor vai encontrando contribuem para que o seu conhecimento didático se reformule constantemente (Ponte e Santos, 1998). Focamo-nos aqui nas dimensões do conhecimento da Matemática e do conhecimento dos processos de trabalho em sala de aula (ou conhecimento instrucional como é muitas vezes designada esta vertente do conhecimento didático do professor).

Que aspetos do conhecimento didático da professora estão evidentes no episódio «A Rita e os números primos»? Podemos elencar alguns. Por um lado, a professora ouviu efetivamente o que os alunos foram dizendo (em especial, a afirmação inicial da Rita e a conjetura da Inês) e valorizou as contribuições dos alunos como merecedoras de discussão, independentemente da sua veracidade ou rigor na linguagem. Por outro lado, a professora deu aos alunos a responsabilidade do processo de validação e refutação das duas conjeturas, orquestrando a discussão com toda a turma de modo a que houvesse um entendimento comum da noção de conjetura (negociação do significado do conceito), incentivando, através da formulação de perguntas, a justificação das afirmações apresentadas.

Ao longo deste episódio, toda a atuação da professora esteve, certamente, ancorada no seu conhecimento matemático, que lhe permitiu reconhecer um *teachable moment* e aproveitá-lo de forma a levar os alunos a fazer matemática. De facto, e reportando-nos ao *Quadro das tarefas matemáticas*, de Stein e Smith (1998), a tarefa que a professora inicialmente propôs aos alunos era de um nível de exigência cognitiva reduzido (memorização ou procedimentos sem conexões). Mas o reconhecimento de um *teachable moment* iniciado com a conjetura da Rita levou a professora a desencadear uma atividade com toda a turma em torno de uma tarefa, que podemos considerar na categoria de *fazer matemática* (Stein e Smith, 1998), o que aumentou consideravelmente o nível de exigência cognitiva.

O episódio num contexto de formação

Assumindo a importância de abordar, em contextos de formação, aspetos relativos ao papel do professor na gestão da comunicação matemática na sala de aula, foi proposta a análise do episódio «A Rita e os números primos» a estudantes do 1.º ano de Mestrado em Ensino da Matemática. Os estudantes analisaram este episódio no contexto de uma prova escrita de avaliação, no final da segunda unidade curricular sobre aspetos da Didática da Matemática na qual tinham analisado alguns episódios de sala de aula. De entre as várias questões que orientaram a análise do

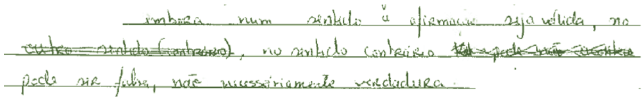

embora num sentido a afirmação seja válida, no ~~outro sentido (contrário)~~, no sentido contrário pode ser falsa, não necessariamente verdadeira.

Figura 2. Resposta de Pedro à questão (1)

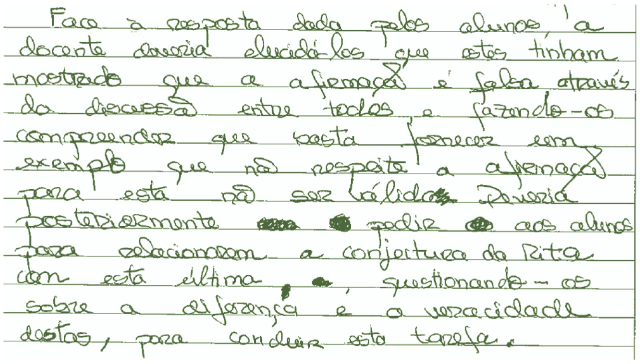

Face à resposta dada pelos alunos, a docente deveria elucidá-los que estes tinham mostrado que a afirmação é falsa, através da discussão entre todos, e fazendo-os compreender que basta fornecer um exemplo que não respeite a afirmação para esta não ser válida. Deveria posteriormente pedir aos alunos para relacionarem a conjectura da Rita com esta última, questionando-os sobre a diferença e a veracidade destas, para concluir esta tarefa.

