Pólya e as capacidades matemáticas

Em Abril de 1978 entrevistei George Pólya sobre as capacidades matemáticas. Encontrava-me na altura na Califórnia para participar no encontro anual do National Council of Teachers of Mathematics, na cidade de San Diego, e combinei com ele uma passagem pela sua casa em Palo Alto, depois do encontro, para conversarmos sobre isso, mas também sobre os artigos sobre o ensino da Matemática para serem incluídos nas suas obras completas que estavam a ser preparadas[1]. O artigo que se segue é o texto abreviado dessa entrevista e centra-se sobre as capacidades matemáticas.

Para mim, o aspecto mais inesperado da entrevista foi o facto de que, apesar de Pólya ter obviamente reflectido, ao longo de toda a sua vida, sobre a questão de como ele e outros fazem matemática, aparentemente, não tinha antes pensado muito sobre as capacidades a que (os matemáticos) recorrem nesse trabalho. Não obstante, a perspicácia e o charme de Pólya vêm claramente ao de cima quando, na entrevista, pacientemente se debate com as perguntas desajeitadas do seu antigo aluno*.

Jeremy Kilpatrick, Universidade da Geórgia, Athens, EUA

Jeremy Kilpatrick: Quais são as qualidades que considera que uma pessoa deve ter para ser capaz de fazer matemática? Por outras palavras, quais são as capacidades cognitivas que distinguem alguém que é capaz de fazer em matemática, de alguém que não é?

George Pólya: Não consigo fazer-lhe uma boa descrição. Nunca tive ideias claras sobre este assunto. Além disso, há tipos tão diferentes de matemáticos.

JK: A que tipos se refere?

GP: Ora bem, escrevi um pequeno artigo sobre isso onde me referi a Emmy Noether[2] e contei uma piada a esse propósito. Ela era pela generalização, eu era pela especialização.

JK: Diz-se por vezes que há [matemáticos do tipo] algebrista e [do tipo] geómetra. De que tipo é você?

GP: Nem de um, nem de outro. Isso é para um certo estádio de… Uma vez ouvi dizer que existem os *Zetiker*, os *Tetiker* e os *Epsilontiker*… São todos alemães. Os *Zetiker* estão interessados na função zeta de Riemann, os *Tetiker* nas funções elípticas zeta, e os *Epsilontiker* na convergência.

* Jeremy Kilpatrick foi aluno de George Pólya na Universidade de Stanford, na Califórnia, onde realizou um mestrado em Matemática no início dos anos 60, tendo depois sido seu assistente. George Pólya pertenceu também ao júri de doutoramento que Jeremy Kilpatrick realizou em Educação Matemática, na mesma universidade, sob a orientação de Edward Beegle (NT).

JK: E de qual desses três tipos você é?

GP: Não sei. *Tetiker* não com certeza, não sei o suficiente e interessa-me pouco.

JK: Acha que é importante ter boas capacidades espaciais para se ser matemático?

GP: Em alguma medida sim, mas varia muito. Hadamard fala disso… Conhece o livro de [Jacques] Hadamard[3]?

JK: Sim, conheço.

GP: Se ele estivesse aqui, dar-lhe-ia respostas muito melhores, ou, pelo menos, dava-lhe mais respostas. Hadamard, por vezes, diz que ou se é do tipo ‹auditivo› ou do tipo ‹visual›. Ele próprio é mais do tipo auditivo. [Mas] não sei, isso certamente que ajuda… Veja a Jean Pederson[4], ela certamente que tem capacidade espacial.

JK: E sobre a memória? Acha que os matemáticos têm uma memória especial? Para as coisas matemáticas?

GP: Com certeza que sim.

JK: E você, tem uma memória muito boa?

GP: Tenho, e para tudo. Horácio diz na Ars Poética, ‹Mendacem oportet esse memorem›[5] — o meu latim ainda dá para alguma coisa —‹Um mentiroso tem que ter uma boa memória›. Um poeta é um mentiroso, inventa tudo, tem que se lembrar muito bem do que fez antes. Por isso, uma boa memória é necessária para tudo.

JK: Uma memória organizada de forma especial? Acha que os matemáticos têm uma memória organizada de maneira diferente?

GP: Exactamente, [mas] o que é *organizada*? Eu acho que não dispomos dos termos gerais para conseguirmos descrever essa organização, ou os que temos são vagos.

JK: Estou a perceber. No entanto tentou-se… Uma questão é [saber] se os matemáticos têm certos tipos de capacidades especiais ou se têm apenas as capacidades vulgares e as aplicam em matemática.

GP: A segunda [alternativa] é provavelmente um pouco melhor. Nenhuma delas é completamente verdadeira, mas a

Uma explicação

A entrevista que Jeremy Kilpatrick realizou a George Pólya em 1978 estava inédita desde a sua realização e a sua primeira publicação foi em português numa tradução dada à luz na revista *Quadrante* (Vol. XIX n.º 2) recentemente distribuída, revista e anotada por Jeremy Kilpatrick*, a quem deixo aqui o agradecimento. É agora também publicada na *Educação e Matemática*, com a explicação que acompanhou a publicação na *Quadrante* que a seguir se trancreve.

Em Fevereiro do ano passado, tive oportunidade de visitar por três meses a Universidade da Geórgia, no *College of Education — Aderhold Hall*, para fazer algumas pesquisas e estudo sobre George Pólya, com o apoio e colaboração de Jeremy Kilpatrick que, entre outras coisas, pôs à minha disposição uma caixa de arquivo que possuía com textos e outros documentos relacionados com Pólya. Foi nessa caixa que, no primeiro dia da minha estadia, encontrámos um texto dactilografado, com a transcrição de uma entrevista a George Pólya que Kilpatrick tinha realizado em 1978. Propus-me de imediato fazer a tradução para português e publicar a entrevista «ainda inédita», como na altura Kilpatrick me disse.

Jeremy Kilpatrick é, desde 1993, *Regents Professor* de Educação Matemática na Universidade da Geórgia, Athens GA, nos Estados Unidos. Terminou o seu curso em Matemática na Universidade da Califórnia em Berkley (1960), onde realizou depois o Mestrado em Educação (1960), enquanto leccionava como professor de Matemática no ensino secundário. No início dos anos 60, foi para a Universidade de Stanford, em Palo Alto, onde frequentou cursos orientados por George Pólya e seminários sobre resolução de problemas. Nesta universidade realizou um outro Mestrado, desta vez em Matemática (1962), e depois um Doutoramento em Educação Matemática (1967), cujo júri Pólya também integrou, tendo sido nestes anos que Jeremy Kilpatrick acompanhou Pólya como seu assistente.

Em Aderhold Hall, gabinete 502, Fevereiro de 2010

A breve introdução à entrevista, que Jeremy Kilpatrick teve também a amabilidade de fazer, e onde dá conta do contexto em que foi realizada e das suas motivações, anuncia uma conversa essencialmente sobre ‹as capacidades matemáticas› e sobre os textos a incluir na edição das obras completas de George Pólya em que, no que à Educação Matemática diz respeito, Jeremy Kilpatrick chegou a colaborar. O texto da entrevista, simples e directo, em que na tradução se procurou preservar o tom informal e coloquial e os vários toques do humor por que Pólya era também conhecido, vale todavia também como testemunho pessoal e em primeira mão desse matemático, sobre alguns aspectos da sua vida e do seu conhecimento e experiência com outros matemáticos.

A entrevista foi realizada tinha George Pólya feito 90 anos havia poucos meses.

* Incluem-se algumas notas de tradução assinaladas com (NT).

Henrique Manuel Guimarães

segunda é melhor. Por exemplo, posso dizer-lhe que tenho uma memória bastante boa… para a matemática tenho, tenho uma memória bastante boa. Bem, ela agora está a ir por aí abaixo, como em tudo o resto, mas conseguia lembrar-me praticamente de tudo o que fazia, mas não do que as outras pessoas faziam. Mas também tenho boa memória para a poesia e para as anedotas, por isso, não é [uma memória] apenas para números. A minha memória para a poesia é boa mas como lembro dela, e acontece muitas vezes, é assim: vem-me à cabeça entre uma coisa e outra, por alguma razão ou sem razão nenhuma.

Pergunto-lhe se sabe alemão porque sei de cor uma coisa muito bonita que Schiller disse acerca da poesia.

JK: E lembra-se de tudo?

GP: São apenas duas linhas, descreve muito bem o que ele… Vou dizer-lhas em alemão, que é aliás um alemão muito bom. [Schiller] refere-se provavelmente à poesia, ou possivelmente [à história, pois] também foi historiador, escreveu história. Mas aplica-se bem à matemática. Vou dizê-las em alemão:

Nur Beharrung führt zum Ziel,
Nur die Fülle führt zur Klarheit,
Und im Abgrund wohnt die Wahrheit.[6]

Diz ele, «Somente…» Ah, «*Beharung*», como é que diria isto? «Quem sempre…» — bem, agora falo quatro línguas, é muito difícil escolher a certa — «*Beharung*»… se trabalhamos sempre na mesma direcção, decerto que sempre seguiremos em frente. «*Nur die Fülle*»… se sabemos muitas coisas, se o nosso conhecimento é baseado em muitas coisas, mantenhamo-las reunidas — «*führt zur Klarheit*» — e assim conseguiremos maior esclarecimento. «*Und im Abgrund wohnt*»… e a verdade está nas profundezas. Pode dizer-se o mesmo da matemática, mas Schiller com certeza que se referia à poesia ou à história e não à matemática. Mas também o podemos dizer [da matemática].

Esteve lá no Sábado[7]?

JK: Sim, em S. Diego.

GP: Para conseguirmos ficar mais esclarecidos, é essencial reunir tudo, especialmente coisas do dia a dia, coisas familiares.

JK: Mas matemáticos diferentes têm pontos fortes e pontos fracos diferentes.

GP: Pessoas diferentes têm pontos fortes e pontos fracos diferentes.

JK: Quais são os seus pontos fortes e pontos fracos como matemático?

GP: Eu digo-lhe. Conheci Weil bastante bem, Herman Weil e eu éramos bastante amigos, não muito íntimos, mas éramos bastante amigos… Mas os matemáticos raramente falam de matemática uns com os outros. Weil e eu fizemos uma aposta que foi publicada e que mostra bem a diferença entre nós[8]. Weil era muito bom na generalização, era muito inteligente, conseguia captar e compreender muito rapidamente uma ideia nova e generalizá-la. Eu sou muito mais… Eu prefiro pegar em algo tangível, começar com alguma coisa tangível, partir de coisas da física ou mesmo do dia a dia. Ora isto é muito diferente. A mesma diferença existe entre mim e Emmy Noether[9]. Mostro isso num dos artigos que você vai editar, digo aí o mesmo sobre este assunto, já o leu?

JK: Sim, já o li.

GP: Ora bem, há dois tipos de macacos. Os macacos que andam no cimo das árvores e os macacos andam cá por baixo.

JK: Portanto você é um macaco que anda cá por baixo.

GP: Sim, e ela é uma macaca das que anda lá por cima. São [macacos] diferentes, tal como também as pessoas são diferentes.

JK: Quais as partes da matemática que teve mais dificuldade em compreender?

GP: Não sei. Talvez, bem… Oh, eu gosto… Não se trata de dificuldade em compreender. Por exemplo, eu gosto dos fundamentos mas não conseguiria trabalhar nisso.

JK: Porque não?

GP: Não é a minha especialidade.

JK: Porque lida com a generalização? Porque é demasiado geral?

GP: Ora bem…

JK: É demasiado abstracto?

GP: Isso não pode ser expresso por palavras. Não é a minha especialidade, simplesmente. Admito que é importante, mas não conseguiria trabalhar com isso. Tive uma sorte muito, muito grande. [David] Hilbert era muito amigo de [Adolph] Hurwitz[10] e Hurwitz estava em Zurique. Hilbert, Hurwitz e Minkowsky eram amigos íntimos. Minkowsky morreu e Hilbert veio visitar Hurwitz em Zurique. Estava muito velho, sentia que estava a envelhecer, [e que] precisa[va] de um bom assistente. Veio a Zurique e foram-lhe propostos dois: [Paul] Bernays e eu próprio. Foi uma grande sorte terem escolhido Bernays e não a mim, porque eu não era bom nos fundamentos e Bernays era excelente. Bernays, Hilbert e [Wilhelm] Ackermann[11], publicaram um livro [que] foi cem por cento escrito por Bernays. De quem foram as ideias não sei, Hilbert, provavelmente, foi quem o organizou. Foi uma sorte enorme para a ciência e para mim eu não ter sido escolhido. Teria sido, naturalmente, muito lisonjeador ser assistente [de Hilbert], mas foi muito melhor assim.

JK: Vamos falar de resolução de problemas. De onde vieram as regras e métodos heurísticos que estão no *How to Solve It*[12]? Qual a sua origem?

GP: Já publiquei sobre esse assunto. Este é, julgo, o meu primeiro artigo sobre resolução de problemas[13] e falo disso em pormenor nas primeiras linhas. Tive que preparar um miúdo para um exame do liceu, um miúdo pouco esperto. Quis-lhe explicar um problema… um problema parecido com este[14] e não o consegui. À noite sentei-me e inventei esta [representação]. Este foi o início do meu interesse explícito pela resolução de problemas.

JK: Foi então ao tentar ensinar [ao miúdo] que lhe surgiram estas questões.

GP: Não, não, isso apareceu depois. Foi só o principal, a representação com um grafo. Eu não conhecia a palavra *grafo*, etc. mas inventei esta representação e depois melhorei-a, fiz uma figura geométrica. Mas esta invenção germinou aí e foi este o princípio do meu interesse explícito [na resolu-

ção de problemas]. Implicitamente, provavelmente, já estava interessado antes, também tinha interesse [na questão de] como é que as pessoas descobrem. Foi Ernest Mach que disse que só se consegue realmente compreender uma teoria, se se souber como ela foi descoberta. Eu li o livro dele[15] e influenciou-me muito, levou-me da filosofia à física. Mach era muito contra a filosofia [do seu tempo].

JK: O grafo apareceu primeiro do que as suas questões ou sugestões do tipo, ‹Qual é a incógnita›, ‹Consegue fazer uma figura›?

GP: Sim, o grafo apareceu primeiro. Nessa altura eu estava muito interessado em Descartes, nas *Regulae*[16].

JK: Nas *Regras*.

GP: Posso mostrar-lhe, tenho aqui… Aonde é que estará? (Procura o livro mas não encontra). Tenho uma edição [bilingue] das *Regras*, de um lado está o original em latim, do outro a tradução francesa. Julgo que é [com] estas questões com que agora se inicia o *How to Solve It*.

JK: Quando é que isso foi? Quando estava em Zurique?

GP: Sim. Isto aqui é… Oh, já viu o número do *Journal of Graph Theory*? Posso oferecer-lho.

JK: Não, não tinha visto.

GP: Tem dois artigos[17]. O primeiro, de Harary… não tenho nenhuma cópia dele, e o outro de Albert Pfluger. Não sei se sabe quem é.

JK: Não.

GP: É um professor da minha antiga instituição[18].

JK: Era um colega seu?

GP: Não, era um estudante. Fez o doutoramento comigo. Conheci-o a ele, à sua filha etc., etc.

JK: E ele conta a história.

GP: Conta-a muito bem.

JK: Estou a ver, óptimo.

GP: Há [também] um artigo de Harary.

JK: Eu procuro.

GP: Arranjarei cópias mais tarde. De qualquer modo, você encontra, é fácil.

JK: Quando resolve problemas, usa os seus conselhos do *How to Solve It*? Conscientemente?

GP: Sim, mesmo mais do que isso. Como também digo algures — está num dos meus artigos — eu tinha as regras e eu próprio as experimentei. Depois de ter editado as obras de Hurwitz pensei também em publicar as suas notas — ele tinha um caderno de notas, notas matemáticas, um diário matemático, melhor dizendo. A palavra correcta é *diário*, em francês dizemos *journal*, mas em inglês dizemos *diary*. [Hurwitz] tinha um diário matemático muito bem escrito, redigido de forma muito completa, não apenas rascunhado mas escrito com clareza, bem formulado. Aí ele descreve aquilo em que pensa, por vezes as suas conversas, outras vezes o que leu. Pensei então [também] em editar o diário e assim, entre outros, encontrei este problema que me conduziu ao [*Pólya*] *Counting Method*. Escolhi este método de contagem apenas para testar as minhas próprias regras. Digo isto algures, num artigo que publiquei, *Welcome*[19].

JK: Também quer esse artigo no livro [das obras completas].

GP: Sim.

(…)

GP: Isso está aí [nesse artigo], digo mesmo isso, [que] tentei experimentar… Eu pretendia experimentar eu próprio essas regras e este problema de Hurwitz era mesmo bom para isso. [Era] obviamente um problema interessante, pois Hurwitz e Cayley trabalharam nele, e [era] essencialmente relacionado com a química. Disso gosto, [de um problema] relacionado com algo de importante e com a prática. E, por outro lado, são necessários muito poucos conhecimentos prévios.

Vou contar-lhe uma história. Quando estudou álgebra, ainda estudou o Teorema de Sturm.

JK: Estudei.

(…)

GP: Hoje em dia já não consta dos livros de álgebra embora na verdade seja um assunto essencial. Sturm foi professor na École Polytecnique de Paris e citou-o: *Le théoreme dans j'ai l'honneur de porter le nom* —‹O teorema no qual eu tenho a honra de ter o nome›. Agora, eu tenho… existe o ‹Método de Contagem› (*Counting Method*) no qual eu tenho a honra de ter o nome.

JK: É bom, muito bom.

GP: Está a ver, e foi descoberto apenas partindo disto… eu queria experimentar as minhas regras.

JK: Algumas pessoas dizem que não conseguem usar as [suas] regras, ou que…

GP: Pois é, as pessoas são diferentes, as pessoas são diferentes.

JK: Acha que é possível desenvolver a capacidade de uma pessoa para resolver problemas?

GP: Penso que sim.

(Entra a Sra. Pólya com bebidas e falámos de coisas de família)

JK (para a Sra. Pólya): Encontrei um artigo que você escreveu[20], tenho uma cópia.

Stella Pólya: (Risos) Eu tive apenas a ideia sobre a almofada de alfinetes. Disse a [Jean] Pedersen e foi ela que falou disso. Foi ela quem escreveu e fê-lo sem eu saber.

(Seguiu-se mais alguma conversa entre os três e depois a Sra. Pólya saiu. O tempo está a esgotar-se.)

JK: Acho que já fiz a maior parte das perguntas que queria.

GP: Qual é a próxima?

JK: A próxima é esta, acha que é possível desenvolver a capacidade de uma pessoa para resolver problemas? Até que ponto podemos desenvolver essa capacidade?

GP: Ora bem, eu diria que não é tanto ‹desenvolver› mas ‹despertar›.

JK: Ela já está lá.

GP: Está lá algures. Se não há nada lá, não é possível… Mas podemos despertar essa capacidade. [Com] um bom professor, etc. [com] uma boa oportunidade para a despertar. No meu caso, tive obviamente possibilidades que isso [acontecesse], mas ela foi despertada muito tardiamente. Provavelmente, teria sido um matemático muito melhor se tivesse tido um bom professor no liceu. Essa capacidade pode ser despertada… estou convencido disso. Talvez esteja a ser demasiado optimista, mas até acho que [com] as minhas regras, um professor, um bom professor dando alguma ênfase às minhas questões, pode ajudar a despertá-la. Allan Schoenfeld tem algumas ideias sobre como fazer isso. Não estou totalmente de acordo com ele, com o que ele diz,

mas de qualquer modo penso que sim, nisso eu acredito. Não está provado, evidentemente, mas será muito difícil de provar ou de refutar.

JK: Acha que é importante o professor apresentar diante da turma… [Que] é importante o professor mostrar diante da turma como resolver o problema. O professor deve ser um actor?

GP: O que é mais importante para o professor, é que ele próprio tenha a experiência de resolução [de problemas]. Em Belmont [CA] há uma universidade católica, a Universidade de Notre Dame. Tivemos lá um encontro, você não esteve, evidentemente. Tivemos lá Ed Teller, o pai da bomba atómica [que] deu uma palestra, uma palestra mesmo muito interessante[21]. Eu não concordo com tudo o que ele disse, mas foi bom. [Teller] disse que o mais importante é o professor, [que] o professor deve divertir os jovens, [que] matemática deve divertir os jovens.

JK: E você concorda?

GP: Concordo. Para despertar os jovens, os problemas devem ser divertidos, desafiadores. Os problemas devem ser divertidos, não [devem ser] problemas muito afastados deles, não [devem ser] problemas ‹práticos› como calcular o imposto sobre os rendimentos.

JK: Isso não é mesmo nada divertido.

GP: (Risos) Absolutamente. O Infernal Serviço dos Rendimentos (*Infernal Revenue Service*). Não é nada divertido.

JK: Entre os alunos que teve, como identificava os melhores em matemática. Ensinou alunos que eram bons em matemática, como é que descreveria aqueles que eram os melhores?

GP: Qual era o melhor, não sei dizer-lhe.

JK: Está bem, [mas] entre os melhores, como conseguia identificar o talento deles. Eram os mais rápidos?

GP: Colocavam boas questões, descobriam alguma coisa por eles próprios, etc. Não há maneira simples… As pessoas são demasiado diferentes, não há uma maneira simples de descrever isso, acho que não há.

JK: E quanto às pessoas que são criativas em matemática, comparando com as que simplesmente são capazes de a aprender? O que é que faz com que sejam criativas? O que é que isso exige? Apenas um grande interesse?

GP: Não sei.

JK: Nem toda a gente é criativa em matemática.

GP: Disse um dia algures, ‹qual é a diferença entre *produtivo* e *criativo*›? Se pensamos sobre um problema e produzimos um resultado, neste caso estamos a ser produtivos. Se ao realizarmos esse trabalho obtemos um método com o qual conseguimos resolver também outros problemas, então estamos a ser criativos. É esta a diferença, mas é difícil explicar de que se trata. Não penso que existam sinais evidentes para reconhecer essa diferença, acho que não.

JK: São coisas com que as crianças nascem?

GP: Sim, tenho quase a certeza. Devemos ter uma [predisposição] genética… Deve ser alguma coisa com que nascemos, claramente.

JK: Mas ajuda se tivermos um professor…

GP: Isso ajuda, para a despertar.

JK: No entanto, mesmo que não tenhamos tido um professor para a despertar, podemos ser…

GP: Podemos.

JK: Como no seu caso.

GP: Se formos muito… Ora bem, eu tive Mach como professor. Um pouco tarde, mas eu… eu aprendi… Mach disse e explicou-o muito bem [que] ‹se pretendemos compreender teoria, temos que saber como ela foi descoberta›. E isto eu compreendi.

JK: Pensa que é esse um dos problemas do ensino da matemática nas escolas, que [nos limitamos] a apresentá-la aos jovens?… Apresentamos a matemática aos jovens mas não lhes mostramos como ela foi descoberta. Por outras palavras, [acha que] o ensino deve ser mais genético?

GP: Devemos ilustrar [como isso acontece], fazer uma pequena encenação e fingir que estamos a descobri-la. Publiquei isto algures, fingir a descoberta.

JK: E pensa que isso é importante para…

GP: Se fizermos isso bem feito, eles aprendem muito mais que apenas o problema [a resolver].

JK: Colaborou com outros matemáticos?

GP: Com muitos.

JK: Eles abordavam a matemática de um modo diferente do seu?

GP: Não sei. Como lhe disse, nunca colaborei com Weil, os nossos interesses eram muito distintos. Mas colaborei com matemáticos muito bons, melhores que eu próprio. Com Hurwitz, com [Godfrey Harold] Hardy, com [Gábor] Szegö[22]. Estão aqui à minha volta (aponta para fotografias na parede do escritório). Evidentemente que foi com Szegö que eu colaborei mais.

JK: A abordagem da matemática de Szegö é a mesma que a sua?

GP: Pelo contrário, em certa medida éramos complementares.

JK: De que forma?

GP: Por exemplo, ele era um calculador excelente, era excelente no cálculo.

JK: E você não é tão bom?

GP: Não sou mau, mas ele… De algum modo complementávamo-nos um ao outro. Ele sabia de uns assuntos, por exemplo, sabia mais de polinómios do que eu, de Legendre, etc. De alguma forma nós… os nossos interesses eram suficientemente semelhantes, mas também suficientemente diferentes, não consigo enumerar todos os aspectos, mas era mais o complementarmo-nos. Tínhamos evidentemente, alguns interesses muito semelhantes, mas também diferentes. [E] também antecedentes similares, fomos os dois alunos de [Leopold] Fejér, etc, mas…

JK: Que tipo de professor era Fejér?

GP: Era muito bom, muito bom. Tive poucas aulas suas, mas conversei muito com ele. Era excelente. Escrevi sobre isso algures, fiz um obituário de Fejér onde falei sobre isto[23]. Ele contava histórias muito boas.

JK: E sobre Hardy? Que tipo de matemático era Hardy?

GP: Tinha um certo charme pessoal. Nunca conheci na minha vida ninguém com tanto charme. Não apenas para os matemáticos, mas para as pessoas em geral. Na Europa, os matemáticos professores ganham menos mas possuem mais coisas. Por exemplo, em Zurique, e mesmo na Budapeste comunista, um matemático professor certamente que tem

uma empregada doméstica. Aqui não se consegue pagar… Você consegue pagar a uma empregada?

JK: Não.

GP: Mas lá conseguimos pagar a uma empregada. Nós tínhamos a mesma empregada e quando Hardy lá esteve, a empregada fez uma empada extra para ele. Hardy gostava do chá da tarde e ela fez uma empada extra para ele, embora Hardy provavelmente nunca tenha olhado para ela e de certeza que nunca lhe falou. No entanto, a empregada também ficou impressionada com Hardy. Ele tinha um certo charme que não se consegue descrever.

JK: Mas no trabalho com a matemática, a abordagem dele era a mesma que a sua?

GP: Não, a sua colaboração era mais com Littlewood, muito mais com Littlewood de que comigo. Littlewood era talvez o que mais descobria e Hardy o que mais escrevia. O mesmo se passou com o nosso livro *Inequalities*[24]. Eu escrevi um ou dois capítulos, Littlewood não escreveu um único — algumas das suas palestras tinham sido policopiadas e esse material foi utilizado. Eu escrevi uns quantos capítulos, mas Hardy escreveu tudo. Tal como [o livro] está, cada uma das frases foi escrita por Hardy. Ele tinha uma extraordinária facilidade em escrever, mesmo em francês — mas recusava-se falar francês, os ingleses têm bem consciência disto. Escrevia muito depressa em francês, e em inglês, claro, tinha um talento especial para escrever depressa e bem.

JK: Quando se trabalha em matemática, quando se tenta resolver um problema matemático, acha que o conselho para deixar o problema de lado por uns tempos… é um bom conselho?

GP: Não sem primeiro ter feito alguma coisa.

JK: [É preciso] experimentar antes. Teve alguma vez a experiência de lhe aparecer uma solução inconscientemente?

GP: Sim, com certeza. Há mesmo [a expressão] ‹Esperar pelo bom vento›. É uma expressão comum.

JK: Teve essa experiência?

GP: Não sei de quem ouvi, mas não o inventei eu, tenho a certeza. Quando se é marinheiro — não de um barco a motor, mas de um barco à vela — há que esperar pelo bom vento. Trata-se assim de ‹esperar pelo bom vento›. Não inventei esta expressão, deve ser algum dito tradicional.

JK: Pessoas como Poincaré e outros [também o] disseram…

GP: Esperar, dormir sobre o problema. Isto é internacional, é dito em todas as línguas.

JK: [E] teve a experiência de acordar com uma solução?

GP: Sim, de vez em quando. Também descrevi isto algures num dos meus artigos.

JK: [A solução] apareceu-lhe assim desse modo?

GP: Mas muito raramente. Ouvi o mesmo de Hurwitz. Acordar com a solução, mas são apenas coisas fantasmagóricas.

JK: Não é verdadeiramente a solução?

GP: Não, não é assim [que se passa]. Muito raramente aconteceu que acordasse realmente com uma solução que o fosse. Há uma coisa simples no [livro] *Inequalities*, uma solução para… Penso que é referido num dos meus últimos artigos[25] (vai buscar o artigo).

JK: Número 236.

GP: Penso que é o segundo [artigo] onde eu descrevo isso — Sonhos matemáticos. Agora raramente tenho, mas quando era mais novo tinha sonhos matemáticos.

JK: O que quer dizer com sonhos matemáticos?

GP: Oh, eu sonhava…

JK: Com símbolos?

GP: Não, [sonhava] com um teorema ou uma demonstração ou qualquer coisa, mas normalmente… [a demonstração] dissolvia-se, está a ver. Mas houve uma vez que me lembrei, aconteceu mesmo, realmente sonhei-a correctamente. Apenas tive que escrever os pormenores de manhã. Ouvi dizer que com Hurwitz aconteceu o mesmo. Tenho quase a certeza que isto está descrito aí [no artigo].

JK: Desenha muitas figuras quando está a trabalhar num problema?

GP: Algumas vezes sim, desenho muitas figuras, às vezes muito cuidadosamente.

JK: Mesmo quando o problema não exige uma figura?

GP: Com certeza. Pode ser o início da ideia, obtermos uma figura que esteja ligada com o problema.

(…)

(A conversa regressa à palestra de Eduard Teller)

GP: Então ele ensina a um dos miúdos e [esse miúdo] vence os outros. Assim ficarão todos com muita vontade de aprender e, ao aprenderem, aprendem também o sistema binário e a divertir-se com a matemática. Era essa a ideia de Teller, com que não concordo a cem por cento, mas foi bom que alguém o dissesse aos professores. Sobretudo que [disse-se que] o principal no professor deve ser o interesse, [que] ele deve divertir, convencer os jovens que a matemática é divertida.

JK: [E] como é que os jovens vão aprender as técnicas matemáticas?

GP: Hão-de aprender. Se jogarem o jogo do Nim, aprenderão a fazer adições muito rapidamente, e aprendem a combinar coisas etc. Teller é seguramente um cientista de elevada craveira, e diga-se a propósito que não é apenas isso. Sabe que havia um concurso de matemática na Hungria[26].

JK: Sim

GP: Teller venceu esse concurso quando era jovem. Por isso, ele sabe do que está a falar quando fala sobre a aprendizagem da matemática. Ele tem experiência real da matemática para a idade do liceu, experiência de alto nível. E Jean Pederson, que foi uma professora muito bem sucedida, vai aos liceus, ou os jovens vão à Universidade de Santa Clara, e ela mostra-lhes como construir modelos. Depois disso, eles ficam desejosos por construir modelos. Um vez, ela fotografou cada um dos jovens com o modelo que fez. Isso também é alguma coisa, também é trabalho matemático, aprendem figuras geométricas, etc. ‹A aprendizagem começa por ver e fazer›, também citei isto em algures[27].

JK: Sim, eu sei.

GP: Assim, se jogarmos o jogo do Nim ou construirmos modelos matemáticos… A propósito, a Sra. Pederson, juntamente com alguém da Universidade de Santa Clara, está a escrever um livro principalmente para adolescentes — sobretudo para os primeiros anos do liceu, talvez, ou um pouco antes ou um pouco depois — onde propõem problemas

divertidos em que têm que realizar muitos cálculos[28]. Está bastante bem feito. Discuti um pouco [o livro] com ela, ajudei um pouco mas foi feito por eles. Ainda não está publicado. A Sra. Pederson escreveu vários livros mas este é um livro como deve ser e é o que se deve fazer: dar [aos jovens] alguma coisa que os divirta.

JK: É um bom conselho.

GP: Se tivesse mais tempo, eu sabia o que gostava de fazer. Tenho muitos textos que me enviaram — coisas sobre o ensino e coisas semelhantes — pedindo-me conselhos, e na maior parte dos casos não os li. Agora não sei o que fazer com todos estes textos.

JK: Quer mandar-mos a mim?

GP: Posso mandar-lhe muitos.

JK: Está bem.

GP: Mas tenho que os preparar.

JK: Envie-mos que eu ajudo-o.

GP: Está bem.

JK: Pode entregá-los à secretária do Departamento de Matemática e ela enviar-mos-á.

GP: Obrigado, isso é muito bom.

Notas

[1] Rota, Reynolds, & Shortt, 1984.

[2] Pólya, 1973/1984.

[3] Hadamard, 1945.

[4] Professora de matemática na Universidade de Santa Clara.

[5] Na verdade a citação é de Quintilian (*De Institutione Oratoria*, IV. ii).

[6] «Naught but firmness gains the prize, Naught but fullness makes us wise, Buried deep, truth ever lies!» (Schiller, 1796). [‹Só a tenacidade premeia, Só a plenitude nos esclarece, A verdade habita as profundezas.› (NT)]

[7] Pólya refere-se à sua sessão com Peter Hilton no encontro anual do *National Council of Teachers of Mathematics* em San Diego nesse Abril. Hilton proferiu uma conferência que ilustrava como a matemática não deve ser ensinada e então Pólya apresentou algumas regras de ouro para bem ensinar. A sessão foi uma repetição da apresentação que ambos tinham feito no encontro conjunto da *American Mathematical Society* e a *Mathematical Association of America* em Seattle, no verão anterior (ver Hilton & Pedersen, 1999).

[8] A aposta foi feita em 1918 e foi sobre que direcção seguiria no futuro a matemática. Weil era um construtivista e Polya, era um matemático mais clássico (ver Gurevich, 2001, para mais detalhes sobre aposta).

[9] Polya, 1973/1984.

[10] Matemático que Pólya reconheceu ter recebido profunda influência e com quem trabalhou em Zurique durante cerca de seis anos (em entrevista a G. L. Alexanderson, *Two-Year College Mathematics Journal*, Janeiro de 1979); foi Hurwitz quem convidou Pólya para um lugar no Instituto Federal de Tecnologia da Suíça a que pertenceu durante 26 anos. (NT)

[11] Hilbert & Ackermann, 1928; Hilbert & Bernays, 1934, 1939.

[12] *Como resolver problemas*, na tradução portuguesa de Leonor Moreira (Gradiva, 2003) (NT).

[13] Pólya (1919.). A representação melhorada pode ser vista no *Mathematical Discovery* (Pólya, 1981, Vol. 2, p. 9) e no verso da capa do volume 2 da edição original.

[14] O problema é determinar o volume do tronco de uma pirâmide recta quadrangular, conhecidos a altura e os comprimentos dos lados das bases superior e inferior (ver Polya, 1981, Vol. 2, p. 2).

[15] Mach, 1883.

[16] Descartes, 1701.

[17] Harary, 1977; Pfluger, 1977.

[18] Eidgenössische Technische Hochschule Zürich [Instituto Federal de Tecnologia da Suíça].

[19] Pólya, 1977.

[20] Pólya, S., 1977.

[21] A palestra de Edward Teller chamou-se *‹The New (?) Math›* [*Matemática Moderna* (?)] e teve lugar no encontro de Fevereiro de 1978 da Secção da Califórnia do Norte da *Mathematical Association of America*, que se realizou no College of Notre Dame.

[22] Gabor Szegö foi um matemático com quem Pólya desenvolveu profunda e continuada colaboração em Zurique e com quem viria a escrever aquela que é considerada a sua obra prima em matemática — *Problemas e Teoremas em Análise*, publicada em alemão em 1925. Quando se exilou nos Estados Unidos a partir de 1940, Pólya viria a reencontrar-se com Szegö que dirigia o Departamento de Matemática na Universidade de Stanford e o convidou para um lugar de investigador associado. (NT)

[23] Pólya, 1961. Ver também Pólya, 1969.

[24] Hardy, Littlewood, & Pólya, 1934.

[25] Trata-se da demonstração da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica feita Hardy, Littlewood, and Polya, 1934, p. 103. Ver Pólya, 1970.

[26] O concurso Eötvös. [Célebre concurso de problemas matemáticos que se iniciou em 1894 e que inspirou competições semelhantes em muitos países. (NT)]

[27] Pólya, 1981, Vol. 2, p. 103, onde Pólya parafraseia Kant: «A aprendizagem começa com a acção e a percepção».

[28] Posteriormente publicado, Pedersen and Armbruster, 1979.

Referências

Descartes, R. (1701). Regulae ad directionem ingenii (Rules for the direction of the mind). In *Descartes Opuscula posthuma, physica & mathematica*. Amsterdam: P. & J. Blaeu.

Gurevich, Y. (2001). Platonism, constructivism, and computer proofs vs. proofs by hand. In G. Paun, G. Rozenberg, & A. Salomaa (Eds.), *Current trends in theoretical computer science: Entering the 21th century* (pp. 281–302). Singapore: World Scientific.

Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Harary, F. (1977). Homage to George Pólya. *Journal of Graph Theory*, *1*, 289–290.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E., & Pólya, G. (1934). *Inequalities*. Cambridge: Cambridge University Press.

Hilbert, D., & Ackermann, H. (1928). *Grundzüge der theoretischen Logik* [Principles of mathematical logic]. Berlin: Springer.

Hilbert, D., & Bernays, P. (1934). *Grundlagen der Mathematik* [Foundations of mathematics] (Vol. 1). Berlin: Springer.

Hilbert, D., & Bernays, P. (1939). *Grundlagen der Mathematik* [Foundations of mathematics] (Vol. 2). Berlin: Springer.

Hilton, P., & Pedersen, J. (1999). Epilogue: Pólya and ourselves — Mathematics, tea and cakes. Symmetry in theory: Mathematics and aesthetics. *Visual Mathematics*, *1*(1). Retrieved from http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/hil/ped6.htm

Mach, E. (1883). *Die Mechanik in ihrer Entwicklung* [The science of mechanics]. Leipzig: Brockhaus.

Pedersen, J. J., & Armbruster, F. O. (1979). *A new twist: Developing arithmetic skills through problem solving*. Menlo Park, CA: Addison-Wesley.

Pfluger, A. (1977). George Pólya. *Journal of Graph Theory*, *1*, 291–294.

Pólya, G. (1919). Geometrische Darstellung einer Gedankenkette [Geometrical representation of a chain of thought]. *Schweizerische Pädagogische Zeitschrift*, *2*, 53–63.

Pólya, G. (1961), Leopold Fejér. *Journal of the London Mathematical Society*, *36*, 501–506.
Pólya, G. (1969). Some mathematicians I have known. *American Mathematical Monthly*, *76*, 746–753.
Pólya. G. (1970). Two incidents. In T. Dalenius, G. Karlsson, & S. Malmquist (Eds.), *Scientists at work: Festschrift in honour of Herman Wold* (pp. 165–168). Stockholm: Almqvist & Wiksell.
Pólya, G. (1977). A note of welcome. *Journal of Graph Theory*, *1*, 5.
Pólya, S. (1977, October). Pincushion geometry for primary children. *California Mathematics* (California Mathematics Council), *2*(1), 35–36.
Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving* (Combined ed.). New York: Wiley.
Pólya, G. (1984). A story with a moral. In G.-C. Rota, M. C. Reynolds, & R. M. Shortt (Eds.), *George Pólya: Collected papers* (Vol. 4: Probability; combinatorics; teaching and learning in mathematics, p. 595). Cambridge, MA: MIT Press. (Reprinted from *Mathematical Gazette*, *57*, 86–87, 1973)
Rota, G.-C., Reynolds, M. C., & Shortt, R. M. (Eds.). (1984). *George Pólya: Collected papers* (Vol. 4: Probability; combinatorics; teaching and learning in mathematics). Cambridge, MA: MIT Press.
Schiller, F. von. (1796). Sprüche des Konfucius. In F. von Schiller (Ed.), *Musen-Almanach für das Jahr 1796* [Muses Almanac for 1976] (pp. 39–47). Neustrelitz, Germany: Michaelis.

Tradução de H. M. Guimarães

George Pólya – nota biográfica

Se foi estudante de pós-graduação a viver no College Terrace *em Palo Alto, poderá ter tido a oportunidade de passar longas tardes de verão no escritório sombrejado da modesta casa [de George Pólya] em Dartmouth (que pronunciava ‹Dartmouse›), a beber sumo de frutas e a comer bolos, e a aprender como ser um académico — a necessidade de evitar a auto-compaixão e de nos darmos importância; de cuidarmos do nosso trabalho; de encontrar a palavra certa, a ideia certa; de encontrar prazer e humor naquilo que fazemos. E ao regressar anos mais tarde com a sua família, e ver Pólya a divertir o filho de cinco anos que veio consigo com um brinquedo de dobrar ou a apanhar limões para si no quintal, poderá ter um vislumbre da verdade que os grandes professores não nos ensinam apenas a fazer, ensinam-nos a ser.*

(J. Kilpatrick, no editorial do *JRME*, 16 (5), Novembro de 1985,
por ocasião do falecimento de Geoge Pólya [1])

George Pólya foi um matemático com uma grande produção individual e também em colaboração com matemáticos de renome em domínios da Matemática muito variados. Desenvolveu igualmente uma intensa actividade não estritamente ligada à investigação científica, muito relacionada com ensino em Matemática, intervindo em congressos e junto de professores, realizando palestras, cursos e outras intervenções, publicando inúmeros artigos em revistas, escrevendo livros.

Pólya nasceu na Hungria, em Budapeste, a 13 de Dezembro de 1887, filho de Anna Deutsch e Jakab Pollák, numa família de ascendência judaica pelo lado do pai, que escolheu o apelido Pólya quando se converteu ao catolicismo. Um de cinco filhos, três rapazes e duas raparigas, sendo George o terceiro a nascer, depois de um irmão e duas irmãs. Iniciou a sua educação escolar numa escola da zona onde vivia, recebendo, em 1894, «um certificado de excelência por empenhamento e bom comportamento» [2, p. 15]. Aos 10 anos perdeu o pai, ficando a família sob a responsabilidade da mãe que prosseguiu o trabalho na empresa de seguros que o marido, homem de leis, tinha criado, e do irmão mais velho. As duas irmãs começaram de imediato a trabalhar após o falecimento do pai.

Viveu na cidade em que nasceu até terminar os seus estudos secundários e onde também se doutorou em Probabilidades (1912). Depois do seu doutoramento, Pólya decidiu passar dois anos na Universidade de Göttingen. Aí terá contactado com Félix Klein, já aposentado, e com muitos dos grandes nomes da Matemática da época, como Hilbert, Landau, Toeplitz, Courant e Herman Weyl, e frequentado cursos leccionados por vários desses matemáticos. É neste período, em 1912, que publica o seu primeiro artigo. Depois de diversas viagens e estadias em várias cidades, onde contactou com matemáticos ilustres, estabeleceu-se no Instituto Federal de Tecnologia da Suíça, em Zurique, onde trabalhou 26 anos, primeiro como *Privatdozent* e *Titular professor* (1920), depois como *Professor Ordinarius* (1928). Foi neste período que George Pólya desenvolveu grande parte do seu trabalho académico e científico e encontrou grandes matemáticos da altura — Plancherel, Gonseth, Weyl (de novo), Bernays e outros, desenvolvendo trabalho e relações de amizade com alguns deles. Começou aqui também a sua intensa e prolongada colaboração com Gábor Szegö, com quem viria a escrever a sua «obra-prima» matemática *Problemas e Teoremas em Análise*, publicada em alemão em 1925. Em 1924 passou um ano em Inglaterra — Oxford e Cambridge — onde conheceu G. H Hardy e J. H. Littlewood com quem privou e trabalhou — o livro *Inequalities* (1934), elaborado em colaboração com estes matemáticos, viria a ser considerado um «clássico» e uma «referência» durante várias dezenas de anos.

Entretanto George Pólya adquire a nacionalidade suíça e casa com Stella Weber (1918) que viria a acompanhá-lo durante toda a sua vida. Não tiveram filhos.

Em 1940, George Pólya com a mulher, para escapar à ameaça nazi, deixa Zurique e troca a Europa pelo novo continente. Depois de curtas passagens por outras universidades, seria em Stanford, em Palo Alto na Califórnia, onde já estava o seu colega e antigo amigo Gábor Szegö a dirigir o Departamento de Matemática, que Pólya, por convite do amigo, que lhe ofereceu um lugar de «investigador associado», se viria a estabelecer definitivamente, a partir de 1942.

Com a sua chegada aos EUA, para lá da investigação em Matemática, inicia uma «nova carreira», correspondendo a interesses antigos em heurística e resolução de problemas. Em 1945 a publica um dos seus livros mais conhecidos nesta área, *How to Solve It*, editado nos Estados Unidos da América pela Princeton University Press, depois da recusa de quatro editoras — certamente por na altura «se situar fora da corrente principal da matemática e da educação» [2, p. 115]. O livro mereceu comentários elogiosos na recensão do matemático E.T. Bell, como aconteceu com a nova impressão em 1948, desta vez revista por outro célebre matemático, Hermann Weyl, e seguiram-se várias reimpressões e edições. Em 1957, por uma outra casa editora, é lançada em livro de bolso a 2.ª edição, que teve grande acolhimento, sendo de 2009 a edição mais recente. Actualmente está traduzido em 21 línguas, incluindo a portuguesa, primeiro no Brasil (1977) e mais recentemente em Portugal (2003) e, um ano após seu falecimento, tinham já sido vendidos mais de um milhão de exemplares, um número «recorde» para livros sobre matemática, como foi sublinhado numa publicação do NCTM [3] editada na sequência do encontro anual de 1987 desta associação, nesse ano dedicado a George Polya.

A *How to Solve It*, outros livros se seguiram — *Mathematical Discovery* (Vol. 1 e 2, 1954), Mathematics and *Plausible Reasoning* (vol. 1, 1962 e vol. 2, 1965), *Mathematical Methods in Science* (1963), *The Stanford Mathematics Problem Book, with hints and solutions* (com J. Kilpatrick, 1974) — bem como inúmeros textos e intervenções diversas, desenvolvendo e aprofundado as suas ideias sobre a resolução de problemas, heurística e a criação matemática e abordando questões sobre ensino da Matemática.

Entre 1946 e 1965, com Gábor Szegö, Pólya mantém todos os anos um ‹concurso de problemas› para os finalistas do ensino secundário — na linha do célebre concurso Eötvos da Hungria — cujos problemas viriam a ser recolhidos e publicados em 1974, num livro elaborado com Jeremy Kilpatrick (*The Stanford Mathematics Problem Book*) que chegara a participar no concurso e, mais tarde, viria a ser aluno e assistente de Pólya em Stanford.

Professor emérito em 1953, continua a publicar e mantém a sua actividade de conferencista da *Mathematical Association of America* (1953–56) e como professor com intervenções em cursos de formação que leccionou entre 1955 e 1974 para «bem mais de mil professores ensino secundário e universitário» [4, p. 21]. Em 1963 recebe da Mathematical Association of America o *Award for distinguishes services in mathematics*', tendo a menção de elogio sido preparada pelo seu amigo Gábor Szegö, colega e colaborador de longa data, com o apoio de outros amigos e colegas:

«O Professor George Pólya foi nomeado para ser a segunda pessoa a receber o *Award for distinguished service to mathematics*. Homenageamo-lo pelo seu contributo na promoção de uma melhor compreensão nossa sobre a natureza da invenção matemática e pela sua influência construtiva no ensino da matemática no seu sentido mais amplo, em todos os níveis, elementares ou avançados, e à escala nacional ou internacional. George Polya é único entre os matemáticos a combinar, durante a sua distinta carreira científica, a investigação profunda em uma frente muito ampla, com um interesse sempre presente pelo ensino da matemática.» [5, p. 2]

Nos anos que se seguem, Pólya mantém as viagens pela Europa, com participação em congressos e outros encontros e realizações, e recebe distinções e homenagens diversas. Na Universidade de Stanford, a que Pólya esteve ligado durante mais de 40 anos, um edifício recebeu o seu nome — *Pólya Hall* — e, na bilibioteca de Matemática da universidade, a fotografia de Pólya é a única de um matemático. Em 1972, George Pólya é homenageado com J. Piaget no 2.º ICME em Exeter e, um ano depois, o Departamento de Matemática de Stanford, celebra os seus 90 anos com um jantar em que a participaram muitos dos seus colegas, amigos e antigos alunos. Em 1980 é escolhido para presidente honorário do 4.º ICME em Berkley, mas por questões de saúde, não pode comparecer.

Em 1984 publica o seu último artigo, também sobre resolução de problemas, em colaboração com a sua colega e amiga Jean Pederson. Morre a 7 de Setembro de 1985 no Hospital de Palo Alto na Califórnia. Gerald L. Alexanderson, amigo e biógrafo, conta que poucos anos antes, tendo morrido um velho pessegueiro do seu quintal, Pólya imediatamente o substituiu, vendo neste gesto uma manifestação do seu carácter optimista, bem reconhecido, tal como o seu humor, por muitos que com ele privaram. Alexanderson junta a este episódio, o relato do matemático Paul Erdös contando que, por ocasião do 97.º aniversário de Pólya ele lhe telefonara a congratulá-lo, dizendo-lhe que iria celebrar os cem anos «com grande esplendor», ao que Pólya lhe retorquira:

«Talvez queira ter cem anos, mas não cento e um, pois a velhice e a estupidez são muito desagradáveis.» [2, p. 157]

Referências e bibliografia

[1] Kilpatrick, J. (1985). *Editorial. Journal For Research in Mathematics Education, vol. 16*, n.º 5, p. 323.

[2] Alexanderson, G. L. (2000). *The random walks of George Pólya*. MAA: Washington, DC.

[3] Alexanderson, G. L. (1989). George Pólya, Teacher. In F. R. Curcio (ed.) *Teaching and learning: A problem solving focus*, pp. 17–26. NCTM: Reston, VA.

[4] NCTM (1989/87). F. R. Curcio (ed.) *Teaching and learning: A problem solving focus*. NCTM: Reston, VA.

[5] MAA [G. Szegö] (1963). Award for distinguished service to Professor George Pólya. *American Mathematical Monthly, vol. 70*, n.º 2, pp. 1–2.

Alexanderson, G. L. (1979). George Pólya interviewed on his ninetieth birthday. *The Two-Year College Mathematics Journal, vol. 10*, n.º 1 (Jan., 1979), pp. 13–19.

Alexanderson, G. L. e Lange L. H. (1987). *Obituary. Bulletin of London Mathematical Society, vol. 19*, n.º 6, pp. 559–608.

MAA (1987). *Mathematics Magazine, vol. 60*. MAA: Washington, DC.

Schiffer, M. M. (1987). George Pólya (1887–1985). *Mathematics Magazine, vol. 60*, n.º 5, pp. 268-270.

Taylor, H. e Taylor, L. (2006). *George Pólya — Master of Discovery*. Dale Seymour Publications: Palo Alto, CA.

Henrique Manuel Guimarães