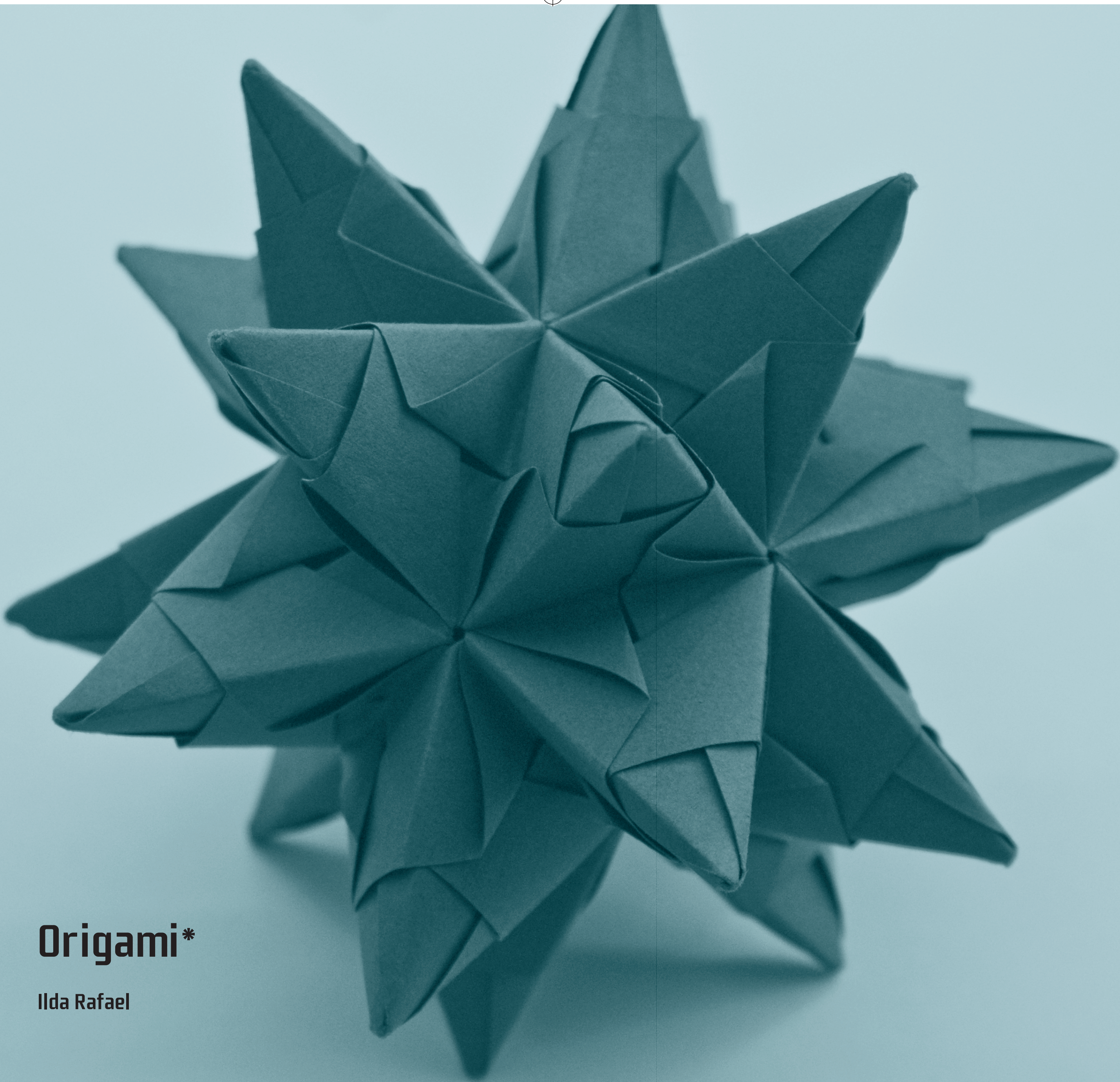


Origami*

Ilda Rafael

As potencialidades do Origami são imensas. Quando pegamos numa folha de papel e começamos a dobrá-la descobrimos formas e propriedades que nos deixam maravilhados. Este é o início daquela que pode ser uma jornada sem fim, através de um universo fascinante.

O meu apreço pelo Origami começou quando era ainda criança, com a dobragem de um chapéu para me proteger do Sol. Chapéu que, acabaria por se transformar num barco. Mais tarde, ainda no primeiro ciclo, descobri *a caixa de pasteleiro*, *o sapo que salta* e *o pássaro que bate as asas*, mas, é desde 1997 que me tenho dedicado a esta arte. Tenho estudado muitas propriedades sozinha, mas sinto que obtenho mais prazer quando o faço em conjunto, seja com alunos, com colegas ou num museu.