Figura 1. Resposta de Júlio à questão (1)

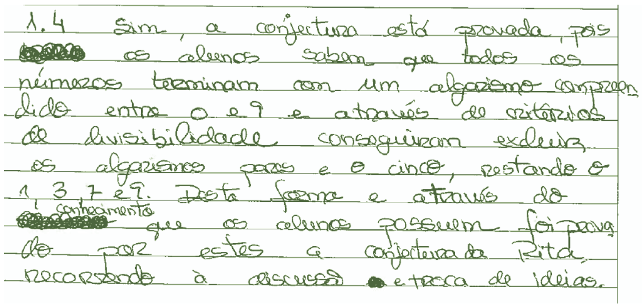

1.4 Sim, a conjectura está provada, pois os alunos sabem que todos os números terminam com um algarismo compreendido entre o 0 e 9 e através de critérios de divisibilidade conseguiram excluir os algarismos pares e o cinco, restando o 1, 3, 7 e 9. Desta forma e através do conhecimento que os alunos possuem, foi provada por estes a conjectura da Rita, recorrendo à discussão e troca de ideias.

Figura 3. Resposta de Júlio à questão (2)

episódio, foram colocadas as seguintes: (1) *Como acha que a professora deveria ter conduzido o discurso após as últimas intervenções dos alunos neste episódio?* e (2) *Considera que a conjetura da Rita está provada?* Por que sim, ou por que não? As respostas obtidas variaram bastante, tanto em termos do grau de compreensão das questões matemáticas subjacentes ao episódio como em termos de opções didácticas para dar seguimento ao episódio. Apresentamos a seguir uma análise dessas respostas usando para isso alguns casos.

Júlio e Pedro são dois jovens alunos do Mestrado em Ensino da Matemática de uma universidade pública, tendo concluído a sua Licenciatura em Matemática na mesma instituição onde continuam a estudar. Na figura 1, apresentamos a sugestão de Júlio para dar seguimento ao episódio da conjetura da Rita.

Júlio evidencia que compreendeu a presença, na situação descrita no episódio, de duas implicações, uma recíproca da outra; além disso, manifesta a importância que dá à identificação e distinção de implicações contrárias e ao papel dos exemplos e contraexemplos na prova e refutação de afirmações.

Pedro, na abordagem à mesma questão, sugere que «a professora deveria fazê-los [aos alunos] notar o significado da implicação na matemática», alertando-os para o facto de que a veracidade de uma implicação não implica necessariamente a veracidade da implicação contrária (Figura 2). Os dois mestrandos revelam sensibilidade para uma questão importante do processo de ensino-aprendizagem da matemática — o desenvolvimento do raciocínio matemático, em particular a formulação, teste e prova ou refutação de conjeturas.

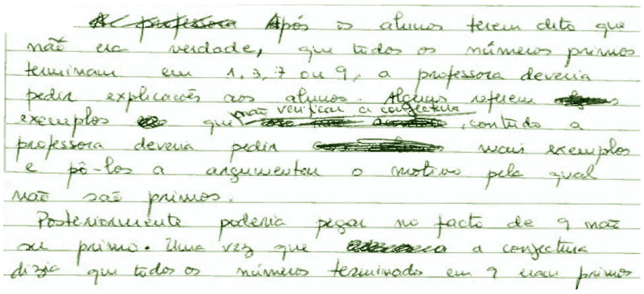
Em relação à segunda questão — saber se a conjetura da Rita fora ou não provada e porquê, Júlio não tem dúvidas nem quanto à veracidade da conjetura da Rita nem quanto ao facto de ela ter sido provada durante a discussão que a professora conduziu. Na sua argumentação, Júlio ressalta a importância de a professora usar os conhecimentos dos alunos para os ajudar na prova da conjetura da Rita (Figura 3).

Pedro responde de forma semelhante a esta questão, explicando todos os passos da prova da conjetura e salientando que «a turma construiu esta prova», o que sugere que compreendeu o modo como a professora conduziu o discurso, não condicionando as respostas dos alunos mas orientando-os apenas nos seus raciocínios.

