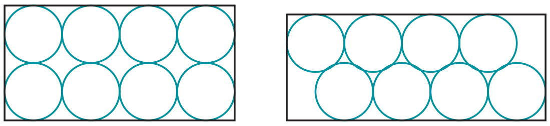
A Boda

Quando a Isabel e o José casaram resolveram alugar os serviços da Quinta Velha, que tinha uma capacidade máxima de 500 convidados. Quando foram tratar dos pormenores da boda, o gerente da Quinta informou-os: — Se pusermos os convidados em mesas de 8, sobra uma pessoa. Se os colocarmos em mesas de 9 sobram 2. Se ficarem em mesas de 10 sobram 3.
Depois de analisarem a situação, resolveram usar mesas de 12, ficando os que restavam numa mesa mais pequena.
Quantas pessoas comeram na mesa pequena?

(Respostas até 31 de Dezembro para zepaulo@armail.pt)

Circunferências em rectângulos

O problema proposto no número 112 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:



Rectângulo R **Rectângulo S**

Em cada um dos rectângulos, todas as circunferências têm um centímetro de raio.

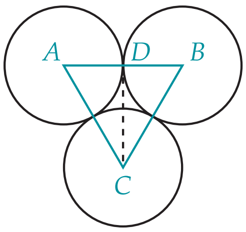
Pergunta 1 – Qual dos rectângulos tem maior área?

Pergunta 2 – Imaginemos que aumentamos o número de filas de quatro circunferências. No rectângulo R as filas continuam verticalmente alinhados, no rectângulo S a 3ª fila fica verticalmente alinhada com a 1ª, a 4ª com a 2ª e assim sucessivamente. Ao fim de quantas filas a relação entre as áreas dos rectângulos se inverte?

Pergunta 3 – Acontecerá o mesmo com os perímetros?

Recebemos 7 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Catarina Ferreira (Lamego), Edgar Martins (Queluz), Graça Braga da Cruz (Ovar), Hugo Silva (Amadora), João Pineda & Ema Modesto, Pedrosa Santos (Caldas da Rainha).

Pergunta 1



As respostas foram praticamente idênticas. O rectângulo R tem comprimento 8 e largura 4. A sua área é:
$A_R = 8 \times 4 = 32$.

No rectângulo S consideremos três circunferências que se toquem entre si e o triângulo ABC definido pelos seus centros. Temos: $\overline{AC} = 2$ e $\overline{AD} = 1$. Pelo teorema de Pitágoras vem $\overline{CD} = \sqrt{3}$. O rectângulo S tem comprimento 9 e largura $2 + \sqrt{3}$. A sua área é:

$$A_S = 9 \times (2 + \sqrt{3}) = 18 + 9\sqrt{3} \approx 33,589.$$

Resposta: O rectângulo S é o maior.

Pergunta 2

Quase todos resolveram o problema por dois processos: primeiro com uma folha de cálculo e depois analiticamente.

Seja n o número de filas em cada rectângulo. O rectângulo R tem comprimento 8 e largura $2n$. A sua área é: $A_R = 8 \times 2n = 16n$. O rectângulo S tem comprimento 9 e largura $2 + \sqrt{3}(n-1)$. A sua área é:

$$A_S = 9 \times [2 + \sqrt{3}(n-1)] = 18 + 9\sqrt{3}n - 9\sqrt{3}$$

Como diz o Hugo Silva:

Nos rectângulos do tipo R, a área do rectângulo com número filas $n+1$ é obtido a partir do rectângulo com n filas somando o factor 16. No entanto no caso dos rectângulos do tipo S, a área é obtida através do anterior somado a parcela $9\sqrt{3}$ que é aproximadamente $15,589 (< 16)$. No início, são os rectângulos do tipo S que têm a maior área, mas naturalmente existirá um momento em que a maior área já é obtida nos rectângulos do tipo R.

Esse momento pode ser encontrado facilmente com uma folha de cálculo, mas também analiticamente.

$$16n > 18 + 9\sqrt{3}n - 9\sqrt{3} \Leftrightarrow n > \frac{18 - 9\sqrt{3}}{16 - 9\sqrt{3}} \approx 5,86$$

Resposta: A partir das 6 linhas, o rectângulo R passa a ter maior área que o rectângulo S.

Pergunta 3

Os perímetros dos rectângulos são:

$$P_R = 2 \times 8 + 2 \times 2n = 16 + 4n$$
$$P_S = 2 \times 9 + 2 \times [2 + \sqrt{3}(n-1)] = 22 + 2\sqrt{3}n - 2\sqrt{3}$$

Na figura inicial, com $n = 2$, o rectângulo S tem maior perímetro porque $P_R = 24$ e $P_S \approx 25,464$.

A situação altera-se para o menor n que cumpra a condição:

$$16 + 4n > 22 + 2\sqrt{3}n - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow n > \frac{6 - 2\sqrt{3}}{4 - 2\sqrt{3}} \approx 4,73$$

Resposta: A partir das 5 linhas, o rectângulo R passa a ter maior perímetro que o rectângulo S.

Extensão

O Alberto Canelas propõe uma variante em que se altera o número m de colunas em vez do número de filas. Nesse caso teríamos:

$$A_R = 2m \times 4 = 8m \qquad A_S = (2m+1)(2+\sqrt{3})$$

Há inversão quando A_S se torna inferior a A_R.

$$A_S < A_R \Leftrightarrow (2m+1)(2+\sqrt{3}) < 8m \Leftrightarrow m > 6,96...$$

Há portanto inversão a partir de $m = 7$.