Este artigo não pretende contar a história do Origami mas, qualquer pequena introdução a este assunto não pode ignorar as suas origens ancestrais. O termo «dobrar» perde-se na imensidão do tempo. No poema sumério «A Epopeia de Gilgamesh» (a obra literária mais antiga que se conhece) pode ler-se «O tecido três vezes dobrado não será cortado» (Palácios, 2002). A invenção do papel ocorreu, supostamente na China, cerca de 2000 anos atrás. Por volta de 105 d. C., Tsai Lun, alto funcionário da Corte Imperial, terá relatado ao imperador esta invenção. (No Museu Britânico existe um manuscrito em papel datado de cerca de 150 d. C.) Recentes investigações arqueológicas recentes, feitas no noroeste da China, apontam uma data anterior para esta invenção, uma vez que foram encontrados

* Nesta ocasião gostaria de referir três pessoas com as quais partilho o gosto pelo Origami, tenho discutido muitas dobras, propriedades e passado muitas horas a interpretar esquemas: Anabela Gaio, Idália Pesquita e Manuela Martins. As duas primeiras são professoras de Matemática e, em conjunto, temos estudado as propriedades matemáticas que estão subjacentes às dobras e realizado muitas formações em vários encontros e em diferentes escolas. Com a Manuela Martins a troca de opiniões é essencialmente sobre a beleza dos objectos e o significado que os japoneses atribuem a cada dobra e a cada peça.

Figura 1

pedaços de papel do tempo do Imperador Wu (que reinou no período 140–84 a.C.).

O papel chegou ao Japão no século VI d. C. e foi neste país que o Origami se desenvolveu tal como o conhecemos hoje.

Em qualquer livro da especialidade podemos ler que «o Origami é a arte japonesa de dobrar papel.» A palavra japonesa «Origami» é composta por dois caracteres, o primeiro, «Ori», deriva do desenho de uma mão e significa dobrar. O segundo, «Kami», deriva do desenho da seda e significa papel, espírito e Deus (Figura 1). A junção das duas palavras fez cair o «k» surgindo «Origami». A sua história pode ser dividida em três grandes períodos (Prieto, 2002):

O Período Heian (794–1185), onde o Origami era entendido como um divertimento das classes mais ricas, as únicas que podiam comprar papel. Era também utilizado pelos guerreiros Samurai que trocavam presentes enfeitados com *noshi*, pedaços de papel dobrados em forma de leque ou em forma de raio. Os mestres de cerimónia do chá recebiam diplomas que eram certificados com papel dobrado que garantia a sua autenticidade uma vez que um modelo, depois de dobrado, não podia ser desdobrado sem que surgissem novas marcas no papel. Vem também desta época o ritual de se dobrarem borboletas macho e fêmea, nos casamentos, simbolizando a união entre os noivos e que serviam para adornar as garrafas de *saquê*. É ainda deste período o nó pentagonal, que os japoneses utilizavam para escrever as suas orações, conhecido na Europa, especialmente pelos estudantes, que o utilizavam no estudo da geometria.

O Período Muromachi (1338–1573), quando o papel se tornou um produto mais acessível e o Origami começou a ser utilizado para distinguir as diversas classes sociais, conforme os adornos que as pessoas usavam.

O Período Tokugawa (1603–1867), também conhecido como o período da democratização do papel, quando surgem os primeiros livros de Origami. Em 1797 foi publicado o livro chamado *Hiden Senbazuru Orikata*, (como dobrar mil *tsurus*, ver fig. 2) que continha o primeiro conjunto de instrucções para dobrar o pássaro sagrado do Japão, o *Tsuru*. (Em Portugal é conhecido por *Grou* e por *Crane* em Inglaterra e nos EUA.) Este modelo foi adoptado como símbolo da paz depois da segunda guerra mundial. Em 1845 foi publicado outro livro *Kan No Mado* (Janela aberta à estação do Inverno) que incluía uma colecção com cerca de 150 modelos de Origami e, entre eles, a *base do pássaro* e a *base da rã*, duas das bases mais importantes no Origami. Graças a esta publicação o Origami, no Japão, espalhou-se como actividade simultaneamente recreativa e educacional.

