Uma tarefa com espelhos

Rosa Antónia Tomás Ferreira

Durante a segunda metade do 1.º período do ano lectivo de 2010/2011 tive a oportunidade de assistir às aulas de 9.º ano da professora Cristina Cruchinho, na recta final do processo de experimentação do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (NPMEB — ME, 2007). As minhas visitas à Escola Secundária Filipa de Vilhena, no Porto, decorreram no âmbito da recolha de dados para um estudo de avaliação do processo de experimentação do NPMEB, coordenado pelo Prof. Dr. Domingos Fernandes (Fernandes, Borralho, Vale, Gaspar & Dias, 2011). Foram várias as aulas observadas mas neste texto concentro as atenções numa aula destinada à introdução do conceito de proporcionalidade inversa.

A meio de Novembro de 2010, Cristina iniciou o estudo da proporcionalidade inversa como função, no âmbito do tema Álgebra do NPMEB. Neste texto detenho-me na actividade desenvolvida numa das suas turmas, numa aula que começou às 10:00h e que não contou com o apoio da respectiva professora assessora.

A aula inicia-se, como habitualmente, com a escrita do sumário da aula anterior. Um aluno dirige-se ao quadro e escreve uma proposta para o sumário dessa aula. O aluno sabe que é a sua vez de realizar esta actividade pois a professora estabelecera a norma da ordem alfabética. A escrita do sumário é feita numa lógica de acção e não de resumo. De facto, em vez de propor *Regra de Laplace* (a temática da aula anterior), o aluno propõe *Resolvemos e discutimos a tarefa 5 — Regra de Laplace*. Assim, na escrita do sumário, não só se relembra o tópico de cada tarefa realizada como se indica explicitamente o que foi efectivamente feito em torno de cada tarefa. A turma é sempre responsável por validar a proposta escrita no quadro, fazendo críticas ou oferecendo sugestões para completar o que pudesse estar em falta. Nesta aula, chega-se à conclusão que se deveria acrescentar ao sumário «e discutimos as respostas às questões 1 a 3».

Após a escrita negociada do sumário da aula anterior, Cristina anuncia que vai entrar num novo tópico — Funções — perguntando aos alunos «Que vimos de funções no ano passado?» Não tarda muito que alguém se lembre de termos relacionados com funções, sobretudo *função linear* e *função afim*. Cristina confirma e, enquanto regista no quadro esta mesma informação, acrescenta que os alunos trabalharam estas temáticas no ano passado com as tarefas 3 e 4, relativas a funções e equações. «Alguém me sabe dizer qual é a expressão genérica de uma função linear?» pergunta a professora. Um aluno responde «$y = kx$» e Cristina regista no quadro. «Que é então uma função afim?» Alguns alunos dizem que falta um b na expressão que já está escrita no quadro e a professora regista «$y = kx + b$». Cristina lembra aos alunos que as tarefas trabalhadas no ano anterior sobre funções estão disponíveis no *moodle*, e também nos cadernos dos alunos, pelo que todos têm acesso a elas. Pede-lhes ainda para estudarem as tarefas referidas com cuidado, revendo as noções trabalhadas, uma vez que se lhes vai dar seguimento. E para que esta recomendação não caia em saco roto, Cristina marca logo parte do trabalho de casa para a próxima aula: uma das propostas é precisamente estudar as tarefas realizadas no 8.º ano sobre funções e equações.

Figura 1. Alunos efectuando medições usando o material fornecido pela professora

Sem mais demora, Cristina distribui a *tarefa dos espelhos* (ver *Materiais para a Aula de Matemática*) aos alunos que, como habitualmente, ficam logo em silêncio a ler o enunciado. Esta tarefa tem como objectivo introduzir os alunos ao estudo da proporcionalidade inversa como função e parte de uma situação da vida real. É suposto que os alunos conheçam a noção de função, representem graficamente funções simples e pontos num referencial cartesiano e lidem com expressões algébricas. A tarefa promove a análise de situações de proporcionalidade inversa como funções do tipo $y = k/x$, com $k \neq 0$ e estimula os alunos a relacionar representações algébricas e gráficas de funções que modelam situações de proporcionalidade inversa; em termos de capacidades transversais, as que são mais visadas com a *tarefa dos espelhos* são as de raciocínio e comunicação matemáticas (DGIDC, 2011).