As respostas de Júlio e Pedro às duas questões apresentadas para a análise do episódio evidenciam: (i) o reconhecimento da situação matemática subjacente ao episódio — em particular, a existência de duas implicações contrárias e de como podem/devem ser provadas/refutadas, — e (ii) opções didáticas que vão ao encontro das recomendações atuais para o ensino da matemática (ME, 2007; NCTM, 2000) — em particular, a relevância das discussões matemáticas entre os alunos como meio para a institucionalização de novo conhecimento (Stein, Engle, Smith e Hughes, 2008). Com as devidas reservas, e em face das respostas de Júlio e Pedro, podemos dizer que ambos revelam um adequado conhecimento matemático e instrucional (Ponte, 1999) na análise do episódio da conjetura da Rita.

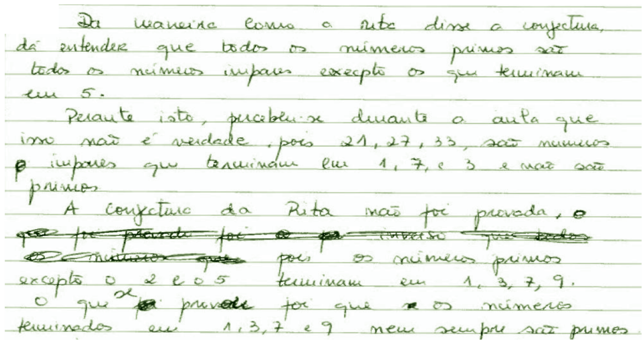
Carlos é colega de Júlio e de Pedro, com um percurso académico semelhante. A sua análise do episódio revela bastantes insuficiências, que podem decorrer de uma má interpretação do episódio em si ou ter origem num deficiente conhecimento didático (ao nível das duas dimensões que consideramos neste texto). Na sua resposta à questão (1), Carlos não parece compreender que, no final do episódio, a implicação que estava em discussão era a recíproca da conjetura da Rita (Figura 4). A sugestão dada à professora para pedir explicações aos alunos baseia-se na necessidade que Carlos sente de serem trabalhados mais exemplos de modo a que os alunos expliquem por que razão os números nesses exemplos não são primos — Carlos parece deter-se na importância de os alunos saberem justificar por que um número é ou não primo em vez de se deter na compreensão de conjeturas e implicações recíprocas (evidentemente, a um nível adequado a alunos do 7.º ano de escolaridade) e nos papéis dos exemplos e contraexemplos na prova ou refutação de conjeturas.

Não fica de todo clara a razão por que Carlos sugere à professora para tratar o caso do número 9 — parece que se refere ao momento final do episódio, ao contrário do que escreve imediatamente antes. Carlos não realça a importância de a professora



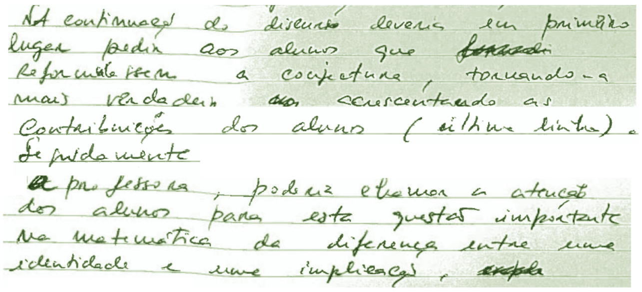
~~A professora~~ Após os alunos terem dito que não era verdade, que todos os números primos terminam em 1, 3, 7 ou 9, a professora deveria pedir explicações aos alunos. Alguns referem exemplos que não verificam a conjectura, contudo a professora deveria pedir mais exemplos e pô-los a argumentar o motivo pelo qual não são primos.
Posteriormente poderia pegar no facto de 9 não ser primo. Uma vez que a conjectura dizia que todos os números terminados em 9 eram primos