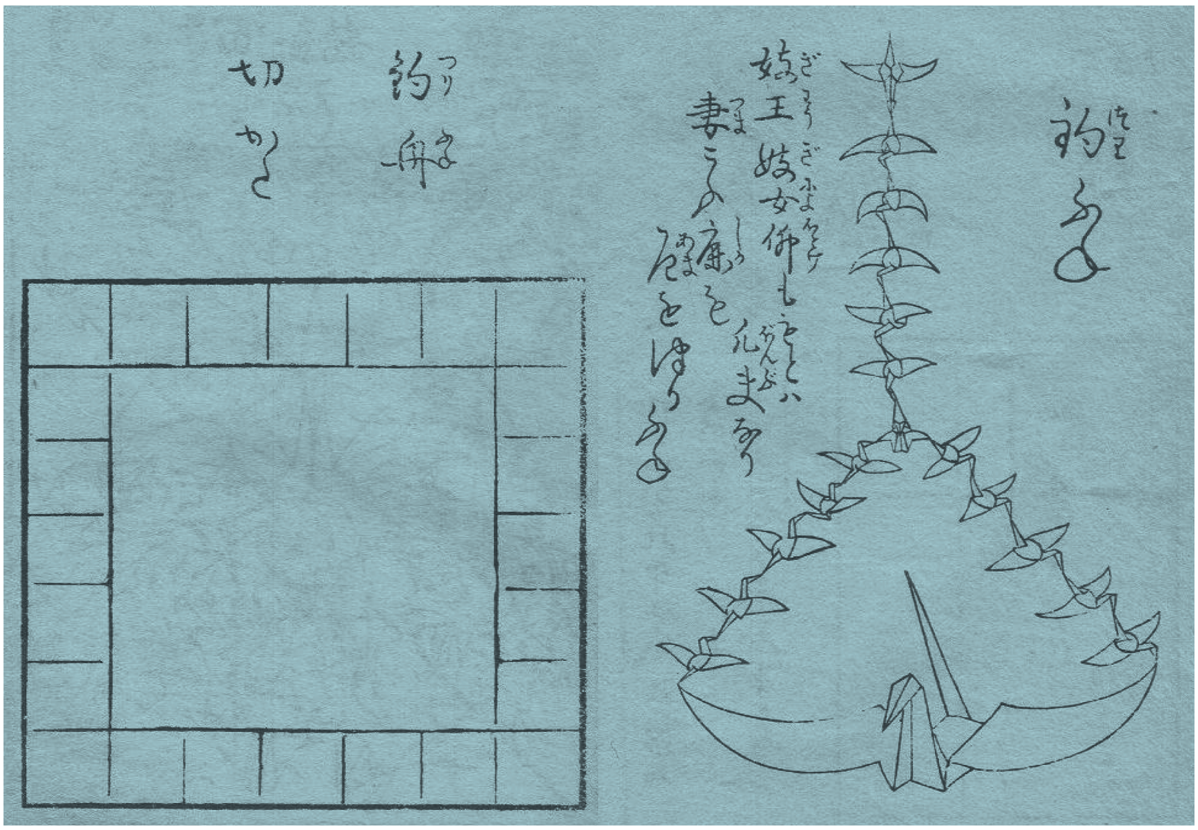


Figura 2. Páginas do livro Hiden Senbazuru Orikata

Figura 3. Akira Yoshizawa e parte da simbologia por si inventada

Na Índia, em Madras, T. Sundara Row (1893), escreveu um livro, *Geometric Exercises in Paper Folding*, onde apresenta construções geométricas utilizando dobragens em papel

A difusão do Origami na Europa iniciou-se com os muçulmanos que praticavam esta arte e a levaram para a Península Ibérica. A doutrina islâmica não permitia a criação de figuras e as dobras de papel eram utilizadas em estudos matemáticos e astronómicos. Após a saída dos muçulmanos do Reino de Granada esta arte continuou a ser desenvolvida sob a designação de *Papiroflexia, como é conhecida em Espanha.* A *Parajita* ou *Pára Pinta é uma figura que representa uma ave* e faz parte da cultura popular espanhola desde o século XVII.

Um grande impulsionador desta arte, em Espanha, nos finais do século XIX, foi Miguel Unamuno. Quando visitou a *Exposição Universal de Paris*, em 1889, ficou maravilhado com uma exposição de Origami Japonês.

Em Itália, Leonardo Da Vinci publicou no seu *Codex Atlanticus*, exercícios geométricos com dobragens e um estudo sobre o movimento de aviões de papel. (Engel, 1994).

Na Alemanha, Friedrich Froebel, fundador do *Movimento Kindergarten*, introduziu as dobragens de papel nas actividades pré-escolares.

Por volta de 1950, o japonês Akira Yoshizawa, considerado o *pai do Origami moderno* introduz uma alteração radical na técnica do Origami. Yoshizawa com a colaboração do americano Sam Randlett criou uma simbologia (*Sistema Yoshizawa – Randlett*, 1956), de instrucções para dobrar os modelos que, a par com as bases, constituem a *linguagem do Origami*. Desde a invenção do papel este sistema é a contribuição mais importante para a técnica da dobragem de papel, uma vez que permite a difusão internacional dos vários modelos. Não é necessário saber idiomas como japonês, inglês, espanhol, ou alemão para saber construir um modelo, basta saber interpretar um diagrama conhecendo a simbologia que, fundamentalmente, assenta em duas dobras a *dobra em vale* e a *dobra em montanha.*

Para Yoshizawa o Origami era uma filosofia de vida. No local onde viveu criou inúmeras figuras, destacando-se um cisne, uma rosa e a reprodução da sua cara. Estes modelos são objectos de uma invulgar beleza.

Nas últimas décadas, com a ajuda das ferramentas informáticas, o aparecimento de sites e de foruns, a publicação de livros e os encontros internacionais contribuiram para uma grande expansão do Origami. Pessoas de todo o mundo dedicam-se cada vez mais ao desenvolvimento de figuras cada vez mais complexas, e ao estudo matemático das várias dobras. Segundo Lang, na década de 80 podiam considerar-se duas correntes no Origami moderno, a japonesa, desenvolvida por artistas e a, mais ocidental, desenvolvida por matemáticos, engenheiros, físicos e arquitectos.

Actualmente esta distinção não é adequada visto que tanto no ocidente como no oriente o Origami é estudado por cientistas e artistas. Uns preocupam-se mais com os processos matemáticos — Toshikuyi Meguro, Jun Maekawa, Issey Yoshin, Tomoko Fuse, Toshikazu Kawasaki, Thomas Hull, Jonh Montroll, Robert Lang, Eric Gjerde —, outros com a textura do papel e a leveza dos modelos — Michael Lafosse, David Derudas, David Brill, e Eric Joisel —, este último recentemente desaparecido.

Nos últimos tempos, *Pavimentações* construídas com a técnica do Origami e *Origami Modular* (*Unit Origami*) têm adquirido atingido maior relevo. A técnica modular consiste em construir vários *módulos* que se agrupam formando figuras mais ou menos complexas. É o que mais me atrai por possibilitar a construção e o estudo de poliedros. O expoente máximo desta técnica é a japonesa Tomoko Fuse que com o seu livro *Unit Origami: Multidimensional Transformations, publicado em inglês inspirou muitos origamistas no ocidente*.

Os origamistas mais tradicionais não apreciam esta forma de dobragem. Para eles um modelo deve ser dobrado a partir de uma única folha de papel, sem cortes e sem cola. Já para outros a cola e tesoura são permitidos. (Pessoalmente gosto mais do Origami que não utiliza nem cola nem tesoura, mas reconheço que os que recorrem à cola e à tesoura têm outras possibilidades e constroem modelos de grande beleza.)

Outro aspecto a considerar na história do Origami é a forma do papel utilizado nas dobragens. Durante vários anos os modelos eram construídos a partir de um quadrado de papel mas, mais recentemente, passaram a ser utilizadas outras formas e, muitos dos modelos poliédricos são construídos a partir de rectângulos semelhantes a uma folha A4, cuja razão entre o lado maior e o lado menor é 1 por raíz de dois.

(Uma construção interessante consiste precisamente em transformar um quadrado num rectângulo de lados 1 por $\sqrt{2}$ e será descrita mais à frente neste artigo.)

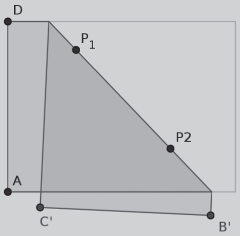
Esta pequena introdução histórica não podia terminar sem referir Humiaki Huzita.

Huzita nasceu no Japão, mas viveu grande parte da sua vida em Itália e, na década de 70 do século passado, descreveu seis operações que ficaram conhecidas por *axiomas de Huzita*. Estes axiomas (que na realidade são operações) descrevem operações básicas que se podem efectuar em Origami e permitem caracterizar formalmente o tipo de construções geométricas que é possível fazer com Origami. Em 2001 Koshiro Hatori acrescentou à lista um sétimo axioma (obtendo-se a lista de axiomas de Huzita-Hatori) e, em 2003, Robert Lang publicou um estudo onde estabelece que, se identificarmos a expressão informal «construção em Origami» com uma certa caracterização formal desta noção então, aqueles sete axiomas que, como se disse, descrevem outras tantas operações básicas, são suficientes para obter todas as construções em Origami (ver caixa abaixo).

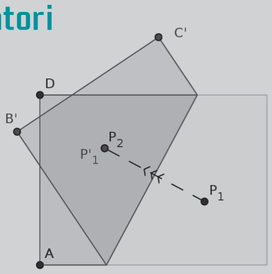
Informação detalhada acerca destes axiomas e a demonstração da sua completude pode ser obtida em: http://www.langorigami.com/science/hha/origami_constructions.pdf.

Na teoria matemática das construções geométricas com dobragens de papel os sete axiomas de Huzita-Hatori chegam para definir o que é possível construir com dobragens simples. (Admitindo dobragens simultâneas já vamos além do que é descrito pelos axiomas de Huzita-Hatori, passando por exemplo, a ser possível dividir um ângulo genérico em cinco partes iguais ou a construir o polígono regular de onze lados, algo que não é possível recorrendo apenas a dobras simples.)

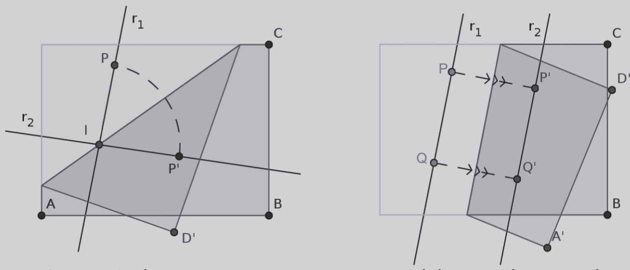
Axiomas de Huzita-Hatori



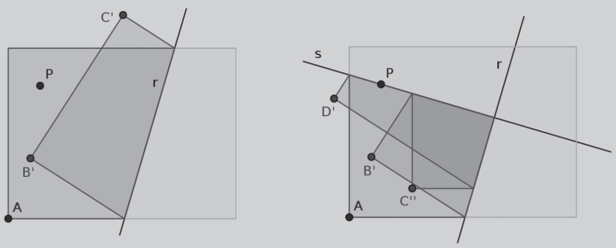
Ax 1.—Dados dois pontos distintos P_1 e P_2, existe apenas uma dobra que passa por eles.



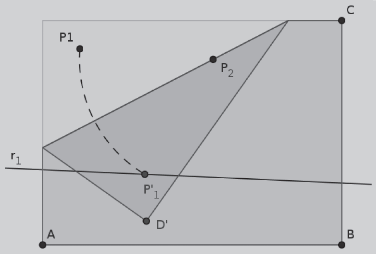
Ax 2.—Dados dois pontos distintos P_1 e P_2, existe apenas uma dobra que faz coincidir P_1 com P_2



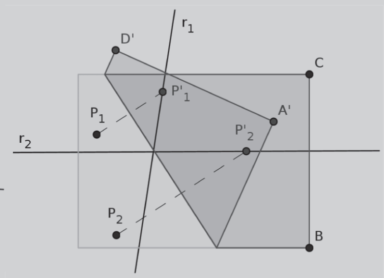
Ax 3.—Dadas as rectas r_1 e r_2, existe uma dobra que faz coincidir r_1 com r_2.



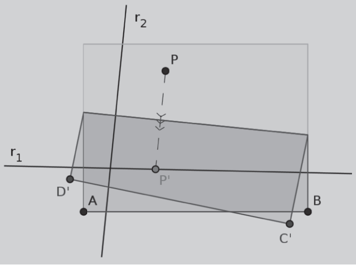
Ax 4..—Dados um ponto P e uma reta r, existe uma única dobra que é perpendicular a r e que passa por P.



Ax 5.—Dados dois pontos P_1 e P_2 e uma reta r_1, se a distância de P_1 a P_2 for superior ou igual à distância de P_2 a r_1 então,existe uma dobra que faz incidir P_1 em r_1 e que passa por P_2.



Ax 6.—Dados dois pontos P_1 e P_2 e duas retas r_1 e r_2, se as rectas não forem paralelas e a respectiva distância não for superior à distância entre os pontos então, existe uma dobra que faz incidir P_1 sobre r_1 e P_2 sobre r_2.



Ax 7.—Dados um ponto P e duas retas r_1 e r_2, se as rectas não forem paralelas então, existe uma dobra que faz incidir P_1 em r_1 e é perpendicular a r_2.

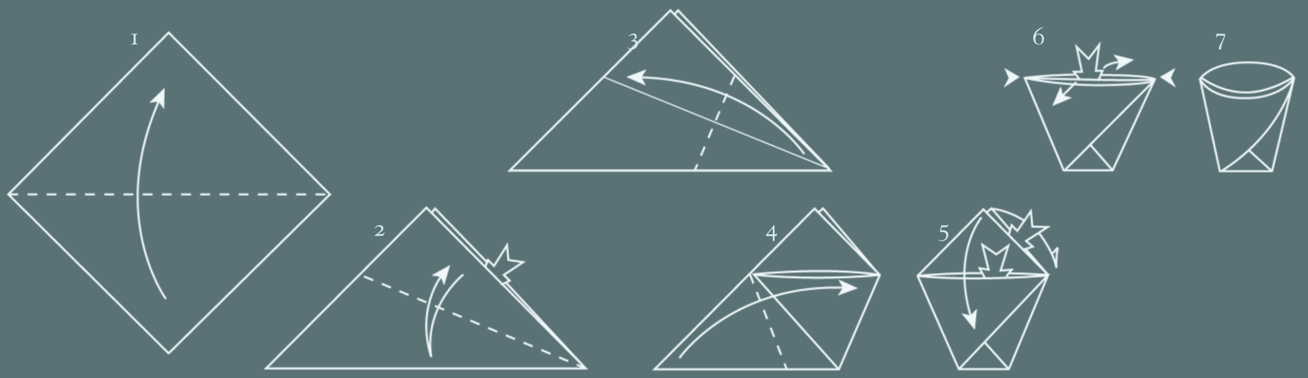


Figura 4. Instruções para dobrar um copo

Estudando o vasto mundo do origami podemos verificar que os seus modelos podem, por um lado, ser alvo de estudo matemático e, por outro, permitem não apenas fazer construções geométricas mas também estabelecer resultados. Precisamente, veremos de seguida alguns exemplos em que os caminhos da Matemática e do Origami se entrecruzam.

O copo—equivalência de áreas por dissecção

Um dos modelos que eu gosto de dobrar e apresentar aos meus alunos e colegas é um Origami tradicional—o *copo*. Trata-se de um modelo considerado simples (na Figura 4, está a sequência de instrucções que permite obter o modelo final, a partir de um quadrado de papel). A primeira vez que pedi aos alunos para o dobrarem desafiei-os a beber água por ele e a averiguar quantas vezes o conseguiam fazer sem que o copo se rompesse. Ficaram admirados e a primeira reacção foi a de que isso não era possível. Pensavam que assim que a água entrasse no copo ele ir-se-ia romper. Experimentaram durante o intervalo e ficaram surpreendidos com o facto de conseguiram beber água algumas vezes, sem que o copo rebentasse. Experimentaram diferentes tipos de papel, informando-me dos sucessivos recordes que iam sendo batidos e quais os tipos de papel mais resistentes. (Muitas soluções de engenharia em áreas como a aero-espacial, por exemplo, recorrem a diversas soluções baseadas nas construções que envolvem as técnicas de Origami.)

Mas, evidentemente, não é este o repto que mais interessa do ponto de vista da aula de Matemática. Neste contexto costumo pedir-lhes que desdobrem o copo e verifiquem algumas igualdades de áreas de triângulos. Mais precisamente, e considerando a Figura 5, peço-lhes que verifiquem que a área A é igual à área B e que a área C é igual a duas vezes a área A.

Inicialmente, esta verificação parece um pouco difícil, mas rapidamente pegam numa tesoura e decompõem a área A de modo a rearrajar as «peças» e obterem precisamente a área B. (Ver a Figura 6 , onde se ilustra esta operação de decomposição, necessária à comparação de áreas.) O mesmo para a área C e para a área A, deixando-se a verificação ao cuidado do leitor.

O teorema de Haga

Várias actividades envolvendo Origami e com conteúdo matemático interessante têm origem no seguinte facto.

Teorema de Haga.—Considere um quadrado $ABCD$ (ver figura 7). No lado AB faça uma marca (ponto P, na figura). Leve o vértice C de modo que coincida com a marca que acabou de fazer. Os triângulos AFC, BCE e DFG são semelhantes (figura 7 (C)).

Para estabelecer este facto, observe-se que os triâgulos AFC, BCE e DFG são todos rectângulos. Considerando a notação da figura 7 (C) resulta que $\alpha + \gamma = 90°$. Da figura também resulta que $\alpha + \beta = 90°$. Resultando destas duas igualdades que $\beta = \gamma$. Assim, os triângulos BCE e AFC, porque têm dois ângulos da mesma amplitude (e, portanto, três ângulos, dois-a-dois com a mesma amplitude) são *semelhantes*. Para estabelecer a semelhança entre os triângulos AFC e DFG basta constatar que os ângulos θ e y são iguais (por serem *verticalmente opostos*). Assim, mais uma vez, estes triângulos têm ângulos dois-a-dois com a mesma amplitude e são, por isso, semelhantes.

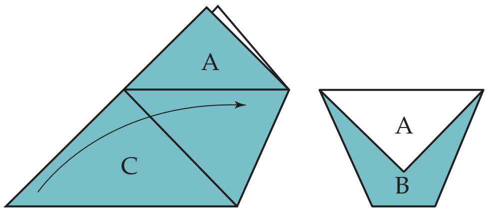


Figura 5

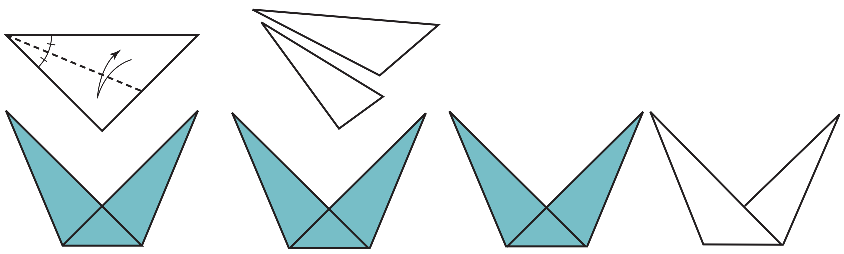


Figura 6

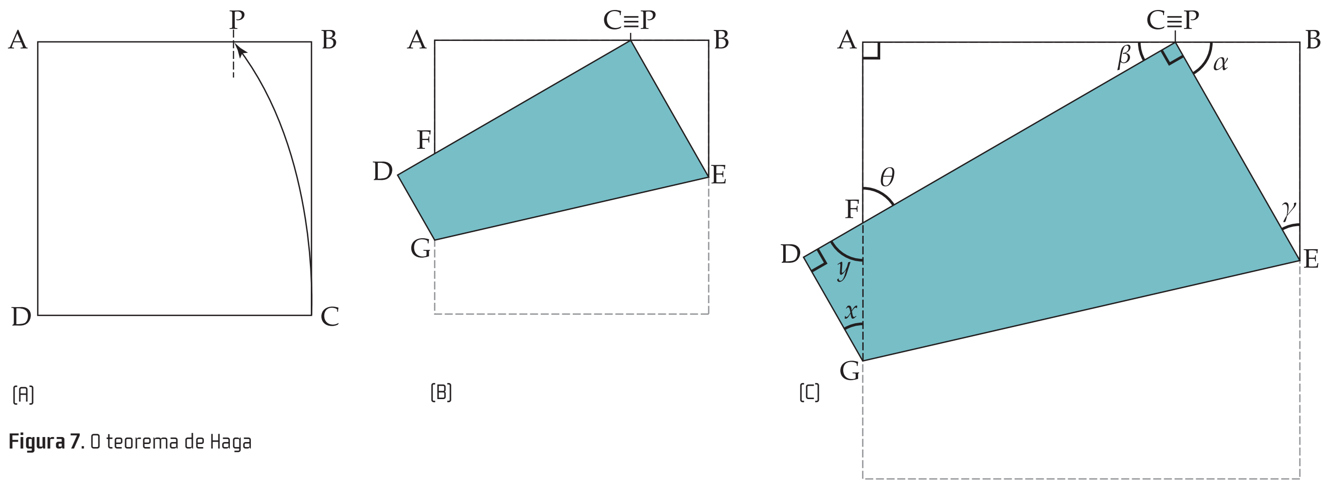


Figura 7. O teorema de Haga

Divisão do lado do quadrado em 3 partes iguais

Dividir o lado do quadrado em duas, quatro ou oito partes iguais é fácil (de um modo geral é fácil fazê-lo em 2^n partes iguais). Os outros casos são menos óbvios. A construção que se propõe a seguir, permite dividir o lado de um quadrado em três partes iguais. Considerando um quadrado *ABCD*, cujo lado tomamos como unidade, começamos por marcar a mediatriz do lado *AB*, fazendo coincidir o lado *BC* com o lado *AD*. Posto isto, levamos o vértice *C* ao ponto médio do lado *AB* (veja-se a Figura 8). Pelo teorema de Pitágoras temos que

$$b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a^2.$$

Como o lado do quadrado mede uma unidade, temos que $b = 1 - a$ pelo que, substituindo na igualdade anterior se obtém:

$$(1-a)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a^2.$$

Resolvendo em ordem a a, obtém-se $a = 3/8$ (consequentemente $b = 5/8$). Pelo Teorema de Haga os triângulos *CBE* e *ACF* são semelhantes sendo, os respectivos lados proporcionais. Assim,

$$a : \frac{1}{2} = \frac{1}{2} : c.$$

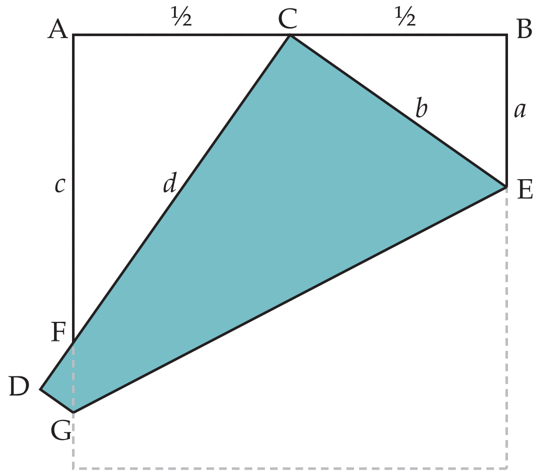


Figura 8. Divisão do lado do quadrado em três partes iguais

Ou seja, $ac = 1/4$. Como $a = 3/8$ tem-se que $c = 2/3$ pelo que, a restante parte do lado do quadrado mede precisamente $1/3$.

Como se verifica, esta simples construção envolve, do ponto de vista matemático vários conceitos importante como o teorema de Pitágoras e a semelhança de triângulos. Uma versão mais sofisticada desta construção (ainda usando o Teorema de Haga) permite obter uma divisão num qualquer número de partes iguais. (Assim, usando este teorema podemos descrever todos os comprimentos racionais.)

Mas as possibilidades do Origami vão além dos números racionais. Tal como prometido no início, apresento agora a construção de um rectângulo cuja proporção entre os lados é de $1 : \sqrt{2}$. A Figura 9 descreve os passos necessários. Tomando o comprimento de *AB* como unidade uma vez que os ângulos no triângulo *ABC* são ou de 45° ou de 90° conclui-se *AC* é a diagonal de um quadrado unitário, pelo que o seu comprimento é $\sqrt{2}$. Mas, o comprimento de *AC* é também o comprimento do outro lado do rectângulo (*BD*). (Se não conseguir ver imediatamente porquê, pense como um origamista, e veja que desdobrando a folha de papel, trazendo o ponto *C* à sua posição origial, *AC* se transforma num lado do rectângulo.)

Conclusão

Ao longo das muitas sessões em que utilizei o Origami, dentro ou fora da sala de aula, pude concluir que o Origami melhora significativamente a comunicação matemática. Essa melhoria nota-se bastante nos alunos dos primeiros anos de escolaridade. Termos como «vértice», «bissectriz», «mediatriz», «diagonal», «reflexão», «simetria», são adquiridos com a prática das dobragens de uma forma natural e rapidamente fazerem parte do vocabulário dos alunos porque se tornam indispensáveis para a comunicação entre eles.

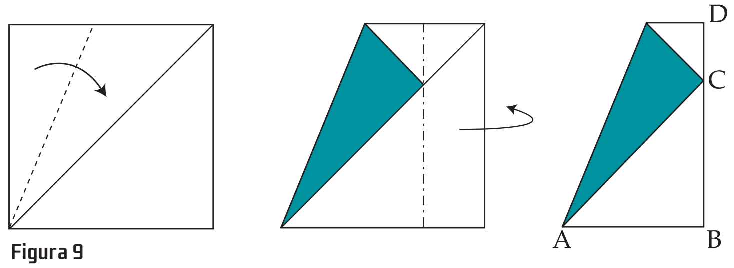


Figura 9

Uma das histórias que mais me comove é a historia da Sadako Sasaki, uma menina japonesa que tinha dois anos no dia da explosão da bomba atómica em Hiroxima. Começou a sentir os efeitos da bomba atómica aos 12 anos, sendo-lhe diagnosticada leucemia.