A professora forma rapidamente os grupos, juntando mesas contíguas. Os alunos rapidamente percebem que vão precisar de material não habitual nas aulas de Matemática: espelhos, auto-colantes e fitas métricas. Cristina avisa os alunos dos dois grupos sentados junto às janelas que ficarão na sala de aula a resolver a tarefa. Os grupos da fila a meio da sala irão para a zona de lazer do piso em que estão (piso 1) e os outros dois grupos vão para a zona de lazer do piso acima ou do piso abaixo (a que preferirem). «Cuidado para não fazerem barulho se entrarem pelo corredor», lembra a professora.

Cristina sugere aos alunos que vão trabalhar fora da sala de aula que levem algum material com eles e «talvez a calculadora pois podem precisar dela». Esta sugestão não é inocente. No dia anterior, Cristina tinha trabalhado esta mesma tarefa com os alunos de outra turma e vários fizeram os seus registos de forma pouco organizada, o que levou a alguns atrasos na percepção das regularidades das medições obtidas. Os alunos estão algo agitados enquanto recolhem o material que a professora lhes distribui. Os grupos têm ordem para regressar à sala de aula às 11:05 horas. Fico um pouco na sala de aula a conversar com a professora mas decido sair para documentar como os alunos se estavam a envolver na tarefa.

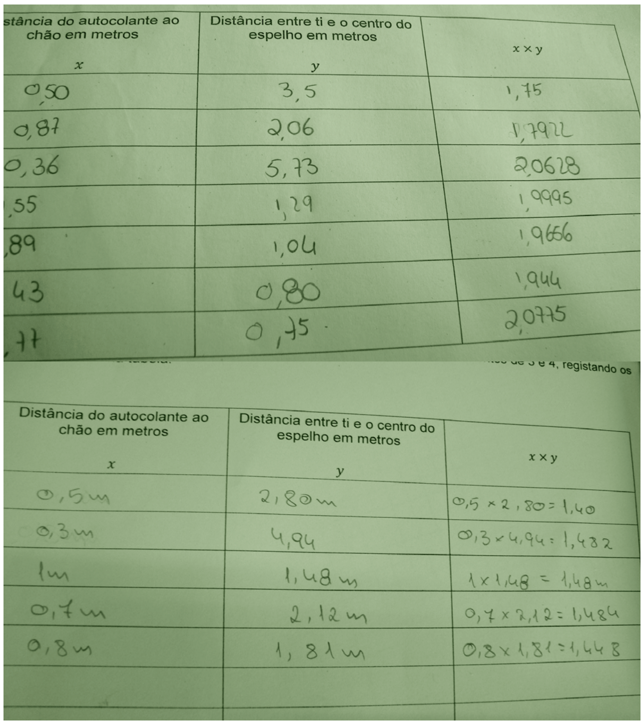
Os dois grupos que optam pela zona de lazer do piso 1 estão entusiasmados e a trabalhar a bom ritmo. Os que estão no piso 0 ainda trabalham melhor, mais organizados e mais rápidos. Quando chego ao grupo que está no piso 2, encontro os alunos já sentados numa mesa redonda a preencher as tabelas do enunciado da tarefa, com recurso à calculadora. Desafio-os a justificar uma certa discrepância em dois valores encontrados e que se deve, certamente, a imprecisões de medição.

