À descoberta da geometria do tangram com o GSP

Eduarda Moura

Micromundos

A noção de micro-mundo é uma das mais significativas para a educação da matemática. Numa perspectiva realista um micro-mundo é um domínio limitado e coerente de objectos e actividades implementadas na forma de um programa de computador e que correspondem a uma parte interessante do mundo real (Hoyles, 1993, p. 1). Por exemplo, qualquer programa em que uma criança com acções sobre objectos pode investigar a acção da gravidade. Através da ideia de micro-mundo as crianças podem ter acesso a ideias profundas e estas ideias aparecem naturalmente da interpretação guiada de fenómenos que surgem simulados através de um programa.

Seymour Papert, um matemático e cientista do campo da inteligência artificial, fez uma pequena mudança na noção de micro-mundo que se revelou de um enorme significado para a educação da matemática. O domínio restrito que um *software* simula pode começar a fazer parte de um domínio de conhecimento e logo ter significado epistemológico. A partir desta modificação e nela construída estava a ideia de planear domínios de acção com objectos que levassem em conta os conceitos matemáticos e as maneiras das crianças os construírem (Hoyles, 1993, p. 2). Uma ideia que tem origem na perspectiva construtivista da inteligência de Jean Piaget. Assim, o micro-mundo é uma forma de proporcionar concretizações às crianças que poderão permitir que façam diferentes tipos de abstracção. Toda a actividade que possa levar à abstracção é indispensável para a aprendizagem da matemática.

Muitos ambientes computacionais para a aprendizagem da geometria foram desenvolvidos, de que são só exemplo, o *SuperLogo* (NIED/UNICAMP, 2000), o *Geometer's Sketchpad* (Jackiw, 1995) e o *Cabri-Géomètre* (Laborde, Bellernain, &

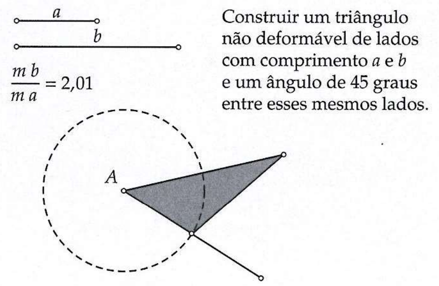


Figura 1

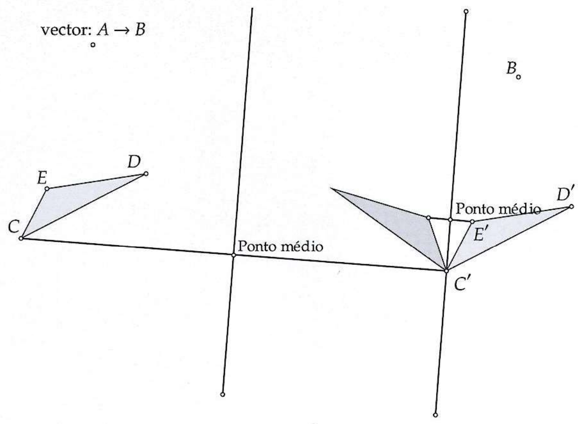


Figura 2

Baulac, 1983). Em todos estes programas a mesma ideia é concretizada: um conjunto fundamental de objectos e de acções permite às crianças desenvolver um domínio complexo de acções que poderão transformar-se em esquemas conceptuais e operações mentais matemáticas. Outros programas, começam a incluir no seu desenho operações sobre os objectos, compatíveis com as formas como as crianças aprendem conceitos matemáticos. TIMA:Sticks (Olive & Steffe, 1994), por exemplo, desenhado em simultâneo com uma experiência de ensino sobre fracções (Olive, 2000), torna disponível acções e operações que podem concretizar possíveis caminhos conceptuais na construção de fracções como números e a partir de um modelo geométrico. O programa pode então tornar-se num programa pedagogicamente e metodologicamente adequado para a aprendizagem de frações e correspondentes operações que permitem ao aluno construí-las como objetos matemáticos

No *Geometer's Sketchpad*, o conjunto elementar de objectos são o ponto, a linha, o segmento de recta, o raio e o círculo. As acções elementares possíveis que podem interessar ao ensino da geometria no 5.° e 6.° anos incluem a construção geométrica da régua e do compasso, transformações isométricas, homotetias, medição e animações no que diz respeito a acções que podem ser utilizadas directamente pelas crianças. Um leque muito extenso de acções e construção de macros que o professor pode construir para o planeamento de experiências de aprendizagem para os seus alunos é outra forma de utilização deste *software* didáctico.