Figura 4. Resposta de Carlos à questão (1)



Da maneira como a Rita disse a conjectura, dá entender que todos os números primos são todos os números ímpares excepto os que terminam em 5.
Perante isto, percebeu-se durante a aula que isso não é verdade, pois 21, 27, 33, são números ímpares que terminam em 1, 7, e 3 e não são primos.
A conjectura da Rita não foi provada, ~~o que foi provado foi a recíproca que todos os números~~ pois os números primos excepto o 2 e o 5 terminam em 1, 3, 7, 9.
O que se provou foi que os números terminados em 1, 3, 7 e 9 nem sempre são primos.

Figura 5. Resposta de Carlos à questão (2)



Na continuação do discurso deveria em primeiro lugar pedir aos alunos que Reformulassem a conjectura, tornando-a mais verdadeira acrescentando as Contribuições dos alunos (última linha).
Seguidamente
a professora, poderia chamar a atenção dos alunos para esta questão importante na matemática da diferença entre uma identidade e uma implicação,

Figura 6. Resposta de Fernando à questão (1)

sintetizar as ideias que esteve a trabalhar com os alunos, de forma informal mas com rigor matemático.

Carlos considera duas possíveis interpretações da conjetura da Rita. Por um lado, refere que o que a Rita disse pode ser entendido como: «todos os números primos são todos os que terminam em 1, 3, 7 e 9, excepto o 2 e 5»; por outro lado, a afirmação da Rita pode ser lida, segundo Carlos, como: «os números primos excepto o 2 e 5 terminam em 1, 3, 7 ou 9». De facto, é isto que a Rita afirma, pelo que a primeira interpretação de Carlos não tem sustentação no episódio; porém, é precisamente nessa primeira interpretação que Carlos se detém e é essa que ele considera ter sido discutida durante a aula, acrescentando que «na aula só se provou que a primeira interpretação não é válida». Na figura 5 encontra-se a resposta de Carlos à segunda questão que lhe foi colocada, mostrando que não considera que a conjetura da Rita tenha sido provada.

Como vimos atrás, Carlos não interpreta corretamente a conjetura da Rita. Além disso, não entende que os exemplos dados pelos alunos dos números 21, 27 e 33 são exemplos que destroem não a conjetura da Rita mas sim a sua recíproca, isto é, são contraexemplos para a recíproca da conjetura da Rita. Por fim, apesar de permanecer a dúvida sobre se Carlos compreendeu ou não a conjetura da Rita, a sua resposta à questão sobre a validade desta conjetura sugere que não reconheceu no trabalho conjunto da professora e dos alunos um processo de prova daquela conjetura. Carlos parece apenas valorizar a prova da falsidade da conjetura recíproca da Rita através de exemplos que a contradizem.

Ao contrário dos seus colegas, Carlos evidencia dificuldades no seu conhecimento didático, tanto ao nível do conhecimento matemático como do instrucional (Ponte, 1999). Na sua análise do episódio, Carlos não mostra dar importância às discussões matemáticas nem à síntese das ideias centrais discutidas durante a aula, aspetos muito valorizados nas orientações atuais para o ensino da Matemática (ME, 2007; NCTM, 2000; Stein e outros, 2008). Além disso, a sua imperfeita compreensão da situação descrita no episódio do ponto de vista matemático pode ter-se constituído num obstáculo a tomadas de posição, relacionadas com a dimensão do conhecimento instrucional, adequadas para dar seguimento ao episódio relatado. De facto, como iremos ver a seguir, a um conhecimento matemático pouco consistente está normalmente associado um conhecimento instrucional enfraquecido.

Embora tenha já alguma experiência de ensino como professor contratado, Fernando não possui profissionalização pelo que é colega de Júlio, Pedro e Carlos no Mestrado em Ensino da Matemática. Ao sugerir como a professora da Rita deveria dar continuidade ao discurso após as últimas intervenções dos alunos no episódio fornecido, Fernando evidencia várias fragilidades em termos do seu conhecimento matemático. Começa por sugerir que a conjetura da Rita não era *completamente* verdadeira porque lhe faltavam as últimas contribuições dos alunos, o que parece indicar que nem compreendeu propriamente qual havia sido a conjetura da Rita; além disso, não utiliza terminologia correta quando tenta diferenciar *equivalência* de *implicação* (Figura 6).