Os alunos que se mantêm na sala de aula mostram mais dificuldades em se organizarem do que os seus colegas que estão a trabalhar nas zonas de lazer. Demoram algum tempo até perceber que deve ser sempre a mesma pessoa a realizar a experiência de visualização do auto-colante no espelho porque a altura do observador acrescenta uma variável à situação. Além disso, as medições que fazem são muito pouco precisas, o que dificulta a retirada de conclusões. Os restantes colegas, em geral, realizam as suas experiências de forma mais sistemática e cuidada. A calculadora facilitou os cálculos, permitindo que os alunos se concentrassem no que era importante — reconhecer as regularidades da situação.

Os alunos regressam à sala de aula mais ou menos à hora marcada. Cristina, tendo monitorizado o trabalho de todos grupos, inicia a fase de discussão dos resultados obtidos. Um aluno diz que «se multiplicarmos as duas grandezas obtemos 1,7, aproximadamente» e um colega de grupo completa: «nós temos dois valores diferentes porque medimos as coisas em sítios diferentes do espelho». A professora sabe que vários grupos efectuaram medições com pouco rigor e chama a atenção dos alunos para esse facto e para as suas consequências.

Em geral, os alunos parecem compreender a importância de efectuar medições rigorosas, considerando o mesmo ponto de leitura no espelho das imagens do auto-colante e reconhecendo a necessidade de ser sempre a mesma pessoa a fazer a

Figura 2. Alunos respondendo às questões da tarefa, realizando os seus registos com base nas medições efectuadas



stância do autocolante ao chão em metros x	Distância entre ti e o centro do espelho em metros y	$x \times y$
0,50	3,5	1,75
0,87	2,06	1,7922
0,36	5,73	2,0628
,55	1,29	1,9995
,89	1,04	1,9656
43	0,80	1,944
,77	0,75	2,0775

de 3 e 4, registando os

Distância do autocolante ao chão em metros x	Distância entre ti e o centro do espelho em metros y	$x \times y$
0,5 m	2,80 m	0,5 × 2,80 = 1,40
0,3 m	4,94	0,3 × 4,94 = 1,482
1 m	1,48 m	1 × 1,48 = 1,48 m
0,7 m	2,12 m	0,7 × 2,12 = 1,484
0,8 m	1,81 m	0,8 × 1,81 = 1,448

Figura 3. Alguns registos dos alunos no enunciado da tarefa

visualização dessas imagens. Estes dois aspectos são igualmente determinantes na compreensão das razões da obtenção, por cada grupo, de valores diferentes para o produto das grandezas em causa e Cristina tenta que os alunos se apercebam disso. Na verdade, vários alunos olham para os seus registos e parecem estar a revê-los, provavelmente por terem, de facto, encontrado valores demasiado díspares para o que seria de esperar.

Cristina dirige-se à turma: «Se o auto-colante descer, portanto, se a altura ao chão for metade do que era antes, a distância do observador…» esperando que os alunos completem a sua frase. Alguns fazem-no dizendo que é o dobro, mas outros não prestam atenção — vários continuam a tentar dar sentido aos valores encontrados nas medições. Noto que a professora está com alguma pressa: o tempo está a passar e é preciso apressar o ritmo para concluir esta actividade. De facto, Cristina *salta* a questão 2.3 para a questão 3 da tarefa. Projecta numa tela um referencial cartesiano já construído no GeoGebra. Uma das alunas vai ao computador marcar os pontos no referencial mas já não se lembra de como o fazer! Na realidade, no 7.º ano, estes alunos eram muito proficientes no uso do GeoGebra (e eu testemunhei isso em primeira mão — Pires & Ferreira, 2009). No entanto, durante o 8.º ano não tinham tido hipóteses de trabalhar com o *software*: a escola entrou em obras, as aulas eram em monoblocos e os computadores estavam arrumados e praticamente inacessíveis. Enquanto a aluna se continua a debater com dificuldades na marcação de pontos (contando com a ajuda de dois ou três alunos da frente), há bastantes alunos distraídos, não se preocupando em responder à terceira questão da tarefa.