Quando Sadako estava no hospital, uma amiga levou-lhe alguns papéis coloridos e dobrou um pássaro (Tsuru). Disse-lhe que esse pássaro é sagrado no Japão, que vive mil anos e tem o poder de conceder desejos. Disse-lhe ainda que, se uma pessoa dobrar 1000 Tsurus e fizer o seu pedido a cada um deles, esse pedido será atendido. Sadako começou então a dobrar Tsurus e a pedir para se curar porém, a sua doença agravava-se a cada dia.

A menina começou então a pedir pela Paz Mundial. Até à data em que morreu— 25 de Outubro de 1955—, Sadako dobrou uma grande quantidade de Tsurus, insuficiente porém para perfazer os mil. Os seus amigos dobraram os restantes a tempo do seu funeral.

Mas eles queriam mais, desejavam pedir por todas as crianças que estavam a morrer em consequência da explosão da bomba. Formaram um clube e começaram a angariar dinheiro para um monumento. As contribuições chegaram através de estudantes de mais de 3000 escolas do Japão e de 9 outros países. Em 5 de Maio de1958 inauguraram o Monumento à Paz, no Parque da Paz de Hiroshima. Todos os anos no Dia da Paz—6 de Agosto—, são enviados Tsurus de papel, provenientes de todo o mundo, para o parque.

Os membros do clube desejam espalhar pelo mundo a mensagem esculpida na base do monumento de Sadako:

Este é o nosso Grito
Esta é a nossa Oração:
Paz no Mundo

A melhoria da capacidade de concentração, da visualização espacial, da motricidade fina, da partilha, da inter-ajuda e da coordenação motora, entre outros aspectos, são benefícios associados a esta prática.

A dobragem de papel é uma actividade que é simultaneamente recreativa e educacional. Recorrendo a materiais simples, como papel A4, papel de revista ou de jornal, papel de embrulho, papel de lustro, podemos, de uma forma divertida, aprender Matemática.

Dobrando e desdobrando podemos observar, por meio dos vincos formados, rectas, ângulos, simetrias e figuras geométricas. Podemos reconhecer e analisar propriedades dessas figuras, utilizar a visualização e o raciocínio espacial e explorar os conceitos de tamanho, forma e medida, incentivar a escrita e a comunicação matemática e motivar os praticantes para a disciplina.

As dobragens praticadas em grupo permitem o debate de ideias, o esclarecimento de conceitos e o desenvolvimento de estratégias, da criatividade, da concentração e persistência, tudo capacidades fundamentais para se ser matematicamente competente.

Bibliografia

Livros consultados

Engel, Peter; *Origami From Angelfish to Zen*, (1994), Dover Publications, Inc., New York

Haga, Kazuo; *Origamics, Mathematical Exploration through Paper Folding*, (2008), World Scientific , New Jersey

Kanegae, Marl; (org.); *A Arte dos Mestres de Origami*, (1997), Aliança Cultural Brasil Japão, São Paulo

Kasahara, Kunihiko; *The Art and Wonder of Origami*, (2004), Apple Press

Lang, Robert, J.; *Origami Desingn Secrets, Mathematical Methods for an Ancient Art*, (2003) A K Peters, Ltd.

Mitchel, David; *Origami Matemáticos*, (2008), Editora Replicação, Lisboa

Monteiro, L.; *Fundamentos Matemáticos do Origami*, Associação Ludus, Lisboa, 2008

Prieto; Jose, I. Royo, Matemáticas y Papiroflexia, (2002), *Revista Sigma*, 21, pp. 175–192.

Row, T. Sundara; *Geometric Exercises in Paper Folding*, (1917) The Open Court Publishing Company, Chicago

Vicente Palacios *Papiroflexia Colleción*, (2002) Editorial Miguel Salvatella, S.A., Barcelona

Sites

http://personales.com/espana/madrid/papiroflexia/papiroflexia_historia.html#top (Acedido em 22/06/2011)

http://ipst.gatech.edu/amp/collection/museum_invention_paper.htm (Acedido em 8/07/2011)

http://erikdemaine.org/thok/amletter.html (Acedido em 11/07/2011)

Ilda Rafael

Escola Secundária Braamcamp Freire

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

A tarefa aqui apresentada foi adaptada do livro *Unfolding Mathematics with Unit Origami** e incide sobre a construção de um modelo para medir ângulos recorrendo à técnica do Origami e respectiva exploração. O autor do modelo é do japonês Kunihiko Kasahara que com apenas quatro dobras construiu um modelo que permite substituir o transferidor.

Numa fase inicial, os alunos constroem um medidor de ângulos. De seguida exploram algumas propriedades matemáticas subjacentes. No final da tarefa utilizam o modelo construído para medir os ângulos de alguns polígonos. Nesta mesma revista, no artigo «Origami» são apresentadas outras construções que podem ser exploradas em sala de aula.

* Franco, B.; Unfolding Mathematics with *Unit Origami*, *Key Curriculum Press*, 1999

Anabela Gaio, Idália Pesquita e Ilda Rafael