No entanto, Fernando parece compreender que, de facto, existe uma diferença entre estas duas noções, uma vez que acon-

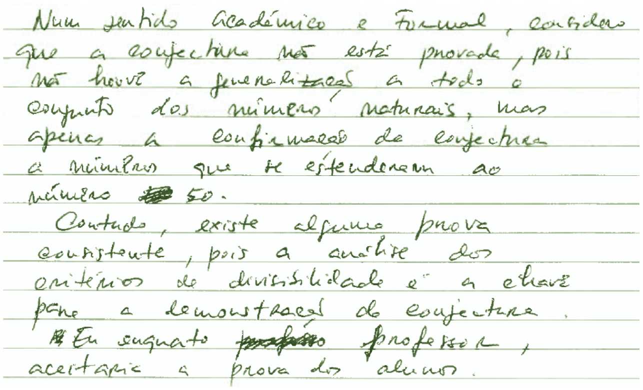

Num sentido Académico e Formal, considero que a conjectura não está provada, pois não houve a generalização a todo o conjunto dos números naturais, mas apenas a confirmação da conjectura a números que se estenderam ao número ~~[illegible]~~ 50.
Contudo, existe alguma prova consistente, pois a análise dos critérios de divisibilidade é a chave para a demonstração da conjectura.
Eu enquanto ~~profess~~ professor, aceitaria a prova dos alunos.

Figura 7. Resposta de Fernando à questão (2)

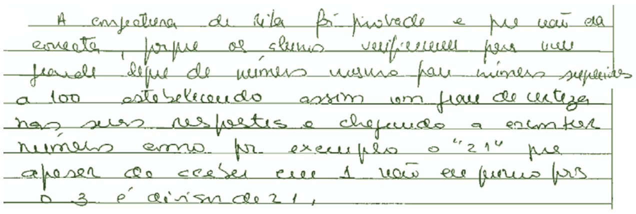

A conjectura da Rita foi provada e que não é correcta, porque os alunos verificaram para uma grande lista de números menores para números superiores a 100 estabelecendo assim um grau de certeza nas suas respostas e chegando a encontrar números como por exemplo o "21" que apesar de acabar em 1 não é primo pois o 3 é divisor de 21,

Figura 8. Resposta de Joana à questão (2)

selha a professora a «pedir aos alunos que explorassem outras relações de implicação que não são identidades (no sentido de implicação biunívoca)». A terminologia usada, contudo, continua a evidenciar bastantes imprecisões.

A resposta de Fernando à questão (2) sugere que ele não compreendeu o processo de demonstração, usado pelo coletivo da turma (professora e alunos), da conjetura da Rita (Figura 7). Fernando não considera que a prova realizada pelos alunos e professora, em conjunto, seja uma *verdadeira* prova porque não compreendeu o processo de generalização subjacente, apesar de mostrar ter percebido o papel determinante, na prova realizada, dos critérios de divisibilidade.

Fernando parece ter dois critérios para decidir se a conjetura da Rita está ou não provada. Enquanto aceitaria o que os alunos e a professora fizeram como prova dessa conjetura, argumenta que, em termos formais, não se trata de uma prova por não ter existido generalização. Mais uma vez, o conhecimento matemático de Fernando mostra fragilidades que não têm a ver com a adequabilidade de um argumento matemático ao nível etário dos alunos mas sim com a compreensão de um processo de demonstração.

Uma outra colega de Fernando (e dos outros três alunos), Joana, também ela com alguma experiência letiva (embora menor) e à procura da profissionalização no mestrado que frequenta, evidencia ainda maior confusão na compreensão do que é uma conjetura e do que significa provar uma conjetura (Figura 8). Joana afirma que a conjetura da Rita foi provada apesar de não ser correta! Refere que os alunos apenas testaram alguns casos (o que, apesar de tudo, contribuiu para terem maior certeza do que afirmavam) mas rapidamente confunde as duas implicações em jogo no episódio analisado, misturando a conjetura da Rita com a sua recíproca. A resposta de Joana à questão (2) não deixa dúvidas acerca das suas fragilidades na compreensão de questões de lógica matemática, incluindo o significado de conjetura e de prova.

Não tendo compreendido qual era a conjetura da Rita nem a sua recíproca, não é de estranhar que Joana tenha proposto algumas sugestões para prosseguimento do episódio com pouco sentido. Joana não compreendeu a intenção da professora ao escrever no quadro as duas implicações em causa – a conjetura da Rita e a sua recíproca — interpretando esta ação da professora como fornecendo aos alunos uma pista para o que estaria certo ou errado (Figura 9).

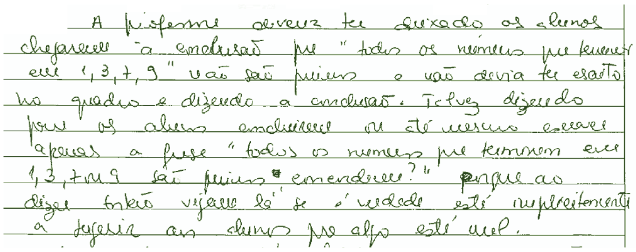
Tanto Joana como Fernando evidenciam dificuldades no seu conhecimento matemático, talvez ainda mais do que Carlos. Aqueles dois alunos do 1.º ano do Mestrado em Ensino da Matemática, futuros professores, têm um percurso académico diferente dos de Júlio, Pedro e Carlos. Joana e Fernando concluíram as suas licenciaturas há mais tempo que os seus três colegas e as suas licenciaturas não são em Matemática, embora tenham uma forte componente matemática. Poder-se-ia sugerir que esta formação-base distinta da dos colegas pode explicar as diferenças no conhecimento matemático que se tornam evidentes quando os alunos analisam o episódio da conjetura da Rita. No entanto, Carlos, cujo percurso é semelhante ao de Júlio e de Pedro (inclusivamente ao nível da média final de licenciatura, que foi relativamente elevada para os três alunos), também revela fragilidades no seu conhecimento matemático.

A finalizar

Com os exemplos apresentados percebe-se que, de facto, quando não se compreende matematicamente uma situação, dificilmente se pode tomar decisões adequadas à condução do processo de ensino-aprendizagem. Sublinhe-se em particular, a orquestração de discussões matemáticas produtivas e a síntese de conhecimentos, aspetos muito complexos mas essenciais do papel do professor de Matemática no atual quadro curricular português. De notar que a análise de um episódio de sala de aula transcrito permite a leitura repetida do mesmo, procurando informação, beneficiando de tempo para a compreensão da situação relatada. Tais condições não se verificam em plena sala de aula, em que os professores têm de analisar a situação e reagir adequadamente de forma quase imediata.

A diversidade de interpretações que surgiram da leitura deste episódio mostra o seu potencial para animar uma discussão entre professores e futuros professores em torno da noção de prova. Este tipo de atividade prepara o futuro professor para encarar com mais confiança as discussões em sala de aula em torno de conjeturas, provas, exemplos e contraexemplos.

Questionámo-nos sobre aquilo que a formação pode estar a dar aos futuros professores, desde logo na construção de conce-



A professora deveria ter deixado os alunos chegarem à conclusão que "todos os números que terminam em 1, 3, 7, 9" não são primos e não devia ter escrito no quadro e dizendo a conclusão. Talvez dizendo para os alunos concluírem ou até mesmo escrever apenas a frase "todos os números que terminam em 1, 3, 7 ou 9 são primos* entenderam?" porque ao dizer então vejam lá se a verdade está implicitamente a sugerir aos alunos que algo está mal.