Cristina repara que ultrapassou, sem intenção, a questão 2.3 e chama a atenção da turma para esta questão, que não quer deixar de discutir: «Qual é a relação entre x e y? Qual é a expressão algébrica?» Alguns alunos respondem que é «$x \times y = 1{,}7$». Uma aluna comenta e diz: «y tem de vir em função de x». Cristina escreve no quadro o que a aluna sugere:

$$y = \frac{\text{o produto de } x \text{ por } y}{x}$$

Os alunos estão muito mais barulhentos do que o habitual, embora, na minha opinião, o nível de ruído seja ainda bastante tolerável. A distracção é provavelmente o factor que mais contribui para o barulho. A professora está visivelmente insatisfeita com isto e começa a falar em voz muito baixinha. Rapidamente consegue o silêncio do costume. «E qual é o valor aqui do produto de x por y?» Alguns alunos referem 1,4 e outros 1,7. Outros ainda sugerem calcular a média. Cristina vai redizendo as sugestões apresentadas pelos alunos e pedindo justificações e explicações: «Por que há números diferentes?» Alguns alunos não têm dúvidas: «Porque há erros». A professora procura clarificar estas respostas: «Porque há erros nas medições, ok? Usamos a média para encontrar um valor mais aproximado». No meio desta discussão, volta-se à expressão que estava escrita no quadro e a professora escreve

$$y = \frac{x \times y}{x} \quad \text{logo seguido de} \quad y = \frac{1{,}5}{x}.$$

Cristina chama novamente a atenção dos alunos para que os valores dos produtos possam ser diferentes de grupo para grupo.

Entretanto, a aluna termina a marcação de pontos no referencial cartesiano e vai para o seu lugar. A professora avisa a

Figura 4. Momento de discussão colectiva sobre a tarefa dos espelhos

turma que tem 2 minutos para marcar os pontos num referencial e reforça que são os pontos encontrados por cada grupo: «Quero isto tudo construído ou passam aqui o intervalo. Como já devem ter percebido eu não vou voltar a isto na próxima aula, era o que mais faltava! Temos ainda que tirar conclusões e só faltam 4 minutos. Se não têm réguas, não as vão buscar. Vamos lá, sem conversa; 2 eixos, marcar pontos».

A certa altura, a professora pára de circular pelas mesas dos alunos e pede-lhes para terminarem a marcação dos pontos nos referenciais em casa — a síntese tem de ser feita e o tempo está a esgotar-se! «Quero que vejam uma coisa: qual é a expressão algébrica que vou colocar no GeoGebra para ver se bate certo ou não?» Um aluno sugere «$x \times y = 1,6$». A professora continua a questionar a turma: «Que número coloco aqui?» apontando para a janela do GeoGebra onde deve colocar a expressão algébrica que representa a situação. Finalmente um aluno diz que depende de grupo para grupo e a professora reage: «Exactamente! Então aqui que número coloco?» Acordam que será o 1,6 e a professora continua: «Muito bem. Que é que se passa aqui? Acabou de surgir o gráfico».

Um aluno tinha observado que havia um ponto que não estava bem. A professora questiona a turma: «Quem é que me diz qual foi o ponto mal medido?» Os alunos, na generalidade, não têm dificuldades em perceber qual o ponto que sai fora do gráfico nem por que tal acontece. «E como é que chamamos a isto, quando uma grandeza vai para o dobro e a outra vai para metade? Quando uma vai para um terço, a outra triplica? Que chamamos a isto? São grandezas inversamente…» Cristina está desesperada com a falta de tempo. Já tocou e os alunos estão a ficar agitados. A pista acaba por ser dada pela professora e um aluno completa rapidamente a frase dela com a palavra correcta. Cristina regista no quadro:

$x \times y =$ número constante
x e y são grandezas inversamente proporcionais

No quadro branco e por cima da imagem projectada com o gráfico dos pontos, a professora desenha a vermelho o gráfico da função. Diz aos alunos que é preciso dar-lhe um nome e o nome que este tipo de curvas tem é de *hipérbole*. A hora já lá vai e a atenção dos alunos também, embora muitas conversas sejam ainda sobre assuntos da aula. Os alunos saem da sala mas um deles pergunta à professora se pode fazer o gráfico no GeoGebra e colocar na plataforma. Cristina diz que é uma boa ideia e pede-lhe que use o fórum para que todos os colegas tenham acesso ao gráfico que ele desenhar e enviar.