Parte I: Problemas geométricos para professores

Começamos por apresentar um conjunto de problemas que pensamos ser motivadores para o professor explorar o GSP. Estes problemas foram inspirados na investigação matemática sobre isometrias proposta em Veloso (1998, p. 68). A ideia por detrás dos problemas de construção que apresentamos foi a de que o professor poderá pôr em acção os seus conhecimentos de geometria para aprender a explorar o programa. Por sua vez, o programa vai de encontro a esse conhecimento realizando naturalmente o que o professor quer fazer quando pensa numa certa construção. Além disso, é possível variar comprimentos e amplitudes em construções feitas permitindo que o professor pense matematicamente a partir de construções que faz.

Problema 1. *Construir um triângulo de tal forma que se seleccionar um qualquer lado, ou um qualquer vértice, e o triângulo for arrastado não se deforma.*

Note-se que no fim da construção se um qualquer ponto ou um qualquer lado for selecionado com a seta é possível arrastar o triângulo na folha de desenho sem que este se deforme, ou seja a sua métrica não se altera. O problema pode ser resolvido usando qualquer um dos teoremas que permitem estabelecer quando dois triângulos são geometricamente iguais. Por exemplo, dados dois lados e o ângulo por eles formado é possível construir o triângulo começando num vértice (figura 1).

Problema 2. *Desenhe um triângulo não deformável CDE e defina através de dois pontos diferentes, A e B um vector. Faça uma translação do triângulo com o vector que escolheu. Pense como pode fazer coincidir o triângulo inicial com o triângulo imagem usando só reflexões.*

Para descobrir qual é a imagem do triângulo *CDE* basta variar o vector *AB*. Para começar a exploração pode desenhar uma recta livre, defini-la como eixo de reflexão, e reflectir o triângulo *CDE*. Depois pode variar a posição e inclinação da recta com a seta e observar a imagem do triângulo.

A construção está representada na Figura 2 e a construção final deverá ser tal que os elementos que definem o triângulo *CDE* podem ser arrastados sem que a construção se desfaça.

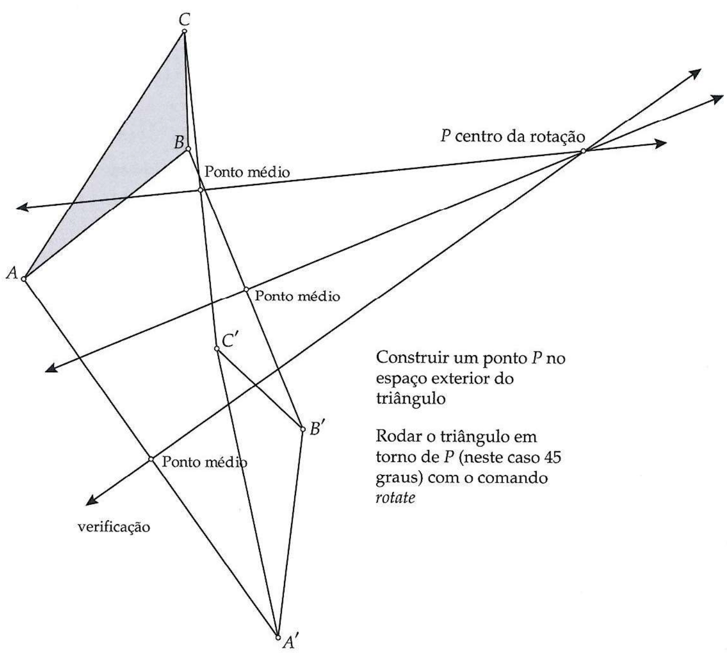


Figura 3

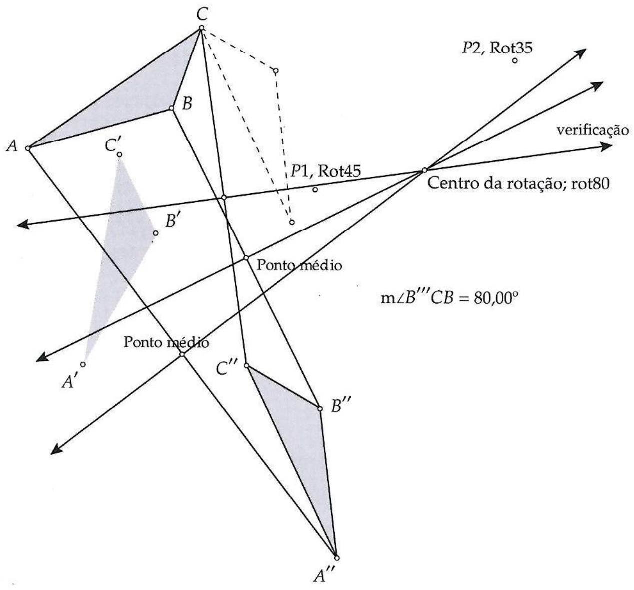


Figura 4

Problema 3. *Construa um triângulo não deformável ABC. Depois de construir um ponto P no espaço exterior do triângulo rode o triângulo 45 graus. Como pode fazer coincidir o triângulo inicial com o transformado usando só reflexões?*

Para começar a explorar este problema pode seguir a estratégia de desenhar duas rectas livres, construindo dois eixos de reflexão. Depois pode construir duas imagens do triângulo, a imagem por rotação e a imagem pelas duas reflexões. Quando as rectas espelho são transladadas ou rodadas haverá alguma posição que leva a que as imagens do triângulo coincidam? Estude depois a localização das rectas em relação ao centro de rotação para fazer a construção das rectas espelhos a partir do triângulo inicial e da sua imagem pela rotação. A construção representada na Figura 3 deverá ser tal que arrastando qualquer elemento do triângulo inicial a construção não se desfaz.

Problema 4. *Construa um triângulo não deformável ABC e construa dois pontos diferentes P1 e P2 no espaço exterior ao triângulo ABC. Rode o triângulo 45 graus em torno de P1 e depois rode a imagem 35 graus em torno de P2. Como pode fazer coincidir o triângulo inicial com o último triângulo obtido através de uma só rotação? É sempre possível fazê-lo? Experimente mudar a posição relativa dos pontos P1 e P2 e observe o que acontece à construção.*

Para descobrir o ângulo da rotação composta, α, pode transladar o triângulo imagem, $A''B''C''$, através do vector $C'' \rightarrow C$ para o comparar com o triângulo objecto da translação. Depois construa um ponto livre e rode o triângulo dado de um ângulo α, para investigar sobre o centro da rotação. Construa então o centro de rotação a partir dos triângulos inicial ABC e imagem final $A''B''C''$ (figura 4).

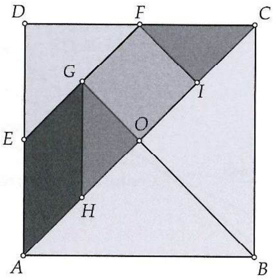
Note que os ângulos de rotação não podem ser simétricos. A construção para ângulos não simétricos está representada na Figura 4. Novamente se qualquer um dos elementos do triângulo for deslizado a construção não deverá se deformar.

Parte II: A construção de um tangram com alunos do 5° ano

O GSP permite que as crianças tenham acesso à manipulação dos desenhos geométricos que fazem. Estas construções que as crianças fazem, e podem agir sobre e com, proporcionam o estudo de invariantes geométricos. Segundo Balacheff e Kaput (1996) este desenho de *software* geométrico permite que a conceptualização em geometria que as crianças poderão fazer se torne no estudo dos invariantes das construções que as próprias crianças fazem (p. 475). Por exemplo, construir duas circunferências e poder manipulá-las relativamente à sua posição relativa, ou relativamente ao tamanho do raio pode levar as crianças a uma conceptualização da circunferência mais elaborada que linha curva fechada que podem distinguir através do seu raio. Manipular as circunferências relativamente à sua posição relativa e modificar o seu raio são acções que variam a situação estática da construção inicial e cujo resultado pode ser visualizado levando à descoberta por parte da criança das possibilidades para as maneiras como duas circunferências se podem intersectar. Para mais detalhe sobre a elaboração das construções geométricas que este *software* facilita aos alunos o leitor pode consultar Laborde (2006) e, em particular, os estudos citados sobre as utilizações que os alunos fazem do *software* bem como as classificações feitas das construções dos alunos. Num dos trabalhos citados é feita a diferenciação entre construções sem demonstração de invariantes e construções robustas em que a construção demonstra alguma invariabilidade, ambas feitas por crianças. O estudo destas construções revela como as crianças interpretam situações geométricas e como pode o professor dar seguimento a essas construções na sala de aula para que sejam os alunos a estabelecer relações geométricas invariantes.

A tarefa aqui proposta é uma entre muitos dos exemplos que poderiam ser aqui explorados para ilustrar como as crianças podem iniciar construções geométricas no GSP. Descrevemos

Tangram projectado na tela



Possíveis observações da turma a partir da dobragem

— *ABCD* é um quadrado

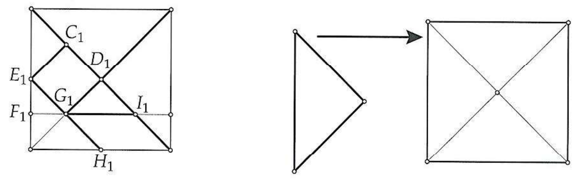
— *O* é o centro do quadrado

— As diagonais intersectam-se no ponto médio *O*

— Os triângulos *ABO* e *BCO* são congruentes

— Os triângulos *GHO* e *CFI* são congruentes

Figura 5



a) b)

Figura 6

de seguida alguns dos passos que podem servir para orientar a construção de um tangram no GSP começando com uma dobragem em papel.

As tarefas de dobragens em papel podem ser utilizadas na unidade de geometria em tarefas desenhadas para descobrir a geometria de algo que as crianças já conhecem parcialmente, por exemplo, os polígonos, ao mesmo tempo que os conceitos geométricos podem ser definidos a partir das suas descobertas. Assim, propomos que a dobragem do tangram seja feita antes da construção no GSP para as crianças terem a oportunidade de interpretarem o que fizeram na dobragem para descobrir a geometria do tangram.

A figura de um tangram é projectada e é proposto às crianças que a partir de uma folha de papel quadrada dobrem um tangram, desenhando depois as linhas que se formam pela dobragem. Uma discussão da dobragem é feita pelas crianças em conjunto e o professor pode escrever no ficheiro GSP as conclusões a que as crianças chegam, sendo estas conclusões escritas no computador e projectadas em simultâneo (figura 5).

Sugerimos que as crianças construam intuitivamente o tangram no GSP antes de resolverem o problema da construção do tangram com restrições. Exemplos das restrições que podem ser impostas são as seguintes:

- A partir da construção de um quadrado, dado um lado, a partir de perpendicularidade e paralelismo e, transferência de segmentos com circunferências;
- A construção das peças do tangram a partir de um quadrado através dos pontos médios de linhas traçadas no interior do quadrado dado;
- A construção do quadrado maior a partir de um segmento e utilizando transformações isométricas.

O problema da construção no GSP pode ser orientado de forma a proporcionar oportunidades para a crianças descobrirem propriedades geométricas dos elementos que constituem o tangram, como por exemplo, propriedades do quadrado que vão além de «polígono com os lados todos iguais» e permitem que as crianças foquem a sua atenção, por exemplo, nas medidas dos ângulos do quadrado, como esses ângulos podem ser construídos, como podem transferir segmentos de um local da folha do caderno GSP para outro local predeterminado e porquê.

Discutir a dobragem do tangram antes de as crianças o construírem no GSP contribui para que as crianças depois de desenhar um quadrado no GSP localizem os pontos e as linhas que constituem o tangram e façam uma primeira construção do tangram. Esta construção intuitiva pode ser deformável e a localização dos pontos é feita por aproximação.

Em relação à construção com restrições, ter discutido a dobragem vai também permitir que as crianças relacionem as dobragens com a geometria do tangram. Por exemplo:

- ao dobrar o quadrado por uma das suas diagonais obtemos dois triângulos congruentes;
- ao dobrar o quadrado pelas duas diagonais formam-se quatro triângulos congruentes;
- as diagonais intersectam-se no centro do quadrado;
- ao dobrar ao meio um vinco o resultado é um ponto médio, por exemplo, na figura 6a) todos os pontos que estão marcados nas linhas que os vincos formam são resultado de dobragens ao meio.

Assim, a conclusão de que quando um vinco é dobrado ao meio se obtém o ponto médio do segmento que o vinco define é uma conclusão a que as crianças podem chegar a partir das suas próprias acções. Sem uma discussão explícita das dobragens com a turma o professor não pode tomar como garantido que todas as crianças entenderam a geometria do tangram. Por exemplo, as crianças podem não concluir que a dobragem de um quadrado de papel em quatro partes iguais, como representado na figura 6b), origina quatro triângulos congruentes mesmo sendo aparente que os quatro triângulos se sobrepõem.

É crucial deixar que as crianças façam as dobragens e observem os resultados dos vincos que fazem. É normal que quando têm a intenção de fazer um determinado vinco tentem localizá-lo colocando a beira do papel — na figura 7, *AB* no sítio em que querem que o vinco apareça, opostamente a imaginarem a linha do vinco intencionado e vincarem essa linha. No caso da figura 7 o vinco aparece num lugar diferente do que tinha sido intencionado pela criança e é necessário que a criança entenda a inviabilidade do seu método.

Tal entendimento só é possível se as crianças passarem tempo a descobrir como uma dada dobragem dá origem a um vinco, imaginando o vinco, e planeando a dobragem para que o vinco se possa formar.

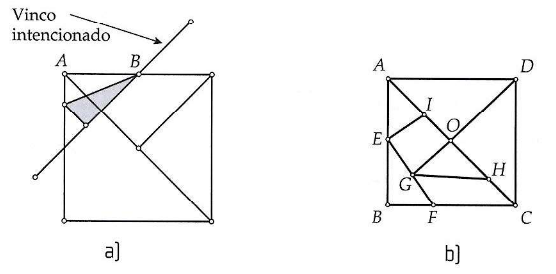


Figura 7

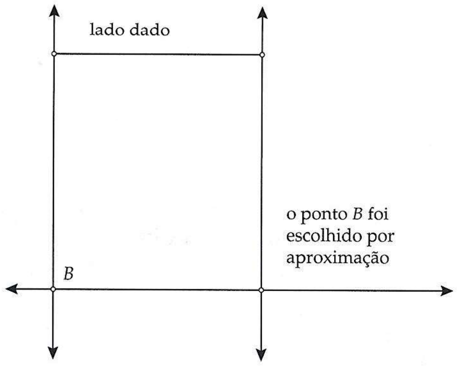


Figura 8

As construções intuitivas usam a simetria das linhas horizontais e verticais que o ecrã facilita. Que os lados são iguais pode não ser uma preocupação da criança quando em actividade de construção livre, embora a criança possa localizar os pontos e linhas que definem o tangram de imediato; a dobragem do tangram como já referido pode contribuir para que as crianças localizem as linhas e os pontos no quadrado resultando uma construção similar à da figura 7b).

O uso do comando *measure* para construir os lados do quadrado iguais pode ser difícil de usar. No entanto, as crianças podem aprender a coordenar a direcção que precisam de tomar para coordenar o resultado de medir o comprimento do segmento, ou a medida da amplitude do ângulo, com o respectivo comprimento ou amplitude geométricas, as quais podem fazer variar deslizando as extremidades do segmento ou os lados dos ângulos.

A partir de uma construção intuitiva o professor pode começar por exigir rigor até que uma construção exacta seja construída como por exemplo a da figura 7a). A partir da dobragem que as crianças fizeram o professor pode problematizar a construção no GSP de tal forma a que um quadrado e triângulos isósceles se formem. Questões como as seguintes podem ser levantadas: na dobragem que fizeste como aparece o ponto *I*? Em que sítio está localizado I no segmento *AO*? Compara a distância entre *A* e *O* com a distância entre *I* e *O*.

As crianças do 5.° ano podem não entender a questão *Constrói um quadrado com lado AB (sendo desenhado o lado AB)*. No entanto, para as crianças do 6° ano a questão já poderá ser entendida se trabalharam relações entre rectas no 5.° ano. A proposta é um problema de geometria porque apesar de o professor poder esperar que tenham aprendido durante o 1.° Ciclo que os ângulos do quadrado medem 90 graus, as crianças não sabem necessariamente como construir ângulos de 90 graus. Construir rectas perpendiculares que passam pelos extremos do segmento dado pode ser uma estratégia e pode levar a criança a confrontar-se com outro problema: como marcar a medida dos outros dois lados do quadrado nas rectas perpendiculares?

Marcar o ponto *B* como na figura 8 escolhendo a sua localização através de uma estimativa visual é uma das estratégias das crianças. O professor pode sugerir às crianças que pensem como fazem para marcar o comprimento de um dado segmento numa linha, ou qual é o instrumento que usam quando desenham um dado segmento de um local para outro local. Novamente estamos a propor um problema geométrico em que as propriedades da circunferência são as que vão garantir que o segmento transferido é geometricamente igual ao dado. O professor não pode esperar que este problema seja interpretado pela criança como um simples problema de aplicação das propriedades da circunferência. Mesmo depois de sugerido o uso da circunferência, a criança precisa de pensar porque é que resultará usá-la para transferir segmentos e como está relacionado com o que é uma circunferência.

A construção do quadrado poderá ser feita no GSP através de quatro rotações sucessivas ou, através da rotação de um ponto construído numa circunferência os vértices podem ser construídos. As rotações eram introduzidas informalmente no 1.° Ciclo no contexto do desenho de rosáceas e frisos (ME, 2004, p. 182) e «construir frisos e identificar simetrias» é também um dos objectivos específicos do novo programa de matemática do Ensino Básico (Ponte e outros, 2008) bem como a reflexão e rotação fazem agora parte do programa do 2.° Ciclo. Se o professor optar por deixar as crianças fazer uso destas transformações não deve deixar de problematizar depois as acções de rotação usadas para construir o quadrado em termos de perpendicularidade entre os lados do quadrado. Em geometria a perpendicularidade dá origem a ângulos rectos.

Comentário Final

Nos níveis pré-escolar a 6.° ano a utilização de *software* para o ensino da Matemática não é de forma alguma generalizado. Nenhuma das escolas do 2.° Ciclo em que a formação decorreu salas de aula de matemática com um computador por cada duas crianças para tarefas com programas desenhados para o ensino da matemática não estão sempre disponíveis. Em consequência os professores têm sempre de depender da sala das TIC que precisa de ser reservada com antecedência e pode mesmo não estar disponível em ocasiões em que o professor poderia utilizar o computador para ensinar matemática nas suas aulas. Como as salas de aula não estão equipadas com vídeo-projetor o professor fica mesmo impedido de fazer uma simples demonstração, ou levantar uma questão projetando um ficheiro desenhado para o efeito com o objetivo de dar resposta a uma situação que surja na sala de aula. Deste modo há crianças que ficam isoladas de experiências de aprendizagem como as que propusemos neste artigo e que o Programa de Formação Contínua para Professores do 2.º Ciclo (Serrazina e outros, 2006) tentou concretizar na sala de aula ficando assim sujeitas ao sub-desenvolvimento que a ausência destas experiências proporciona. Também em outros países diferenças entre as escolas produzem efeitos na qualidade das aprendizagens que são acentuados pelo uso de computadores (Kilpatrik & Davis, 1993). Ou seja, escolas que não estão empenhadas em acompanhar ativamente as contribuições do progresso tecnológico para a melhoria da aprendizagem da matemática contribuem para que a qualidade das aprendizagens dos seus alunos seja significativamente menor relativamente a outras escolas em que o ensino da matemática evoluiu para metodologias que englobam *softwares* didácticos, como constitui um só exemplo o GSP.

Em todo o artigo foi utilizada a forma masculina para referir ambos os géneros. A autora agradece a todos os formandos e formandas e seus alunos e alunas que trabalharam com a autora durante todo o ano fazendo comentários pertinentes às propostas da formadora, confrontado a formadora com diversos problemas de situações de ensino e aprendizagem durante as sessões de formação em sala e em sala de aula que inspiraram a construção deste artigo. Os ficheiros GSP que deram origem às figuras na primeira parte do artigo podem ser solicitados à autora através da morada electrónica.

Referências

Balacheff, N., & Kaput, J. J. (1996). Computer based learning environments in mathematics. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 468–501). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

DEB. (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais*. Lisboa: Antunes & Amílcar, Lda.

DEB. (2004). *Organização Curricular e Programas/Ensino Básico — 1.º Ciclo*. Lisboa: Departamento da Educação Básica.

DGEB. (1991). *Programa de Matemática 2.º Ciclo do Ensino Básico: plano de organização do ensino e aprendizagem*. (Vol. II). Lisboa: Departamento da Educação Básica.

Hoyles, C. (1993). Microworlds/schoolworlds: The transformation of an innovation. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology* (pp. 1–17). Berlin: Springer-Verlag.

Jackiw, N. (1995). The geometer's sketchpad (Version 3). Berkeley: Key Curriculum Press.

Kilpatrick, J., & Davis, R. B. (1993). Computers and curriculum change in mathematics. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology* (pp. 203–221). Berlin: Sringer-Verlag.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). *Teaching and learning geometry with techology*. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), Handbook on research on the psychology of mathematics education (pp. 275–304). Rotterdam: Sense Publishers.

Laborde, J. M., Bellernain, F., & Baulac, I. (1983). Cabri Géomètre. França.

Nied/UNICAMP. (2000). SuperLogo. Brasil: UNICAMP.

Olive, J. (2000). Computer tools for interactive mathematical activity in the elementary school. *International journal of Computers for mathematical Learning*, 5, 241–262.

Olive, J., & Steffe, L. (1994). Tools for interactive mathematical activity, TIMA: Bars. Acton: William K. Bradford.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. G., & Oliveira , P. A. (2008). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. ME — Direcção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular. Available: http://www.portugal.gov.pt/Portal/PT/Governos/Governos_Constitucionais/GC17/Ministerios/ME/Comunicacao/Outros_Documentos/20080104_ME_Doc_Programa_Matematica_Basico.htm [2008, 26 de Fevereiro].

Serrazina, L., Canavarro, A., Guerreiro, A., Rocha, I., Portela, J., & Gouveia, M. J. (2006). *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 2.º Ciclo*. Available: www.min-edu.pt/np3content/?newsId=307&fileName=programa_mat_2ciclo.pdf [2007, 30 de Dezembro].

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais*. (1st ed.). (Vol. 11). Lisboa: Grafis, CRL.

Eduarda Moura
emoura@ie.uminho.pt