Figura 9. Resposta de Joana à questão (1)

ções sobre a prova. Pedimos também a alguns professores com formação diversificada que respondessem às mesmas questões para termos uma melhor perceção sobre onde poderia residir o problema. Aparentemente, as ambiguidades mantêm-se. Por exemplo, uma professora refere que «parece que a conjetura da Rita está provada porque foram usados argumentos válidos que permitem concluir que a afirmação é válida para todos os números primos excepto o 2 e o 5»; no entanto, mais tarde, parecendo levantar dúvidas sobre a validade da prova, esta mesma professora acrescenta: «a prova em matemática carece de demonstração». Que quererá dizer com isto? Usar-se elementos válidos que permitem concluir a validade de uma afirmação não é exatamente o que uma prova é? Demonstrar não será precisamente convencer o interlocutor com um encadeamento lógico de argumentos válidos?

Por outro lado, os professores ao tentarem responder, em contexto de sala de aula, a diferentes solicitações e preocupações, acabam por entrar frequentemente em contradição. Por vezes, fazem eles próprios aquilo que dizem aos seus alunos que não se faz. Por exemplo, uma outra professora, depois de constatar que a conjetura estava provada, refere que «faltou fazer uma síntese de forma a que todos entendessem, apesar da aluna ter dito ‹Já temos a certeza›, devia mostrar que havia números primos com as terminações 1, 3, 7 e 9». Esta preocupação de ilustração do resultado, se é didaticamente compreensível, pode induzir os alunos numa conceção errada de prova, nomeadamente, a confundir prova com exemplificação por casos particulares.

Do nosso ponto de vista, a discussão de situações concretas, a partir de episódios de sala de aula, pode contribuir para uma maior consciencialização dos professores e dos futuros professores acerca das suas conceções, ajudando-os a não perder *teachable moments*, aproveitar as oportunidades que surjam e tornando as discussões matemáticas produtivas e cognitivamente mais ricas.

Referências

Bishop, A. J., e Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. Em B. Christiansen, A. G. Howson e M. Otte (Eds.) *Perspectives on mathematics education* (pp. 309–365). Dordrecht: Reidel.

Boavida, A. M. (2001). Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática. *Educação e Matemática*, 63, 11–15.

Brendefur, J., e Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two prospective teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 125–153.

ME (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: DGIDC.

NCTM (2000) *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. P. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. Em J. Tavares, A. Pereira, A. Pedro e H. Sá (Eds.), *Investigar e formar em educação — Actas do XI EIEM* (pp. 59–72). Porto, Portugal: SPCE.

Ponte, J. P. (no prelo). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. Em N. Planas (Ed.), *Educación matemática: Teoría, critica y prática*. Barcelona: Graó.

Ponte, J. P., e Santos, L. (1998). Práticas lectivas num contexto de reforma curricular. *Quadrante*, *7*(1), 3–33.

Ponte, J. P., e Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação*, *11*(2), 145–163.

Ponte, J., Guerreiro, A., Cunha, H., Duarte, J., Martinho, H., Martins, C., Menezes, L., Menino H., Pinto, H., Santos, L., Varandas, J., Veia, L., e Viseu, F. (2007). A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática. *Revista Portuguesa de Educação*, *20*(2), 39–74.

Prince, A. (1998). Prove it! *Mathematics Teacher*, *91*(8), 726–728.

Ruthven, K., Hofmann, R., e Mercer, N. (2011). A dialogic approach to plenary problem synthesis. Em B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 81–88. Ankara, Turkey: PME.

Schön, D. (1987). *Educating the reflective practitioner: Toward a new design for teaching and learning in the professions*. S. Francisco, CA: Jossey-Bass.

Stein, M. K., e Smith. M. (1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research To Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268–275.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., e Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340.

Rosa Antónia Tomás Ferreira

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e CMUP

Maria Helena Martinho

Universidade do Minho e CIEd

Luís Menezes

Escola Superior de Educação de Viseu e CI&DETS