Em jeito de reflexão

A *tarefa dos espelhos* suscitou grande curiosidade nos alunos, que não sabiam muito bem o que iriam fazer. Após a interpretação da tarefa, feita pelos alunos e em silêncio, a professora dividiu os alunos em grupos, orientando-os e apoiando-os nas suas explorações, sem, contudo, lhes dar pistas. A discussão de resultados decorreu com alguma precipitação porque o tempo escasseava. Por esse motivo, houve também uma maior orientação, por parte da professora, do pensamento dos alunos na fase de síntese do trabalho realizado, em particular procurando dar significado aos valores encontrados nas experiências realizadas. Os alunos deram contribuições bastante significativas para a discussão e a síntese, apesar da velocidade algo excessiva desta fase da aula. Houve perguntas ou comentários pertinentes dos alunos e que a professora aproveitou para instituir conceitos e estabelecer algumas conexões. A síntese da tarefa foi registada pela professora no quadro, aproveitando as contribuições dos alunos e assegurando-se que os mesmos copiavam os registos do quadro para os seus cadernos. A sensação da professora, no final desta aula, foi que, apesar de uma certa correria no final, grande parte dos alunos tinha compreendido as ideias essenciais, às quais voltaria nas tarefas seguintes.

Após ter observado um conjunto de aulas, e que abrangeram tópicos diferentes, entrevistei a professora para, entre muitos

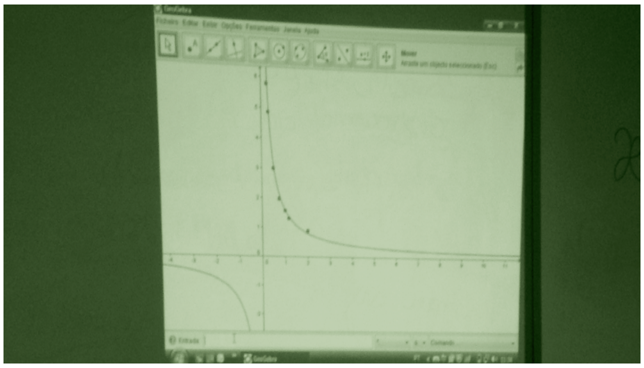


Figura 5. Função de proporcionalidade inversa obtida por um dos grupos.

outros aspectos, discutirmos algumas ideias-chave relativas à dinâmica de sala de aula. Para Cristina, e tendo em conta o percurso destes alunos no processo de experimentação do NPMEB, as tarefas de carácter exploratório são as que mais os envolvem: «Eles gostam, eles envolvem-se muito mais… Talvez porque dá mais discussão entre eles. (…) As outras, eles também fazem mas não há (…) naquilo que eu entendo por envolvimento, é, necessariamente, eh (…) Meter a mão na massa. Eles ali discutem, discutem, discutem. Sei lá, estou-me a lembrar – não sei porquê – da tarefa dos espelhos, portanto, daquela que envolvia proporcionalidade inversa. Pronto! Eles mediram muito bem, preencheram muito bem, ‹Ai que giro: dá sempre igual nesta coluna!› Está a andar. (…) Lá está, eles discutiram e lá chegaram à conclusão que devia ser sempre o mesmo (…); quer dizer, no meio, no meio daqueles todos houve um ou dois, um, um grupo sempre em cada turma que acho que os resultados não foram lá muito bons, não é?»

