

## Redução ao 1.º quadrante com o Geogebra

Paulo Ferreira Correia José António Fernandes

O desenvolvimento das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) e o aprofundamento da sua utilização na sociedade têm-se repercutido na escola. No caso da disciplina de Matemática, são particularmente representativas as calculadoras científicas, mais utilizadas no ensino básico, as calculadoras gráficas, mais utilizadas no ensino secundário, os computadores, o *software* educativo e a Internet.

Com a publicação do programa ajustado de Matemática, em 1997, é dada uma grande relevância ao uso das TIC no ensino e aprendizagem da Matemática, incluindo-se mesmo um tema transversal intitulado «Tecnologia e Matemática» e instituindo-se a permissão de os alunos utilizarem calculadoras gráficas nos exames. Com a subsequente reformulação dos programas (não só de Matemática A mas também de Matemática B e de Matemática Aplicada às Ciências Sociais) verifica-se «que o número de referências à tecnologia aumenta, de forma consistente, com os novos programas que vão substituindo os anteriores, (...) salientando-se que as TIC são referidas ao nível dos objectivos, dos recursos e dos vários tópicos dos programas» (Fernandes, Alves, Viseu & Lacaz, 2006, pp. 321-322).

Em geral, encontram-se na literatura variadas razões para usar as novas tecnologias nas aulas de Matemática, salientando-se a promoção de uma aprendizagem mais profunda e significativa, o favorecimento de uma abordagem mais indutiva e experimental da matemática e o desenvolvimento de aplicações intrínsecas e extrínsecas à matemática (Fernandes & Vaz, 1998).

Com o uso das novas tecnologias, a menor ênfase no cálculo e sua simplificação liberta mais tempo para explorar actividades matemáticas mais profundas e significativas através da abordagem na sala de aula de situações extrínsecas à matemática, enfatizando múltiplas abordagens e diferentes formas de representação matemática; a rapidez com que permite gerar exemplos ou simular situações várias fornece-nos evidência para estabelecer conjecturas ou formular hipóteses, que devem ser confirmadas, sempre que possível, através de uma demonstração lógico-dedutiva, e destaca o papel distinto dos exemplos e dos contra-exemplos no estabelecimento da validade em matemática; e nas aplicações intrínsecas à matemática destacam-se as várias abordagens e as diferentes representações de um problema, enquanto nas aplicações extrínsecas à matemática se destaca a diminuição do papel do cálculo.

Também ao nível afectivo são reconhecidas vantagens no uso das novas tecnologias, designadamente calculadoras e computadores. No caso das calculadoras, são vários os estudos que fornecem evidência empírica acerca do efeito positivo da sua utilização sobre as atitudes em relação à matemática (e.g., Ellington, 2003; Fernandes, Almeida, Viseu & Rodrigues, 1999).

Em termos de recomendações do uso de tecnologia nos temas dos programas de Matemática do ensino secundário, salienta-se a questão do cálculo, a representação gráfica, a simulação e modelação e, por fim, a representação geométrica. Para além de ser reafirmada a necessidade de acompanhar o uso da tecnologia de algum tipo de verificação analítica, a importância dada à representação gráfica está bem expressa nos programas de 1997 e 2002, afirmando-se neste último:

Não é possível atingir os objectivos e competências gerais deste programa sem recorrer à dimensão gráfica, e essa dimensão só é plenamente atingida quando os estudantes trabalham com uma grande quantidade e variedade de gráficos com apoio de tecnologia adequada (calculadoras gráficas e computadores). (Ministério da Educação, 2002, p. 15)

As tecnologias proporcionam imagens visuais das ideias matemáticas sob perspectivas variadas, que permitem diferentes representações e a exploração e análise de muitos exemplos (NCTM, 2007). Na opinião de Ferrara, Pratt e Robutti (2006), a investigação tem reconhecido que a tecnologia facilita abordagens dinâmicas aos principais conceitos da álgebra e do cálculo, chamando mais a atenção para a construção de significados do que para os aspectos manipulativos.

Neste contexto, o GeoGebra como *software* de matemática dinâmica que reúne Geometria, Álgebra e Cálculo revela-se uma ferramenta que permite ao professor realizar actividades, projectos de exploração e investigação na sala de aula, recorrendo apenas a uma aplicação, que tem ainda a vantagem de ser de acesso livre. Esta aplicação combina a manipulação gráfica e a respectiva representação algébrica, aspecto que o caracteriza e distingue de outros ambientes de geometria dinâmica.

Oliveira e Fernandes (2010), tendo conduzido um estudo com alunos do ensino secundário, envolvendo as relações entre as razões trigonométricas e a construção dos gráficos das funções trigonométricas seno e co-seno, destacam o interesse da utilização do programa GeoGebra pelos alunos, quer ao nível cognitivo quer afectivo.

Dos resultados obtidos na experiência realizada na sala de aula e da opinião dos alunos, parece legítimo afirmar que o *software* educacional, e aqui especificamente o GeoGebra, foi utilmente utilizado e representou uma mais-valia tanto na aprendizagem com compreensão como na motivação para a aprendizagem da Matemática. (p. 575)

Neste texto faz-se a descrição de uma actividade enquadrada no tema Geometria no Plano e no Espaço II, do programa de Matemática A do 11.º ano de escolaridade, mais especificamente no estabelecimento das relações entre as razões trigonométricas seno e co-seno de  $\alpha$  e  $90^\circ \pm \alpha$ ,  $180^\circ \pm \alpha$ ,  $270^\circ \pm \alpha$ ,  $-\alpha$ , em que  $\alpha$  representa a amplitude de um ângulo pertencente ao primeiro quadrante. Apresentam-se também as opiniões dos alunos sobre a intervenção de ensino, recolhidas através de um questionário.

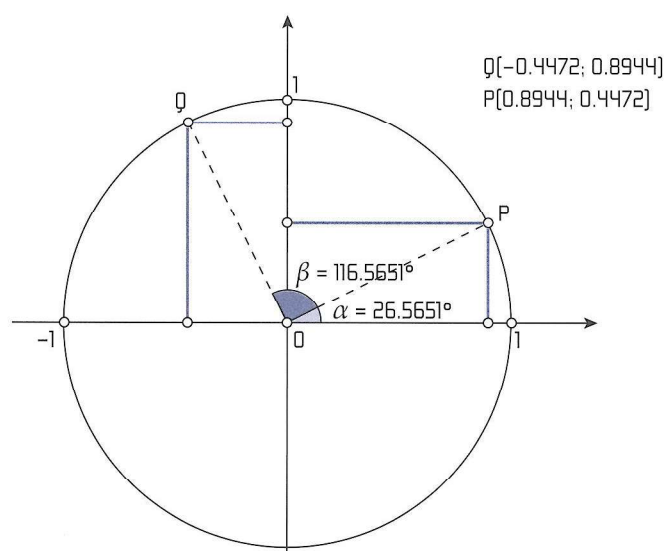


Figura 1. Construção 2 de apoio às etapas 4 e 5 da ficha de trabalho

### Exploração da redução ao 1º quadrante com o GeoGebra

Reconhecendo o potencial educativo do GeoGebra no ensino e na aprendizagem da *Redução ao primeiro quadrante*, do tópico *Trigonometria*, implementou-se uma actividade de descoberta guiada, apoiada neste *software*.

A implementação da actividade decorreu no primeiro período do ano lectivo 2009/2010, no âmbito de uma acção de formação, e foi desenvolvida em três turmas do 11.º ano de escolaridade de uma escola secundária do distrito de Braga. Os alunos distribuídos em grupos de 3 ou 4 elementos realizaram, numa aula de 90 minutos, a actividade num ambiente de sala de aula favorável à formulação e teste de conjecturas, à experimentação e à partilha de ideias.

Realizaram a actividade 47 alunos, 17 rapazes e 30 raparigas, cuja média das idades era de 16 anos. Relativamente ao desempenho em Matemática, a média das classificações (de 0 a 20 valores) obtidas pelos alunos no 10.º ano de escolaridade foi de 11,5 valores.

Quanto ao grau de dificuldade na disciplina de Matemática, 17% dos alunos afirmaram sentir *muitas dificuldades*, 68,1% *algumas dificuldades*, 12,8% *poucas dificuldades* e 2,1% *não ter dificuldades*.

Apoiados nas construções em GeoGebra (num total de 7), previamente elaboradas, os alunos resolveram uma ficha de trabalho organizada por etapas, orientada para a descoberta das relações entre as razões trigonométricas seno e co-seno de  $\alpha$  e  $90^\circ \pm \alpha$ ,  $180^\circ \pm \alpha$ ,  $270^\circ \pm \alpha$ ,  $-\alpha$ .

Na manipulação da construção em GeoGebra pedia-se aos alunos para prestarem atenção aos segmentos assinalados a vermelho e a azul e às coordenadas dos pontos P e Q assinalados no círculo trigonométrico (figura 1).

No sentido de facilitar a descoberta de regularidades entre as razões trigonométricas seno e co-seno de  $\alpha$  e  $\beta$ , as construções permitiam a obtenção de um número elevado de coordenadas para os pontos P e Q, favoreciam o estabelecimento de rela-

Etapa 16. Usando as conclusões a que chegou simplifique a seguinte expressão:

$$\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ + \alpha) \quad \cos \alpha - \cos \alpha = 0$$

Trabalho de casa. Simplifique cada uma das expressões que se seguem.

$$\begin{aligned} \text{a) } \operatorname{sen}(120^\circ) - 2\cos(420^\circ) &= \operatorname{sen}(90^\circ + 30^\circ) - 2\cos(360^\circ + 60^\circ) = \cos \alpha - 2\cos(60^\circ) = \\ &= \cos \alpha - 2\cos 60^\circ = \cos 30^\circ - 2\cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{2} = \frac{-2 + \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 3\cos\left(\frac{29\pi}{6}\right) - 2\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) &= 3\cos(90^\circ + 60^\circ) - 2\cos(270^\circ - 45^\circ) = -3\sin(60^\circ) + 2\sin(45^\circ) = \\ &= -3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{c) } \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha$$

Figura 2. Etapa 16 e tarefas adicionais da ficha de trabalho

ções entre os segmentos verticais e horizontais, importantes na construção de uma regra, desafiavam os alunos a formular conjecturas e a procurar justificações e apoiavam o processo de generalização.

No início da actividade, a maioria dos grupos dedicou algum tempo à análise da primeira construção em GeoGebra — relações entre as razões trigonométricas de  $\alpha$  e  $90^\circ - \alpha$ . Foi sentida nos alunos a preocupação em determinar a relação entre as coordenadas dos pontos P e Q e entre os comprimentos dos segmentos assinalados a vermelho e a azul. Quando se perguntava a um dos grupos: *Então não resolvem a actividade?*, um dos elementos respondeu de imediato *Estamos a analisar o desenho. Este tracinho [segmento colorido] e este [apontando na construção] são sempre iguais*.

Durante a exploração da actividade em sala de aula prestou-se atenção às dificuldades que iam emergindo para serem fornecidas pistas e ao conteúdo das discussões que iam surgindo nos grupos para se compreender os raciocínios dos alunos e orientar as suas discussões de forma a não se desviarem do essencial. A dificuldade mais frequente nos vários grupos ocorreu perante a necessidade de, pela primeira vez, escrever uma relação em que as razões trigonométricas tinham sinais contrários, isto é, na situação  $\cos(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$ .

À medida que os alunos iam progredindo nas etapas da ficha de trabalho, nos vários grupos eram proferidos comentários do tipo: *Agora isto é fácil!*; *O seno é positivo nos dois [quadrantes] e o co-seno é negativo no segundo [quadrante]; Agora até já nem precisamos de preencher a tabela toda*.

Terminada a realização da actividade, sob a moderação do professor, os alunos efectuaram uma síntese das conclusões obtidas (figura 2), reveladora da compreensão do tópico leccionado.

Os noventa minutos da aula revelaram-se suficientes para a realização da actividade, incluindo as tarefas adicionais destinadas à consolidação das aprendizagens e inicialmente perspectivadas para trabalho de casa.

Os alunos também foram capazes de transferir as aprendizagens adquiridas para o caso da tangente, partindo das conclusões obtidas para o seno e para o co-seno, tendo ocorrido como estratégia predominante a utilização da relação  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{sen} \alpha / \cos \alpha$ .

Na aula seguinte à da implementação da actividade foi ministrado um questionário para conhecer a opinião dos alunos sobre a tarefa e a forma de a explorar, cujos resultados se apresentam na Tabela 1.

### Opiniões dos alunos sobre a tarefa e a forma de a explorar

Na Tabela 1 estão registadas as reacções dos alunos, em percentagem, a cada um dos itens do questionário, considerando as categorias de respostas DT/D (Discordo Totalmente/Discordo), I (Indiferente) e C/CT (Concordo/Concordo Totalmente).

Por observação da tabela, verifica-se que a grande maioria dos alunos avaliou de forma muito positiva e tarefa e a forma como foi implementada na sala de aula. Considerando a média das percentagens da categoria de respostas C/CT, depois de inverter os itens centrados nas dificuldades sentidas pelos alunos (1º e antepenúltimo itens), em cada uma das dimensões consideradas, conclui-se que Concordaram ou Concordaram Totalmente cerca de 85% na dimensão *Metodologia de ensino e aprendizagem*, 91% na dimensão *Actividade aplicada na sala de aula* e 92% na dimensão *Metodologia de trabalho de grupo*. Estes resultados exprimem de forma clara a perspectiva positiva dos alunos face à intervenção de ensino realizada.

### Considerações finais

Com a actividade desenvolvida, tirou-se proveito do software para a descoberta das relações entre as razões trigonométricas, tendo as construções permitido aos alunos obter um grande número de coordenadas dos pontos P e Q em pouco tempo e, simultaneamente, visualizar os vários segmentos de recta considerados nas figuras.

Opiniões dos alunos (em %) sobre a tarefa e a forma de a explorar

Dimensões/Itens	DT/D	I	C/CT
<b>Metodologia de ensino e aprendizagem</b>			
A Trigonometria é um tema mais difícil do que os outros temas de Matemática.	82	6	12
Globalmente, gostei da forma como a redução ao 1º quadrante foi apresentada na aula.	0	19	81
A actividade proposta despertou o meu interesse pela Trigonometria.	0	31	69
Foi interessante descobrir por nós mesmos as relações entre as razões trigonométricas apresentadas na ficha de trabalho.	0	0	100
No futuro gostaria de aprender outros assuntos de Matemática do mesmo modo que aprendi a redução ao primeiro quadrante.	0	6	94
<b>Actividade aplicada na sala de aula</b>			
As construções em GeoGebra facilitaram a compreensão da redução ao primeiro quadrante.	0	6	94
As etapas consideradas na ficha de trabalho facilitaram a compreensão da redução ao primeiro quadrante.	0	13	87
Foi fácil obter as relações entre as razões trigonométricas apresentadas na ficha de trabalho.	0	0	100
Nas primeiras etapas da ficha de trabalho senti necessidade de preencher as tabelas, mas depois as construções em GeoGebra eram suficientes para concluir sobre as relações entre as razões trigonométricas apresentadas.	5	13	82
<b>Metodologia de trabalho de grupo</b>			
Gostei de trabalhar em grupo na resolução da actividade.	0	6	94
Tive dificuldades em trabalhar em grupo.	100	0	0
O trabalho em grupo foi importante para aprender melhor.	0	25	75
Participei activamente na resolução da actividade.	0	0	100

DT/D — Discordo Totalmente/Discordo; I — Indiferente; C/CT — Concordo/Concordo Totalmente.

Tabela 1. Resultados do questionário aplicado aos alunos

A conjugação da metodologia de trabalho de grupo, da utilização das construções em GeoGebra e da actividade orientada revelou-se eficaz na motivação dos alunos para a aprendizagem do tópico em estudo, provocou a formulação de conjecturas entre os alunos, promoveu a discussão e a partilha de ideias e permitiu conduzir à generalização.

A compreensão dos conteúdos envolvidos na actividade foi validada pela correcção com que os alunos resolveram as questões propostas na etapa 16 e transferiram as aprendizagens para a resolução de uma nova situação (no caso da tangente).

**Referências**

Ellington, A. J. (2003). A meta-analysis of the effects of calculators on students' achievement and attitude levels in precollege mathematics classes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(5), 433-463.

Fernandes, J. A. & Vaz, O. (1998). Porquê usar tecnologia nas aulas de matemática? *Boletim da SPM*, n° 39, 43-55.

Fernandes, J. A., Almeida, C., Viseu, F., & Rodrigues, A. M. (1999). Um estudo exploratório sobre atitudes e práticas de professores de matemática na utilização de calculadoras. In C. Almeida, J. A. Fernandes, A. M. Rodrigues, A. P. Mourão, F. Viseu e H. Martinho (Orgs.), *Calculadoras gráficas no ensino da matemática* (pp.1-28). Braga: Departamento de Metodologias da Educação da Universidade do Minho.

Fernandes, J. A., Alves, M. P., Viseu, F. & Lacaz, T. M. (2006). Tecnologias de informação e comunicação no currículo de Matemática do ensino secundário após a reforma curricular de 1986. *Revista de Estudos Curriculares*, 4(2), 291-329.

Ferrara, F., Pratt, D. & Robutti, O. (2006). The role and uses of Technologies for the teaching of algebra and calculus. In Gutiérrez & P. Boero (Orgs.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: past, present and future* (pp. 237-273). Rotterdam: Sense Publishers.

Ministério da Educação (1997). *Matemática — Programa do 10º, 11º e 12º anos*. Lisboa: Autor.

Ministério da Educação (2002). *Programa de Matemática A (10º, 11º e 12º anos)*. Lisboa: Autor.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (Tradução portuguesa do original de 2000)

Oliveira, G. P. & Fernandes, R. U. (2010). O uso de tecnologias para ensino de trigonometria: estratégias pedagógicas para a construção significativa da aprendizagem. *Educação Matemática Pesquisa*, 12(3), 548-577.

**Paulo Ferreira Correia**  
Escola Secundária/3 de Barcelos

**José António Fernandes**  
Universidade do Minho