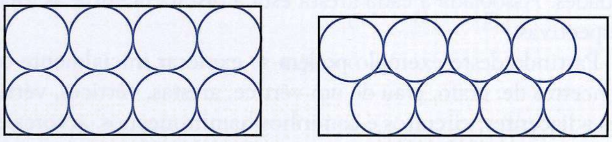
## Circunferências em rectângulos

Em cada um dos rectângulos, todas as circunferências têm um centímetro de raio.

**Pergunta 1** – Qual dos rectângulos tem maior área?

**Pergunta 2** – Imaginemos que aumentamos o número de filas de quatro circunferências. No rectângulo R as filas continuam verticalmente alinhadas, no rectângulo S a 3ª fila fica verticalmente alinhada com a 1ª, a 4ª com a 2ª e assim sucessivamente. Ao fim de quantas filas a relação entre as áreas dos rectângulos se inverte?

**Pergunta 3** – Acontecerá o mesmo com os perímetros?



Rectângulo R Rectângulo S

*(Respostas até 12 de Junho para zepaulo@armail.pt)*

### Paralelogramos no rectângulo

O problema proposto no número 110 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

*Dividimos cada lado de um rectângulo ABCD em três partes iguais. Unimos depois quatro dos novos pontos obtidos de modo a formar um paralelogramo KLMN. Que relação existe entre as áreas destas duas figuras?*

*E se tivéssemos dividido os lados do rectângulo em quatro partes iguais, qual seria agora a relação entre as áreas?*

*Problema adicional: E se dividirmos cada lado em n partes iguais?*

Recebemos 18 respostas: Afonso Garcia (Torres Novas), Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Armando Fernandes (Aveiro), Catarina Ferreira (Lamego), Edgar Martins (Queluz), Francisco Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Hugo Silva (Amadora), Inês Santos (Torres Novas), Iola Mara Ribeiro, João Pereira, João Pineda & Ema Modesto, José Guilherme Couto (Lagoa, Açores), Leonel Vieira (Braga), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Sérgio Rosa e Telma Carneiro (Braga).

As resoluções apresentadas seguiram essencialmente duas estratégias principais.

**1º Método:** Calcular as áreas dos quatro triângulos e subtraí-las à área do rectângulo. Foi utilizado por quase todos os leitores que responderam.

Seja $n$ o número de partes em que se dividem os lados do rectângulo inicial.

Na figura 1, $n = 3$. Sejam $x = \overline{LB}$ e $y = \overline{KA}$.

Área$_{ABCD} = 3x \times 3y = 9xy$

Área de cada triângulo $= xy$

Área$_{KLMN} = 9xy - 4xy = 5xy$

Relação entre as áreas $= \dfrac{5xy}{9xy} = \dfrac{5}{9}$.

Na figura 2, $n = 4$. Sejam $x = \overline{EB}$ e $y = \overline{HA}$.

Área$_{ABCD} = 4x \times 4y = 16xy$

Área de cada triângulo $= \dfrac{3}{2}xy$

Área$_{KLMN} = 16xy - 6xy = 10xy$

Relação entre as áreas $= \dfrac{10xy}{16xy} = \dfrac{10}{16} = \dfrac{5}{8}$.

No caso geral, sejam $x$ e $y$ as medidas de cada uma das partes em que se dividem os lados do rectângulo.

Área$_{ABCD} = nx \times ny = n^2xy$

Área de cada triângulo $= \dfrac{n-1}{2}xy$

Área$_{KLMN} = n^2xy - 2(n-1)xy = (n^2 - 2n + 2)xy$

Relação entre as áreas $= \dfrac{n^2 - 2n + 2}{n^2}$.

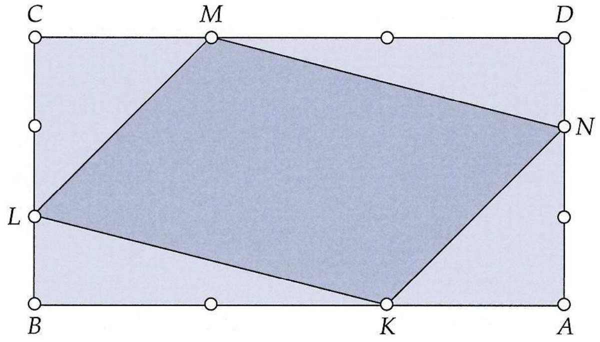


Figura 1

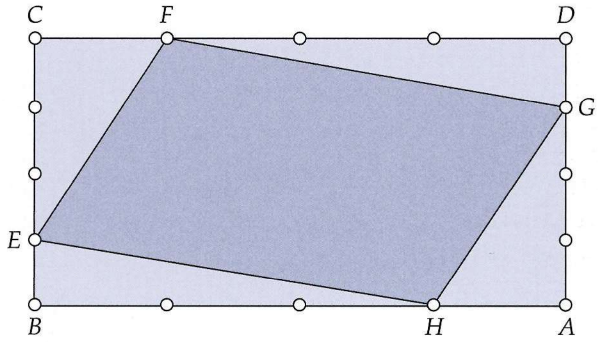


Figura 2

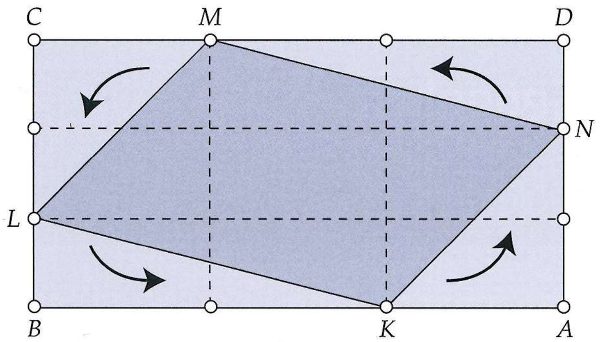


Figura 3

**2º Método:** Dividir o rectângulo inicial em rectângulos *elementares* que podemos admitir que têm área 1. Foi a estratégia seguida pelo Edgar Martins (figura 3).

No primeiro caso, o rectângulo $ABCD$ tem área 9.
O paralelogramo é formado pelo rectângulo central no interior e as partes dos 8 rectângulos pequenos que o rodeiam podem ser rearrumadas como se mostra na figura, dando uma área total de 5. A relação das duas áreas é de 5/9.

No caso geral, o paralelogramo tem, no seu interior, $(n-2)^2$ rectângulos elementares completos. Os restantes $4n-4$ rectângulos elementares podem ser rearrumados, verificando-se que metade deles corresponde ao interior do paralelogramo. A área do palelogramo é então $(n-2)^2+2n-2=n^2-2n+2$.

A fórmula da razão entre as áreas é, evidentemente, igual à que encontrámos pelo método anterior.

O Alberto Canelas foi mais longe. Verificou primeiro que o limite da razão entre as áreas é 1 quando n tende para infinito. Além disso, encontrou as fórmulas para os diferentes casos em que o paralelogramo se obtem unindo outros pontos dos lados que não os que considerámos neste problema.