Cristina tem consciência de que orientar a fase de discussão e síntese do trabalho dos alunos em tarefas exploratórias, como a tarefa dos espelhos, sobretudo com vista à institucionalização de conhecimento novo, é um enorme desafio: «A discussão é um desafio que eu acho que nunca sai bem. Eu acho que nunca sai bem. Acho que tenho sempre defeitos a pôr à discussão [sorrindo]. Ou porque não ouvi aquele, ou porque não dei espaço para aquele falar, não é? Eu tenho sempre coisas a apontar na fase de discussão. (…) A discussão nunca fica perfeita. (…) Eu acho que a síntese sai depois daquelas, depois da discussão é só escolher os momentos em que, quer dizer, é escolher frases e citações. (…) É registar exactamente o que foi dito, aquilo e aqueloutro e a síntese fica feita. (…) Para mim [a discussão] é a fase mais complicada.» Notei sempre uma maior influência da pressão do tempo na gestão da fase da discussão e síntese do que na gestão da fase do trabalho autónomo dos alunos. No entanto, nesta fase de exploração matemática das tarefas, Cristina sentia falta de tempo: «Eu gostava de, às vezes, lhes dar mais tempo, para eles trabalharem autonomamente. (…) Quem me dera ter mais tempo. Eh, provavelmente dava, as coisas far-se-iam com mais calma. Sem dúvida. Todas elas, não é?» Cristina vê o trabalho em parceria como uma mais-valia, tanto para os alunos como para ela própria: «Gostava muito de ter alguém na minha sala de aula, durante um certo espaço de tempo (…) outro colega a criticar... ajudaria mais a… (…) Quantas vezes saio de lá cheia de dúvidas.»

Com a nova realidade curricular, todas as turmas do 3.º ciclo do Ensino Básico têm mais 45 minutos semanais em Matemática do que durante o período da experimentação do NPMEB. No entanto, este tempo adicional resultou, em muitos casos, numa diminuição do tempo total dedicado à Matemática pois, com a extinção do Estudo Acompanhado, uma área curricular não disciplinar frequentemente atribuída à Matemática no âmbito do Plano da Matemática II (PM II — Santos, Pinheiro, Canavarro, Santos, Pires, Martinho, Amado, & Ferreira, 2011), o saldo é negativo. Além disso, a existência de assessorias na sala de aula de Matemática, bem como de espaços para trabalho colaborativo entre professores, parece estar a diminuir nas escolas (embora não existam ainda dados sistemáticos sobre estes aspectos, a minha sensação, como elemento da Comissão de Acompanhamento do PM II e do NPMEB, é precisamente esta). Cabe aos professores e aos órgãos de gestão das escolas e agrupamentos um papel determinante no aproveitamento dos recursos existentes, na organização de espaços para trabalho em conjunto e numa gestão curricular que dê resposta às exigências e desafios do NPMEB.

Nota: Agradeço à professora Cristina Cruchinho a validação e os comentários feitos a uma versão anterior deste texto.

Referências bibliográficas:

DGIDC (2011). *Funções: Proposta de sequência de tarefas para o 9.º ano — 3.º ciclo*. Lisboa, ME-DGIDC.

Fernandes, D., Borralho, A., Vale, I., Gaspar, A. & Dias, R. (2011). *Ensino, avaliação e participação dos alunos em contextos de experimentação e generalização do novo programa de Matemática do ensino básico*. Documento policopiado não publicado. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

Pires, M., & Ferreira, R. A. (2009). A experimentação do novo Programa de Matemática: Reportagem no 7.º ano, no Porto. *Educação e Matemática*, 105, 73–79.

Santos, L., Pinheiro, A., Canavarro, A., Santos, E., Pires, M., Martinho, M. H., Amado, N., & Ferreira, R. A. (2011). *Plano da Matemática II e Novo Programa de Matemática do Ensino Básico: Relatório Intercalar de Final de Ano 2010–2011*. Documento policopiado não publicado. Lisboa: ME-DGIDC.

Rosa Antónia Tomás Ferreira

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto