Parábolas, parábolas…

João Almiro

Eu gosto muito de tecnologia e uso-a com regularidade nas minhas aulas. Quando aparece um equipamento ou um *software* novo e quando o tempo disponível o permite, exploro-o com alguma profundidade tentando perceber as suas potencialidades, tendo sempre em vista como o poderei vir a utilizar em sala de aula. Assim, na primeira oportunidade, procuro integrá-lo nas minhas aulas transportando o meu fascínio pela tecnologia para os alunos, que na maioria das vezes acompanham esse entusiasmo.

No que se refere aos programas de computador que mais ganharam a minha simpatia destacam-se, sem margem para dúvida, os que proporcionam um ambiente de geometria dinâmica, colocando-se em segundo lugar os que possibilitam a representação gráfica de funções. Nesta área da representação gráfica de funções as calculadoras têm tido também, um papel muito importante. Isto já sem falar nas calculadoras gráficas de última geração como a *TI-nspire* que possuem um conjunto de aplicações (gráficos, geometria, folha de cálculo, dados e estatística, …) que em muitas das suas características são autênticos mini computadores, permitindo a realização de explorações muito interessantes. O facto de muitos alunos já terem adquirido esta tecnologia, estando disponível em sala de aula, torna ainda mais fácil este tipo de trabalho.

Realmente, a possibilidade que agora temos de ir alterando os parâmetros das expressões analíticas das funções, podendo observar em tempo real as transformações que ocorrem nas suas representações gráficas, motiva-nos a fazer conjecturas sobre algumas das suas propriedades, o que seria muito mais difícil, ou quase impossível, sem a tecnologia que temos hoje ao nosso dispor. Neste artigo venho partilhar três situações sobre representações gráficas de funções quadráticas, que me surgiram através de explorações realizadas usando tecnologia.

Translação e reflexão

Esta situação surgiu quando estava, com outros colegas, a elaborar testes para os nossos alunos. Na minha escola trabalhamos muito em conjunto, tanto para construir os instrumentos de avaliação como para elaborar e seleccionar as propostas de trabalho para os alunos. Também temos por hábito propor testes às várias turmas senão iguais, por não serem à mesma hora, pelo menos muito semelhantes. A situação a seguir apresentada surgiu quando estávamos a construir uma questão para alunos do 10.º ano que envolvia uma função quadrática e uma função afim, mas onde também se pedia a resolução de equações e inequações a partir da representação gráfica das funções envol-

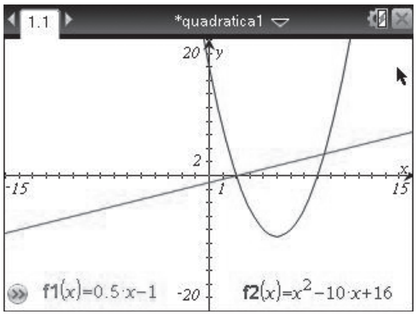

Figura 1

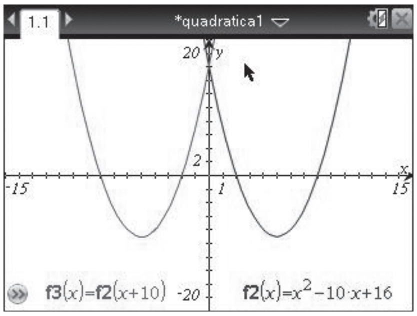

Figura 2

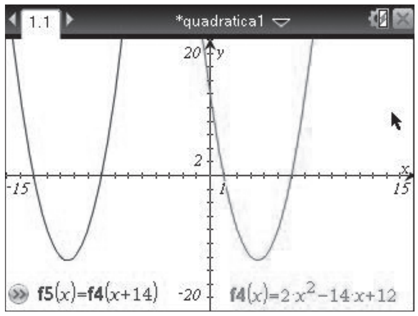

Figura 3

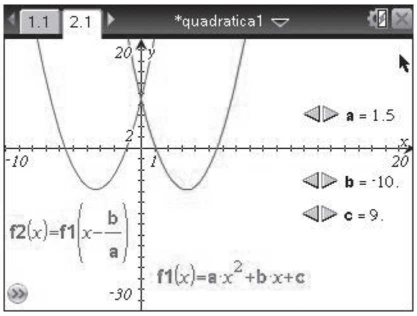

Figura 4

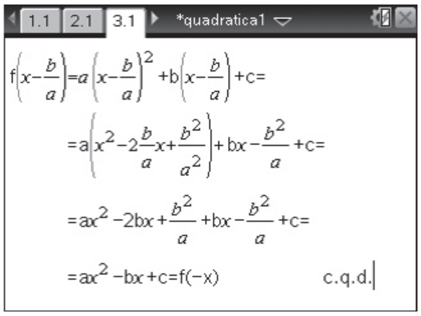

Figura 5

vidas. As funções que tínhamos em estudo eram $f(x) = 0{,}5x - 1$ e $g(x) = x^2 - 10x + 16$, representadas graficamente na figura 1.

Para nós, estas funções tinham uma vantagem muito grande, os cálculos eram simples, tanto dos zeros das funções, como do mínimo da quadrática, como até dos pontos de intersecção dos gráficos das duas funções.

Mas, como precisávamos de escolher outras duas funções para outra turma que não fazia o teste à mesma hora, começámos logo a fazer translações para a esquerda de 2, de 3, de 5. No entanto, os resultados não davam tão «perfeitinhos» como nós queríamos, até que fizemos uma translação de 10 para a esquerda. O que é que nos aconteceu? A nova parábola ficou simétrica em relação ao eixo dos *yy*, como se pode ver pelo gráfico da figura 2.

Fez-se o primeiro «clik». Todos reparámos que -10 era o b, o coeficiente de x da parábola inicial, e comentámos: porque é que fica simétrica em relação ao eixo dos *yy*? Será que acontece sempre isto?

Apareceu a primeira conjectura: dada uma função do tipo: $f(x) = ax^2 + bx + c$, seria sempre $f(x - b) = f(-x)$?

Experimentámos com algumas funções e parecia que a conjectura se verificava. Mas a demonstração ainda era muito fraca: Meia dúzia de funções!… Que resultado mais curioso!… Será que é sempre válido?

Continuámos a fazer experiências e funcionavam todas, estávamos a ficar contentes. Até que um colega introduz uma função no editor da calculadora que destrói a conjectura, como se pode ver na figura 3.

Mas, o que é que essa função quadrática tinha de especial? O coeficiente do x^2 era diferente de 1. Ou seja, parecia que aquela conjectura só se verificava quando o a era igual a 1. Será que se conseguia formular uma propriedade que fosse válida para todas as funções quadráticas?

Aí começámos todos a experimentar outra vez. Foi um momento interessante ver todos os colegas à procura da resposta a este problema que parecia tão inofensivo. Então, um colega formulou outra hipótese que parecia ser válida para todas as funções quadráticas:

Dada uma função do tipo: $f(x) = ax^2 + bx + c$, então

$$f\left(x - \frac{b}{a}\right) = f(-x)$$

Hoje, com a tecnologia que temos disponível, rapidamente conseguimos construir uma página, por exemplo na *TI-Nspire*, em que variamos os parâmetros da função quadrática e observamos o que acontece à translação do gráfico da função associada ao vector $(b/a, 0)$ (figura 4).

De facto esta propriedade verifica-se para qualquer função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, como facilmente podemos observar na demonstração (figura 5).

Tangentes e simetrias

Outra situação que eu achei interessante e que agora vos vou apresentar veio ter às minhas mãos quando estava a preparar uma sessão prática no âmbito do Grupo de Trabalho T³ e enquanto desfolhava o livro «The Case for CAS» (Böhm e outros, 2004).

A propriedade é muito simples e pode ser trabalhada com os nossos alunos, depois de terem abordado o conceito de deri-

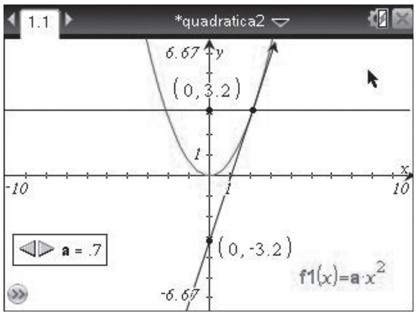

Figura 6

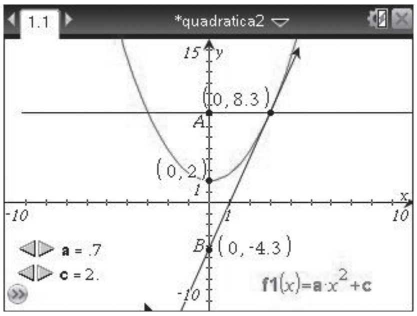

Figura 7

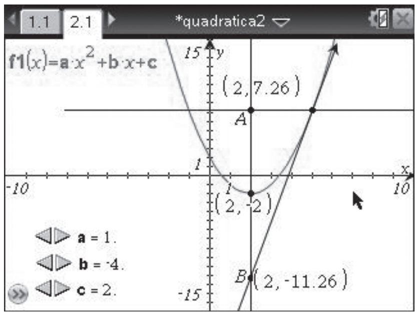

Figura 8

vada. Vou começar com o caso mais fácil, em que considero uma parábola com o vértice na origem do referencial.

Se traçarmos uma recta tangente ao gráfico de uma parábola num ponto qualquer a ordenada do ponto onde essa recta corta o eixo dos *yy* é simétrica da ordenada do ponto de tangência. Ou seja, existe uma simetria em relação ao vértice da parábola entre o ponto onde a recta tangente corta o eixo dos *yy* e o ponto do eixo dos *yy* com a mesma ordenada do ponto de tangência (na figura 6 pode ver-se que obtive esse ponto traçando uma recta paralela ao eixo dos *xx* passando no ponto de tangência).

Se considerarmos agora uma função quadrática com o vértice num ponto qualquer do eixo dos *yy*, podemos observar que a simetria em relação ao vértice da parábola se mantém: neste exemplo (figura 7) o vértice tem de coordenadas (0,2) e os pontos simétricos têm de coordenadas (0; −4,3) e (0; 8,3). Usando a tecnologia adequada, observa-se que esta propriedade se mantém em qualquer parábola nestas condições, ao escolhermos um ponto qualquer do gráfico da função para traçar a tangente. A demonstração desta propriedade está ao nível dos nossos alunos do Ensino Secundário:

Se considerarmos uma função do tipo:

$$f(x) = ax^2 + c \text{ de vértice } (0, c)$$

e um ponto qualquer de abcissa p.

Temos que a ordenada desse ponto é:

$$f(p) = ap^2 + c$$

Ao ponto do eixo dos *yy* com a mesma ordenada podemos chamar A $(0, ap^2 + c)$.

A derivada da função no ponto da parábola de abcissa p é:

$$f'(p) = 2ap$$

Se considerarmos a recta tangente ao gráfico nesse ponto:

$$y - (ap^2 + c) = 2ap(x - p)$$

Fazendo $x = 0$ determinamos as coordenadas do ponto onde esta recta corta o eixo dos *yy* (a que podemos chamar B) que serão: $(0, -ap^2 + c)$.

Para verificarmos a simetria dos dois pontos (A e B) em relação ao vértice podemos fazer a semi-soma das suas ordenadas:

$$\frac{(ap^2 + c) + (-ap^2 + c)}{2} = \frac{2c}{2} = c$$

Verificamos que é igual à ordenada do vértice da parábola como queríamos demonstrar.

Esta simetria continua a verificar-se estando o vértice da parábola noutro sítio qualquer do referencial como se pode ver no exemplo da figura 8. Os pontos A e B continuam a ser simétricos em relação ao vértice da parábola.

A demonstração para este caso mais geral segue a mesma lógica, mas do ponto de vista algébrico é um pouco mais complexa e talvez pouco adequada para a grande maioria dos nossos alunos.

Lugares geométricos

Quando trabalhamos as transformações nos gráficos da função quadrática a maior parte das vezes utilizamos o modelo

$$f(x) = a(x - h)^2 + k,$$

por ser mais simples a interpretação gráfica da variação dos parâmetros a, h e k.

E se estudássemos os parâmetros considerando o modelo $f(x) = ax^2 + bx + c$?

O que acontece ao vértice da parábola quando fixamos dois dos parâmetros e fazemos variar o outro?

Esta pergunta ocorreu-me já há uns anos quando participei num curso do ProfMat em que se utilizava o programa *Geometer's Sketchpad*, onde explorávamos também os parâmetros da função quadrática e com o auxílio do referido programa investigávamos e fazíamos as nossas descobertas. Mais tarde e com alguma surpresa descobri esta proposta de investigação em Embse e Engebretsen (1996).

Como sabemos, quando estamos a trabalhar com este modelo as coordenadas do vértice da parábola são:

$$x = \frac{-b}{2a} \quad \text{e} \quad y = \frac{-b^2}{4a} + c.$$

O que acontecerá ao vértice da parábola quando fixamos os parâmetros a e b e fazemos variar somente o parâmetro c?

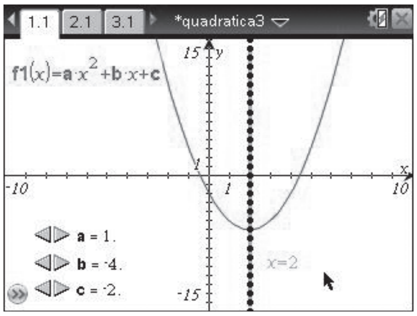

Figura 9

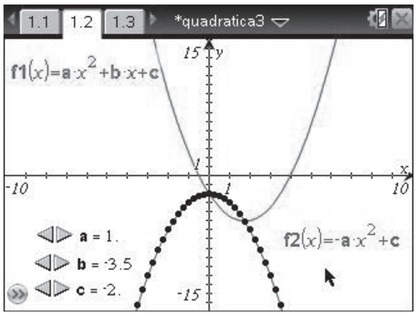

Figura 10

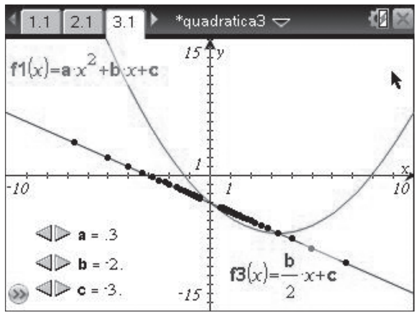

Figura 11

Qual o lugar geométrico das várias posições que o vértice vai percorrendo?

Na medida em que a variação do parâmetro c nada influencia a abcissa do vértice este vai percorrer a recta vertical de equação $x = -b/2a$ como se pode observar na figura 9. Neste exemplo, como $a = 1$ e $b = -4$, o vértice percorre a recta de equação $x = 2$.

E o que acontecerá ao vértice da parábola se fizermos variar o parâmetro b e fixarmos os outros dois?

Curiosamente, aqui ficámos deveras surpreendidos pois o vértice da parábola vai percorrer outra parábola de equação $y = -ax^2 + c$. No exemplo da figura 10 como $a = 1$ e $c = -2$ o lugar geométrico que o vértice percorre é a parábola de equação $y = -x^2 - 2$.

Repare-se que como $x = -b/2a$ e como b é o parâmetro que estamos a variar, podemos resolver esta equação em ordem a b obtendo: $b = -2ax$.

Como $y = (-b^2/4a) + c$ e substituindo a expressão que obtivemos para b temos que:

$$y = \frac{-(-2ax)^2}{4a} + c$$

$$y = \frac{-4a^2x^2}{4a} + c$$

$$y = -ax^2 + c \quad \text{c.q.d.}$$

De igual modo, se fixarmos os parâmetros b e c e fizermos variar o parâmetro a, qual o lugar geométrico dos pontos correspondentes às várias posições que o vértice vai percorrendo?

O vértice da parábola vai percorrer a recta de equação $y = (bx/2) + c$. No exemplo da figura 11 como $b = -2$ e $c = -3$, o vértice percorre a recta de equação $y = -x - 3$.

Como fizemos na situação anterior podemos escrever a ordenada do vértice da parábola sem usarmos o parâmetro que estamos a variar, neste caso o parâmetro a.

Como a abcissa do vértice é $x = -b/2a$, obtemos que $a = -b/2x$.

Como a ordenada do vértice é $y = (-b^2/4a) + c$ podemos substituir a expressão que obtivemos para a:

$$y = \frac{-b^2}{4\left(\frac{-b}{2x}\right)} + c$$

$$y = \frac{b}{2}x + c \quad \text{c.q.d.}$$

Considerações finais

Estes exemplos mostram com clareza que a tecnologia nos proporciona a visualização do comportamento dos gráficos de famílias de funções, quando fazemos variar os seus parâmetros, encontrando-se resultados que por vezes são surpreendentes e nos estimulam a querer saber mais e querer saber porquê. Este facto pode ter muito potencial, nas nossas aulas, junto dos nossos alunos.

A proposta de tarefas de exploração ou de investigação nas nossas aulas, aproveitando a tecnologia que hoje temos ao nosso dispor poderá levar os nossos alunos a conjecturar sobre as propriedades das funções, fomentando a sua curiosidade e o gosto pela Matemática, tornando-a mais apelativa e significativa. A tecnologia pode realmente aqui ter um papel determinante, dependendo em grande medida das tarefas que os professores seleccionarem, as quais poderão levar ao aproveitamento das potencialidades dessa tecnologia ou a transformarem-na em equipamentos enfadonhos somente para confirmar cálculos e meras rotinas.

Referências

Böhm, J., Forbes, I., Herweyers, G., Hugelsshofer, R. e Schomacker, G. (2004). *The Case for CAS*. T³ Europe. Universität Münster — Germany.

Embse, C. e Engebretsen, A. (1996). *Geometric Investigations for the classroom using the TI-92*. Texas Instruments. Austin.

João Almiro

Escola Secundária/3 de Tondela

(Grupo de Trabalho T3)